Kordula Świętorzecka

O modalnej naturze argumentu św. Anzelma : uwagi do artykułu "Logika modalna a dowód ontologiczny" Andrzeja Biłata

Filozofia Nauki 22/1, 131-137

2014

Filozofia Nauki
Rok XXII, 2014, Nr 1(85)

POLEMIKI

Kordula Świętorzecka

O modalnej naturze argumentu św. Anzelma

Uwagi do artykułu „Logika modalna a dowód ontologiczny” Andrzeja Biłata

Z zainteresowaniem przeczytałam zamieszczony w „Filozofii Nauki” artykuł Andrzeja Biłata pt. *Logika modalna a dowód ontologiczny* i sporządziłam do niego listę uwag, którą pozwalam sobie przedstawić. Poczynione spostrzeżenia po pierwsze wskazują na problematyczne fragmenty wywodu uzasadniającego główną tezę komentowanej pracy. Po drugie, przynajmniej niektóre z nich skłaniają do przekonania o możliwości nietrywialnego stosowania logiki modalnej do analizy argumentacji Anzelmiańskiej i jej współczesnych wersji.

1. Zacznę od sformułowania stanowiska Autora i przyjmę, że daje się ono streścić w dwóch twierdzeniach:

(1.1) (Wbrew powszechnemu przekonaniu) Anzelmiański argument ontologiczny nie angażuje w istotny sposób modalności (zdaniowych) — jego siła nie zależy od „żadnych specyficznych praw logiki modalnej [a tylko od praw logiki klasycznej]” (s. 107).

(1.2) (Jedynym) źródłem „siły” modalnej wersji dowodu ontologicznego jest Leibnizjańska teoria doskonałości.

Przedmiotem pracy jest uzasadnienie koniunkcji (1.1) i (1.2). Temu właśnie uzasadnieniu są poświęcone moje uwagi.

2. Za punkt wyjścia rozważań Autor wybiera sformalizowaną wersję argumentu ontologicznego Hartshorne’a z 1962 r. Ten krok słusznie ucina ewentualne dywagacje na temat możliwych interpretacji źródłowego tekstu św. Anzelma i pozwala na zogniskowanie dalszych analiz na dobrze sprecyzowanej teorii.

Krótko rzecz ujmując, Hartshorne formułuje swój formalizm w zdaniowym języku z klasycznymi funktorami prawdziwościowymi, modalnościami: $\Box$, $\Diamond$, $\Rightarrow$ oraz ze stałą zdaniową p_0 := *Byt najdoskonalszy istnieje*[1].

Zamierzoną przez Hartshorne'a podstawą formalną jest logika modalna S5. System S5 w wersji Gödlowskiej powstaje przez dołączenie do zbioru tez logiki klasycznej CLS:

— równoważności ustalających sposób eliminowania funktorów $\Diamond$ oraz $\Rightarrow$ na korzyść $\Box$ i $\rightarrow$:

$$(\Diamond/\Box)\ \Diamond A \leftrightarrow \neg\Box\neg A,$$

$$(\Rightarrow/\Box)\ (A\Rightarrow B) \leftrightarrow \Box(A\rightarrow B),$$

— aksjomatów:

(K) $\Box(A\rightarrow B) \rightarrow (\Box A\rightarrow\Box B)$,

(T) $\Box A \rightarrow A$,

(5) $\Diamond\Box A \rightarrow \Box A$

oraz przez wprowadzenie jako pierwotnej reguły dołączania konieczności

(RNec) $A \vdash \Box A$.

Hartshorne przyjmuje dwa aksjomaty specyficzne:

(**AA**) $p_0 \Rightarrow \Box p_0$ (*Lemat Anzelma*)

(AM) $\neg\Box\neg\, p_0$ (*Lemat Leibniza*)

i wyprowadza tezę: TH$\Box$. $\Box p_0$, a w konsekwencji: TH. p_0.

Zaproponowany przez Hartshorne'a dowód można sformułować krócej[2] i co więcej, w ten sposób, by korzystać nie z charakterystycznego dla S5 aksjomatu (5), lecz z aksjomatu specyficznego dla słabszej niż S5 logiki B:

(B) $\Diamond\Box A \rightarrow A$.

