Jerzy Dadaczyński

Arnold Dresden (1882-1954) i teza o wielości matematyk

Filozofia Nauki 22/1, 121-129

2014

Filozofia Nauki
Rok XXII, 2014, Nr 1(85)

Jerzy Dadaczyński

Arnold Dresden (1882-1954) i teza o wielości matematyk

Współcześnie nie jest niczym nadzwyczajnym opatrywanie terminu „matematyka” różnymi przymiotnikowymi dookreśleniami. Mówi się mianowicie o matematyce klasycznej, intuicjonistycznej, standardowej czy nawet parakonsystentnej. Ponieważ matematyki te uznają różne zbiory twierdzeń, za trafne należy uznać określenie „pluralizm matematyk”.

Wbrew pozorom pluralizm ten nie został powszechnie przyjęty na początku XX wieku wraz z powstaniem drugiego pod względem chronologicznym egzemplarza matematyki, czyli matematyki intuicjonistycznej. Zarówno przedstawiciele matematyki klasycznej, jak i intuicjoniści uznawali istnienie tylko jednej matematyki. Ogólnie rzecz biorąc, jedynie zgadzano się na alternatywę wykluczającą (akceptując odmienne jej człony): albo matematyka klasyczna, albo intuicjonistyczna. Teza o pluralizmie matematyk nie miała znaczących zwolenników.

Jednakże w latach sześćdziesiątych XX wieku przekonanie o wielości matematyk stało się powszechne. Można to wytłumaczyć kilkoma czynnikami:

— ostatecznym odrzuceniem przekonania, że twierdzenia matematyki mają charakter apodyktyczny (są koniecznie prawdziwe), i przyjęciem, że mają charakter hipotetyczny, a konieczne są jedynie związki między twierdzeniami wewnątrz teorii. Po raz pierwszy stanowisko to zaakceptował Poincaré odnośnie do twierdzeń geometrii pod koniec XIX wieku[1];

[1] Niektórzy interpretatorzy — np. Thomas L. Heath (1949: 100) i Stephan Körner (1960: 19-20) — widzą zapowiedź takiego stanowiska w tekstach Arystotelesa.

— sukcesem pewnej formy logicyzmu (szerzej: redukcjonizmu, dalej RED), według którego całą matematykę klasyczną można wyprowadzić z rachunku predykatów i zermelowskiej teorii mnogości;

— znacznymi sukcesami (w latach trzydziestych i sześćdziesiątych XX wieku) w badaniach podstaw zermelowskiej teorii mnogości.

Wspomniane sukcesy studiów nad podstawami teorii mnogości to przede wszystkim wyniki uzyskane przez Gödla i Cohena. W latach trzydziestych, odwołując się do metod z zakresu teorii modeli, Gödel (1940) udowodnił niesprzeczność hipotezy kontinuum i aksjomatu wyboru z aksjomatyką ZF. Na początku lat sześćdziesiątych Cohen (1963, 1964) udowodnił niezależność obydwu od aksjomatyki ZF.

Wyniki te oznaczały, że można budować różne teorie mnogości: bez aksjomatu wyboru i hipotezy kontinuum, z aksjomatem wyboru i hipotezą kontinuum oraz z ich negacjami. Wielość teorii mnogości oznacza jednak wielość matematyk. Zgodnie bowiem z tezą RED całą matematykę można wyprowadzić z zermelowskiej teorii mnogości i rachunku predykatów. Jeśli dokona się zmian w teorii mnogości, np. tych sygnalizowanych wyżej, to na ich podstawie otrzyma się różne matematyki.

Paradygmatyczne może tu być porównanie matematyk budowanych na zermelowskiej teorii mnogości z aksjomatem wyboru i bez niego. Ta druga jest o wiele uboższa: nie można w niej udowodnić wielu twierdzeń matematyki klasycznej, chociażby równoważności dwóch definicji ciągłości funkcji w punkcie (Cauchy'ego i Heinego).

Tak więc — przede wszystkim na skutek sukcesów Cohena w badaniach podstaw teorii mnogości — w latach sześćdziesiątych XX wieku teza o pluralizmie matematyk została zaakceptowana w wielu środowiskach matematycznych. Sytuację porównywano, zyskując dodatkowy, historyczny argument za tą tezą, z przyjęciem już w XIX wieku przez Riemanna, Cayleya, Kleina i Beltramiego pluralizmu geometrii. Również pluralizm geometrii został „wygenerowany" przez operacje (zaprzeczenie) wykonane na jednym z aksjomatów klasycznej geometrii.

W drugiej połowie XX wieku uświadomiono sobie jednak, że nowe egzemplarze matematyki (czy też ich klasy) mogą być „generowane" również w odmienny sposób niż ten polegający na manipulowaniu aksjomatami zermelowskiej teorii mnogości. Zgodnie z RED nowe matematyki powstają także wtedy, gdy dokonuje się zmian w logice, a raczej wymiany samej logiki leżącej u podstaw matematyki. W latach sześćdziesiątych XX wieku dysponowano już całym wachlarzem logik nieklasycznych. Wykorzystując je, stworzono szereg nowych matematyk, w tym nawet matematykę parakonsystentną, która funkcjonuje, mimo że można w niej odtwarzać klasyczne antynomie teoriomnogościowe.

Zupełnie inaczej przedstawiała się kwestia pluralizmu matematyk w latach dwudziestych XX wieku. Przede wszystkim nie były jeszcze znane wspomniane wyniki Gödla i Cohena w zakresie podstaw teorii mnogości. To głównie z tego powodu nie formułowano tezy o pluralizmie teorii mnogości.

Rzecz jasna ostatniego stwierdzenia nie powinno się pozostawiać bez szerszego objaśnienia. W rzeczywistości w owym czasie funkcjonowały już trzy systemy, na których starano się ufundować matematykę. Teoria mnogości tradycji zermelowskiej była stale udoskonalana, przede wszystkim dzięki zabiegom Fraenkla i Skolema. Istniał system oparty na teorii typów, przedstawiony w *Principia Mathematica* przez Russella i Whiteheada. Zresztą wydawał się on wtedy dominować, skoro to właśnie przede wszystkim do niego odwoływała się przełomowa praca Gödla z 1931 roku. Wreszcie w latach dwudziestych XX wieku własny wariant teorii mnogości, z której potem rozwinęła się teoria mnogości tradycji NGB, przedstawił von Neumann (1925, 1928).

Trzeba jednak zauważyć, że wspomniane systemy, na których miała być ufundowana matematyka, nie były pomyślane jako konkurencyjne w stosunku do systemu klasycznego, tzn. nie miały się na ich podstawie rozwijać odrębne matematyki. Wszystkie te systemy służyły uwolnieniu podstaw matematyki od antynomii stwierdzonych na przełomie XIX i XX wieku. Różniły się one rozwiązaniami technicznymi, ale miały zapewnić niesprzeczność jednej i tej samej klasycznej matematyce.

Stwierdzono wyżej, że matematykę nadbudowuje się na teorii mnogości i logice. W latach dwudziestych XX wieku w obrębie teorii mnogości panował *de facto* monizm[2]. Z drugiej strony znano już wtedy odmienne, konkurencyjne systemy logiki.

Obok logiki klasycznej, dopracowanej formalnie przez Fregego oraz w systemie Russella i Whiteheada, pojawiła się logika intuicjonistyczna oraz wielowartościowa logika Łukasiewicza. Na tej ostatniej nie zamierzano w latach dwudziestych budować matematyki. Odmiennie sytuacja przedstawiała się z logiką intuicjonistyczną.

Ostatnie zdanie można by odczytać następująco: na logice intuicjonistycznej starano się budować matematykę. Jednak nie było to zgodne z intencją Brouwera, twórcy intuicjonizmu. Uważał on wolną twórczość rozumu, polegającą między innymi na budowaniu matematyki, za pierwotną. Prawa logiki były wtórne wobec tej twórczości, nie miały charakteru *a priori* (były „wypreparowane" z aktywności matematycznej podmiotu) i — przynajmniej w zamyśle holenderskiego matematyka — nie były niepodważalne (infallibilne). To między innymi dlatego twórca intuicjonizmu nie zgadzał się na aksjomatyzację logiki intuicjonistycznej. Potem jednak zaczęły zwyciężać tendencje przeciwne, czego wyrazem było dokonanie takiej aksjomatyzacji przez Heytinga (w środowisku intuicjonistów holenderskich). W każdym razie w latach dwudziestych XX wieku wiązano logikę intuicjonistyczną, odmienną od klasycznej, z matematyką intuicjonistyczną, też odmienną od klasycznej. Niewątpliwie wielu obserwatorom postronnym, tylko pobieżnie wprowadzonym w myśl Brouwera, mogło się wydawać, że matematyka intuicjonistyczna ma być budowana na logice intuicjonistycznej. Owa matematyka intuicjonistyczna była odmienna od tego, co za-