Ten fakt słusznie odnotowuje Autor, chociaż przytacza istotnie słabszą wersję lematu Anzelma i przez to błędnie wyprowadza TH. Zamiast (**AA**) w całym wywodzie analizuje się implikację zwykłą

(AA) $p_0 \rightarrow \Box p_0$[3],

---

[1] Pomińmy jako stylistyczną niedoskonałość różnicę w przyjętym przez Autora sposobie czytania stałej p_0. Tutaj p_0 czytane jest: *Byt (absolutnie) doskonały istnieje*. Dalej będziemy mówić o kwestii istnienia *bytu najdoskonalszego*.

[2] Wersję z 1962 szczegółowo omawia Perzanowski (1994a).

[3] W sformułowaniu Perzanowskiego (1994a), na które powołuje się Autor, lemat Anzelma ma oczywiście postać (**AA**). Swoją wersję lematu Anzelma Hartshorne powtarza także w (1965: 97).

a w wyprowadzeniu TH stosuje się do (AA) regułę RNec, o której wiadomo, że w S5 (i B) jest regułą dopuszczalną, lecz nie ważną. Chociaż ze względu na RNec zbiory tez wymienionych logik są domknięte (i tak samo zbiory ich tautologii), to nie jest tak dla każdego rozszerzenia tych zbiorów[4].

Wyprowadzenie TH można łatwo naprawić: zamiast (AA) przyjąć za Hartshornem (**AA**) i nie stosować RNec (s. 104). Wtedy jednak załamuje się dalsza argumentacja Autora, który porównuje (AA) z zaproponowanym lematem o *nieistnieniu bytu najdoskonalszego*:

(AN) $\neg p_0 \rightarrow \Box\neg p_0$

i opiera na nim swoją niemodalną wersję argumentu ontologicznego (opisaną w paragrafie 4). Gdybyśmy dalej rozważali lemat (**AA**), należałoby go porównywać z koniecznościowym domknięciem (AN):

(**AN**) $\Box(\neg p_0 \rightarrow \Box\neg p_0)$ (lub: $\neg p_0 \Rightarrow \Box\neg p_0$),

ale wówczas nie byłoby możliwe pominięcie modalności zdaniowych w wyprowadzeniu kluczowej tezy o istnieniu Absolutu, a do tego właśnie zmierza cały wywód Autora.

Zauważmy jeszcze, że zarówno w oryginalnej wersji Hartshorne'a, jak i w tej, którą przytacza Autor, wykluczone jest, by implikacja (AA) była podstawieniem tezy logiki, ponieważ wtedy zakładanym systemem musiałby być przynajmniej system TV powstający przez rozszerzenie logiki KT o aksjomaty postaci:

(TV) $A \rightarrow \Box A$,

a nie istotnie od niego słabszy system S5 (jak tego chce Hartshorne) lub jeszcze słabszy system B.

3. Zanim przejdziemy do meritum, ustalmy parę modalnych okoliczności formalizmu Hartshorne'a, które są istotne z punktu widzenia dalszych uwag. Wszystkie te fakty wskazuje i szczegółowo omawia Perzanowski (1994a i b).

Za Perzanowskim użyjemy zapisu Q^{p_0} [**AA**, AM], który czytamy: *aksjomatyczne wzmocnienie logiki* Q *wyrażonej w języku ze stałą* p_0 *o aksjomaty* **AA**, AM i stosujemy dla niego synonimiczny skrót QAH := Q^{p_0} [**AA**, AM], przy czym dla $S5^{p_0}AH$ użyjemy skrótu AH.

---

[4] Na płaszczyźnie syntaktycznej powiemy, że choć dla każdej formuły A jest tak, że jeżeli A jest S5- (odp. B-) tezą, to $\Box A$ jest S5- (odp. B-) tezą, to jednak nie jest tak, że dla każdej formuły A implikacja postaci: $A \rightarrow \Box A$ jest tezą wymienionych logik (na płaszczyźnie semantycznej: gdy A jest formułą logicznie prawdziwą, implikacja $A \rightarrow \Box A$ także jest logicznie prawdziwa, ale nie jest tak dla dowolnej formuły A). Co prawda, dla S5 implikacja: $A \rightarrow \Box A$ jest tezą, o ile A jest formułą w pełni zmodalizowaną, ale Autor używa systemu B, a zmiana podstawy formalnej na S5 nie poprawia sytuacji, ponieważ (AA) nie jest formułą w pełni zmodalizowaną. Kwestia stosowalności reguły Gödla i niektórych reguł z niej wyprowadzalnych w rozumowaniach pozalogicznych została szczegółowo omówiona np. w (Świętorzecka 2002).