[2] Oczywiście intuicjoniści (konstruktywiści) odrzucali aksjomat wyboru. Byli w trakcie tworzenia swojego wariantu teorii mnogości. Nie uważali jednak, że teoria mnogości jest teorią podstawową matematyki.

stane, a co teraz zasadnie mogło być określane jako matematyka klasyczna. Nowa matematyka była zasadniczo uboższa. Niezaznajomieni głębiej z poglądami Brouwera mogli uważać, że właśnie odmienność obydwu logik jest zasadniczym powodem odmienności obydwu matematyk[3].

Jednak mimo że dysponowano dwoma egzemplarzami matematyk, nie odważono się na sformułowanie twierdzenia o ich wielości. Świat matematyków podzielił się na dwa rozłączne, wzajemnie dopełniające się obozy. Każdy przedstawiciel jednego obozu negował matematykę (jako matematykę) drugiego obozu[4].

Na zarysowanym tle historycznym zaskakująca musi być teza o wielości matematyk wypowiedziana w roku 1928 przez amerykańskiego matematyka Arnolda Dresdena[5]. Twierdził on, że:

> Musimy odróżnić czyste matematyki (to słowo jest tutaj użyte w liczbie mnogiej) od zastosowań matematyk (Dresden 1928: 442).

Trzeba mocno podkreślić, że to Dresden wyraźnie zaznaczył, iż angielskie słowo *mathematics*, które oznacza matematykę zarówno w liczbie pojedynczej, jak i liczbie mnogiej, w tym kontekście występuje w liczbie mnogiej. Należy też przypomnieć, że Dresden wypowiedział tezę o wielości matematyk w konkretnym kontekście istnienia jej dwóch egzemplarzy: klasycznej i intuicjonistycznej.

Filozofia matematyki Dresdena miała wiele wspólnego z filozofią matematyki Brouwera, choć w kilku punktach różniły się one istotnie. Obaj zgadzali się w kwestiach ontologicznych, będąc zdecydowanymi przeciwnikami matematycznego platonizmu i uważając, że przedmioty matematyki są konstruowane przez ludzki umysł i istnieją tylko w nim. A zatem czynności matematyka nie polegają na odkrywaniu zastanej rzeczywistości matematycznej, ale na jej tworzeniu (por. Dresden 1928: 449).

Jednakże owa twórczość matematyczna ludzkiego umysłu nie była według Dresdena — i tu różnił się on w zasadniczy sposób od Brouwera — absolutnie wolna, nie była niczym nieskrępowana. Rzeczywiście, amerykański myśliciel stwierdza, że lo-

---

[3] Zasadniczym powodem odmienności obydwu matematyk było odrzucenie w matematyce intuicjonistycznej metod, procedur i dowodów niekonstruktywnych. Prowadziło to również do nieobowiązywania pewnych klasycznych zasad logicznych.

[4] Przepaść między przedstawicielami obydwu nurtów matematyki była wtedy tak wielka, że „klasycy" nazywali intuicjonistów „bolszewikami": „For, on the other hand, there has grown up among mathematicians during the last decade or two, a tendency which seems to cast doubt on a large and important part of mathematics. By some this tendency has been characterized as revolutionary, as »bolshevistic« (oh, misery of words!), as subversive of the wholesomeness which had always characterized mathematics. This tendency, inaugurated by the Dutch mathematician, L. E. J. Brouwer, has several distinct aspects" (Dresden 1928: 439).

[5] Dresden (1882-1954) napisał doktorat w Chicago pod kierunkiem Oskara Bolzy (Dresden 1908). Sam Bolza był z kolei uczniem Kleina w Getyndze. Dresden znał język niderlandzki, tłumaczył na angielski między innymi historię matematyki starożytnej van der Waerdena. Dzięki znajomości niderlandzkiego poznał prace Brouwera i propagował je w Stanach Zjednoczonych (np. w Dresden 1924).

gika, będąca częścią zawartości ludzkiego umysłu (*the capacity of the human mind*), jest uprzednia w stosunku do kreowanej matematyki (Dresden 1928: 447). Należy więc wnioskować, że według Dresdena logika (za)dana umysłowi jest pierwotna względem kreatywnej działalności matematycznej i dostarcza mu zasad, którymi bezwzględnie musi się kierować w swojej twórczości[6]. To nie matematyka jest uprzednia w stosunku do logiki, jak chciał Brouwer, ale na odwrót.

Dresden *explicite* wyróżnia dwie logiki — arystotelesowską (tzn. klasyczną) i niearystotelesowską (intuicjonistyczną) i stara się je scharakteryzować[7]. Stwierdza, że u podstaw logiki klasycznej stoją trzy prawa: tożsamości, niesprzeczności i wyłączonego środka (Dresden 1928: 440-441). Natomiast u podstaw logiki intuicjonistycznej stoją tylko dwa pierwsze, nie obowiązuje zaś w niej prawo wyłączonego środka (Dresden 1928: 441). Odpowiednie zbiory praw logicznych nazywa „podstawami" logiki arystotelesowskiej i niearystotelesowskiej[8].

Dresden twierdzi *explicite*, że nie trzeba opowiadać się za jedną z tych logik, a wykluczać drugą. Budując (tworząc) matematykę, można opierać się zarówno na jednej logice, jak i na drugiej, byle konsekwentnie. W rezultacie przyjęcie wielości logik u podstaw matematyki skutkuje wielością matematyk (Dresden 1928: 448-449).

Warto przy tej okazji zauważyć, że Dresden pracujący z dwoma egzemplarzami logiki, przyjmuje wprost, że tworzone będą nowe egzemplarze. Co więcej od razu dopuszcza możliwość, że na podstawie kolejnych (kolejno tworzonych) logik będą mogły powstawać następne matematyki (Dresden 1928: 448).

Wypada zauważyć, że sposób, w jaki Dresden dochodzi do twierdzenia o pluralizmie matematyk, przypomina okoliczności, w których pojawiło się ono w latach sześćdziesiątych XX wieku. Zaznaczono wcześniej, że w drugiej połowie ubiegłego wieku bardzo popularna była teza RED, zgodnie z którą całą matematykę klasyczną można wyprowadzić z zermelowskiej teorii mnogości i logiki (w sensie węższym). Operacje na zermelowskiej teorii mnogości, dopuszczalne dzięki osiągnięciom Gödla i Cohena, nie były w latach dwudziestych XX wieku możliwe. Natomiast możliwe było, przy przyjmowanej przez Dresdena tezie o uprzedniości logiki w stosunku do matematyki i dysponowaniu dwoma egzemplarzami logiki, „generowanie" odmiennych matematyk na drodze wymiany logiki. To dokładna antycypacja zabie-

---

[6] Dresden uważał, że badanie „matematycznych" działań ludzkiego umysłu leży poza kompetencjami logiki, matematyki, a nawet filozofii. Zdecydowanie twierdził, że winna się nimi zająć psychologia: „The recognition of the very significant intervention of the human mind is an important element in our point of view. How it operates and why is not a part of our subject, in spite of its title; this must remain a subject for psychological investigation" (Dresden 1928: 442).

[7] Dresden (1928: 448) twierdził, że osobiście nie był zdolny posługiwać się — również w matematyce — logiką intuicjonistyczną.

[8] W ten sposób Dresden proponuje pewną kodyfikację (czy nawet aksjomatyzację) logiki intuicjonistycznej. Było to niezgodne z przekonaniami Brouwera, który uważał, że próba taka stałaby w sprzeczności z wolnością podmiotu w tworzeniu matematyki.

gów z drugiej połowy XX wieku, gdy opierając się na tezie RED i zmieniając logiki, „generowano" wielość matematyk.

Jest jeszcze jedna okoliczność, która upodabnia Dresdena do późniejszych teoretyków znających wyniki Cohena. Amerykański matematyk świadomie odwołuje się do wielości geometrii — faktu, z którym matematyka miała do czynienia co najmniej od 1830 roku. *Implicite* jego tekst zawiera następujący argument: skoro, mimo oporów, zaakceptowano na gruncie matematyki wielość geometrii, to nie widać przeszkód, by nie zgadzać się na wielość matematyk. Dresden (1928: 441) celowo nazywa logikę intuicjonistyczną „logiką niearystotelesowską". Powodem było określenie geometrii nieklasycznych mianem „nieeuklidesowych". Można by dodać: na niearystotelesowskiej logice da się nadbudować niearystotelesowską matematykę.

Amerykański matematyk jest też świadomy zasadniczego technicznego podobieństwa między budowaniem geometrii nieeuklidesowych i logiki (matematyki) niearystotelesowskiej. Obydwie konstrukcje są efektem manipulowania aksjomatykami teorii klasycznych. Zauważa też pewną różnicę: geometrie nieeuklidesowe budowało się, negując V postulat Euklidesa, logika (matematyka) niearystotelesowska powstaje, gdy usuwa się zasadę wyłączonego środka. Różnica między negacją a usunięciem nie była jednak na tyle ważka, by burzyć analogię między budowaniem geometrii nieeuklidesowych i logiki (matematyki) niearystotelesowskiej (Dresden 1928: 441).

Dresden przekonany był o użyteczności istnienia wielości teorii matematycznych (matematyk), które posiadały identyczne zbiory pojęć pierwotnych i różniły się tylko jednym aksjomatem. Uważał, że takie teorie (matematyki) dają lepszy wgląd (*insight*) w „spokrewnione" teorie (matematyki). Nie ukrywał, że inspiracją do sformułowania takiego poglądu była sytuacja w pluralistycznej geometrii (Dresden 1928: 442).

Powstaje zasadnicze pytanie, dlaczego Dresden wysunął tezę o wielości matematyk tak wcześnie, już w latach dwudziestych XX wieku. Przecież w owym czasie obowiązywało nastawienie typu albo—albo: wybierano jedną matematykę, a inną dyskredytowano. Wydaje się, że jego nowatorskie podejście do zagadnienia wielości lub jedyności matematyki wynikało ostatecznie stąd, że nie był skłonny przypisywać matematyce (matematykom, teoriom matematycznym, twierdzeniom matematycznym) kwalifikacji prawdziwości czy fałszywości. Klasyfikowanie teorii matematycznej jako fałszywej (semantycznie) prowadziło do jej odrzucenia. Dresden postąpił odmiennie: w miejsce dychotomicznej kwalifikacji prawdziwości/fałszywości przypisuje teoriom matematycznym kwalifikację mniejszej lub większej (stopniowalnej) stosowalności, *applicability* (Dresden 1928: 445).

Chodzi ostatecznie o stosowalność do rzeczywistości fizycznej. Istnieją teorie matematyczne bezpośrednio do niej stosowalne. Tłumacząc język Dresdena za pomocą współczesnych kategorii, można by powiedzieć, że są to teorie, dla których za pomocą odpowiednich reguł semantycznych można wskazać fragment rzeczywistości jako model semantyczny. Są to teorie o najwyższym stopniu stosowalności. Jeśli znajdzie się teorię, dla której istnieje model w matematycznym modelu (zamierzonym) teorii matematycznej bezpośrednio zastosowanej do rzeczywistości fizycznej, to tym samym wskaże się teorię o kolejnym, niższym stopniu stosowalności. Nie można wykluczyć, że wśród teorii matematycznych znajdują się i takie, które nie są stosowalne: albo na danym etapie rozwoju wiedzy matematycznej, albo w ogóle[9].

Kategoria stopniowalnej stosowalności miała zdaniem Dresdena odnosić się również do matematyk, a nie tylko do poszczególnych teorii. Należy przypuszczać, że chodziło mu w istocie o stosowalność pewnych teorii należących do tych matematyk. Stosowalność fragmentów matematyki klasycznej do rzeczywistości pozapodmiotowej była oczywista, natomiast kwestia stosowalności (fragmentów) matematyki intuicjonistycznej (niearystotelesowskiej) miała być kwestią przyszłych dociekań.

Trzeba zauważyć, że Dresden „uruchamia" pewną „wielowartościową" aksjologię matematyki. Teorie matematyczne i całe matematyki mają być wartościowane na podstawie określenia stopnia ich stosowalności. Nawet jednak całkowity brak stosowalności nie prowadzi do dyskredytowania czy do odrzucenia teorii matematycznej albo też całej matematyki, chociażby dlatego, że nie można wykluczyć, iż w przyszłości mogą zostać odkryte (wskazane) odpowiednie zastosowania. Ostatecznie zatem wybrana aksjologia nauki (matematyki), oparta na kategorii wielostopniowej stosowalności, miała wpływ na wypowiedzenie przez Dresdena tezy o pluralizmie matematyk.

---

[9] Trzeba zaznaczyć, że tekst Dresdena był pisany w czasie, kiedy jeszcze nie była zbudowana semantyka logiczna. Niemniej Dresden, jak wynika z jego sformułowań, przeczuwa zarysy owej semantyki. Poza tym *de facto* — choć bez odpowiedniej terminologii i ściśle określonych zasad — posługiwano się rozumowaniami teoriomodelowymi w matematyce co najmniej od drugiej połowy XIX wieku, kiedy to wskazano modele euklidesowe dla geometrii nieeuklidesowych. Zresztą właśnie związki między różnymi geometriami miał amerykański autor stale na uwadze, pisząc swój tekst (por. Dresden 1928: 442-445).

Przy okazji należy zwrócić uwagę, że Dresden, stojący na stanowisku, iż przedmioty matematyczne są konstruktami umysłu (podmiotu), wprowadził poziomy istnienia owych przedmiotów. Poziom zerowy to poziom przedmiotów w modelach matematycznych teorii posiadających też modele w rzeczywistości fizycznej. Poziom pierwszy to poziom przedmiotów w modelach matematycznych (zamierzonych) teorii posiadających modele w modelach matematycznych (zamierzonych) teorii matematycznych bezpośrednio aplikowanych w rzeczywistości fizycznej itd. (wadą takiej klasyfikacji jest to, że im niższy stopień stosowalności teorii, tym wyższy nominalnie poziom istnienia przedmiotów w jej modelach). Dresden doskonale zdawał sobie sprawę z faktu, że ta klasyfikacja nie jest bezwzględna, ale uwarunkowana aktualną wiedzą matematyczną, albo lepiej: dotychczas wykonanymi konstrukcjami (odpowiednich modeli). Dla przedmiotów modeli pewnych teorii nie można podać poziomu ich istnienia ze względu na aktualny (albo też bezwzględny?) brak stosowalności teorii (por. Dresden 1928: 442-445).

Trzeba zaznaczyć, że amerykański autor, który uważał, że przedmioty matematyki są konstruktami umysłu, i jednocześnie twierdził, że matematyka jest stosowana do opisu rzeczywistości pozapodmiotowej, próbował odpowiedzieć na pytanie, dlaczego takie zastosowania są możliwe. Z jego wypowiedzi wynika wprawdzie, że za pomocą reguł (semantycznych) można ustalić odpowiedniość (jednojednoznaczną) przedmiotów teorii matematycznej i przedmiotów należących do rzeczywistości fizycznej, prowadzi to jednak do pytania, skąd bierze się taka możliwość. Tej istotnej kwestii Dresden nie podejmuje.

Sytuację problemową, przed którą stanął Dresden, i sposób jej rozwiązania można porównać do zaproponowanych przez Poincaré'ego strategicznych rozstrzygnięć problemu pojawienia się geometrii nieeuklidesowych.

Francuski matematyk zdawał sobie doskonale sprawę z tego, że gdyby którejś z geometrii przypisać prawdziwość (semantyczną), to konsekwentnie trzeba by zrezygnować z odmiennych geometrii. Trudność polegała na tym, że tradycyjnie geometrii euklidesowej przypisywano prawdziwość. Poincaré zerwał z tradycją. Geometrie nie są ani prawdziwe, ani fałszywe. Są koniecznymi związkami między zdaniami, które w istocie, podobnie jak aksjomaty, mają charakter zbiorów hipotez. Geometrie mogą być użyteczne w opisie rzeczywistości fizycznej, ale relacje między rzeczywistością fizyczną a jakąkolwiek geometrią są przygodne. Można wybierać różne geometrie do opisu rzeczywistości. Jest to kwestia konwencji, a o wyborze decyduje wygoda. Nie można zatem poszczególnym geometriom przypisywać prawdziwości/fałszywości semantycznej. To ostatecznie prowadziłoby do monizmu w zakresie geometrii. Pluralizm geometrii zagwarantowany jest dzięki odrzuceniu dychotomicznej kwalifikacji prawdziwy/fałszywy (semantycznie) i przyjęciu określeń związanych z większą lub mniejszą wygodą przy opisywaniu rzeczywistości fizycznej.

Tak samo było w istocie kilkadziesiąt lat później w przypadku Dresdena. Odrzucenie dychotomicznej kategorii prawdziwy/fałszywy odnośnie do różnych egzemplarzy matematyki i posługiwanie się kategorią stopniowalnej stosowalności pozwoliło mu postawić tezę o równoczesnym istnieniu różnych matematyk.

Wypada zauważyć, że przyjęta przez Dresdena kategoria stosowalności teorii matematycznych i jej stopni zakładała *implicite* takie pojęcie prawdy, jakie zdefiniowano w latach trzydziestych XX wieku w semantyce budowanej przez Tarskiego. Rozważania Dresdena na temat stopni stosowalności zawierały „rys" czy „intuicję" semantyki powstałej w następnej dekadzie. Nawet jednak stwierdzenie, że koncepcja amerykańskiego matematyka zakładała pojęcie prawdy, nie deprecjonuje jego rozwiązania. Rezygnacja z kwalifikacji teorii jako prawdziwych/fałszywych i wartościowanie ich jako bardziej lub mniej stosowanych stanowiły zręczny zabieg. Teorię klasyfikowaną jako fałszywą należało odrzucić. Natomiast sklasyfikowanie jej jako niestosowalnej — czyli w istocie nieposiadającej modelu ani w rzeczywistości fizycznej, ani w bardziej lub mniej aplikowanej teorii matematycznej — wcale nie musiało prowadzić do tak radykalnego kroku. I to pozwoliło na postawienie tezy o wielości matematyk.

Trzeba zauważyć, że teza Dresdena o wielości matematyk jest w pewnym sensie osłabiona przez wprowadzoną przez niego aksjologię matematyki. Twierdzi, że istnieje wiele matematyk, ale są one w pewien sposób uhierarchizowane w wyniku zastosowania do nich kategorii stosowalności. W tym sensie istnieją lepsze i gorsze matematyki. Sytuacja jest zatem odmienna od dzisiejszej. Współcześnie nie obserwuje się tendencji do łączenia tezy o wielości matematyk z jakąś aksjologią matematyki. Stwierdza się po prostu pluralizm. Funkcjonują oczywiście też aksjologie matematyki, ale nie mają bezpośredniego wpływu na orzekanie wielości matematyk.

Przy okazji warto zaznaczyć, że Dresden, który wielokrotnie odwoływał się do przyjętego w XIX wieku pluralizmu geometrii, wyprowadził znaczenie kategorii stosowalności teorii matematycznych (matematyk) — w tym również tych „niestandardowych" — właśnie ze stwierdzonej w roku 1919 stosowalności geometrii nieeuklidesowej w proponowanym przez ogólną teorię względności opisie rzeczywistości fizycznej.

Mimo że, jak wskazano, teza Dresdena o wielości matematyk jest w pewien sposób osłabiona, to nie można zaprzeczyć, iż jej sformułowanie miało wręcz charakter przepowiedni wyprzedzającej o kilka dziesięcioleci stan późniejszej wiedzy o matematyce.

BIBLIOGRAFIA

Cohen P. (1963), *The Independence of the Continuum Hypothesis*, „Proceedings of the National Academy of Science of the United States of America" 50(6), 1143-1148.

Cohen P. (1964), *The Independence of the Continuum Hypothesis II*, „Proceedings of the National Academy of Science of the United States of America" 51(1), 105-110.

Dresden A. (1908), *The Second Derivatives of the Extremal-Integral*, „Transactions of the American Mathematical Society" 9(4), 467-486.

Dresden A. (1924), *Brouwer's Contributions to the Foundations of Mathematics*, „Bulletin of the American Mathematical Society" 30(1-2), 31-40.

Dresden A. (1928), *Some Philosophical Aspects of Mathematic*s, „Bulletin of the American Mathematical Society" 34(4), 438-452.

Gödel K. (1940), *The Consistency of the Axiom of Choice and of the Generalized Continuum Hypothesis with the Axioms of Set Theory*, Princeton (NJ): Princeton University Press.

Heath T. L. (1949), *Mathematics in Aristotle*, Oxford: Clarendon Press.

Körner S. (1960), *The Philosophy of Mathematics*, London: Hutchinson University Library.

Von Neumann J. (1925), *Eine Axiomatisierung der Mengenlehre*, „Journal für die reine und angewandte Mathematik" 154, 219-240.

Von Neumann J. (1928), *Eine Axiomatisierung der Mengenlehre*, „Mathematische Zeitschrift" 27(1), 669-752.