W związku z tym, co powiedzieliśmy w punkcie 2, możemy teraz zapisać, że:

(3. 1) $AH \vdash p_0$.

Spostrzeżenie Autora o dowodliwości TH w systemie B rozszerzonym o aksjomaty Hartshorne'a jest konsekwencją następującej ogólnej zależności:

(3.2) Jeżeli Q jest logiką monotoniczną, zawierającą (B), to $QAH \vdash p_0$.

Odnośnie do rozważanej formalizacji odnotujmy jeszcze to, że:

(3.3) $AH \vdash \Box p_0 \vee \Box\neg p_0$,

(3.4) $AH \vdash \neg p_0 \rightarrow \Box\neg p_0$,

(3.5) $AH \vdash (p_0 \rightarrow \Box p_0) \leftrightarrow (\neg p_0 \rightarrow \Box\neg p_0)$.

4. Zreferujmy teraz konkurencyjną względem teorii Hartshorne'a formalizację Autora, który formułuje wspomniany lemat o nieistnieniu bytu najdoskonalszego:

(AN) $\neg p_0 \rightarrow \Box\neg p_0$,

dołączając go razem z $(\Diamond/\Box)$ modyfikacją Lematu Leibniza:

$(AM\Diamond)$ $\Diamond\, p_0$

do klasycznej logiki zdań wyrażonej w modalnym języku zdaniowym ze stałą p_0 i na tej podstawie otrzymuje TH.

Wykład Biłata uzupełnijmy o założenie boolowskiego rozkładu modalności $(\Diamond/\Box)$ i przyjmijmy skrót $AB := CLS^{p_0}\, [(\Diamond/\Box), AN, AM\Diamond]$. Możemy teraz odnotować, że:

(4.1) $AB \vdash p_0$.

Chociaż teoria AB jest uwikłana modalnie (należy do niej $(\Diamond/\Box)$), to jest oczywiście istotnie słabsza od AH z powodu swojej składowej logicznej i w szczególności nie zawiera aksjomatów charakterystycznych dla systemów B lub S5.

Wobec tego, że: $CLS^{p_0}\, [(\Diamond/\Box)] \subsetneq S5^{p_0}$ oraz $AH \vdash (AM\Diamond)$, $AB \vdash (AM)$, $AH \vdash (AN)$ (por. 3.4), $AB \nvdash$ (**AA**), mamy:

(4.2) $AB \subsetneq AH$.

5. Wyprowadzenie tezy TH można jeszcze uprościć. Wystarczy rozważyć teorie CLS^{p_0} [AN, AM], $CLS^{p_0}\, [\Diamond p_0 \rightarrow p_0, AM\Diamond]$[5] czy wręcz $CLS^{p_0}\, [p_0]$. W pierwszej wyzbywamy się założenia o boolowskim rozkładzie modalności. Dwie następne mają zaś nawet „naddatek" logiki — tu można z powodzeniem zredukować podstawę formalną do logiki pozytywnej lub którejś z logik implikacyjnych. Osią krytyki Bi-

[5] Na tę teorię, w której dowód tezy TH uzyskuje postać „najbardziej banalną z banalnych" (s. 107), wskazuje także Autor.

łata jest jednak zaangażowanie logiki S5 (i B), a nie akceptowanej logiki klasycznej (z rozkładem (◊/□)). Dalszą naszą uwagę poświęcimy więc proponowanej teorii AB.

6. Wobec tego, że S5 oraz B są nadlogikami logiki CLS[(◊/□)] oraz równoważność (AM) ↔ (AM◊) jest podstawieniem (◊/□), kwestia uzasadnienia (1.1) i (1.2) sprowadza się do wyznaczenia kwalifikacji pragmatycznych formuł (**AA**) — w wywodzie Biłata implikacji (AA) — oraz (AN). Autor koncentruje się na możliwie najsłabszej kwalifikacji i wskazuje powody, dla których implikacja (AN) jest jego zdaniem *nie bardziej kontrowersyjna niż* (AA). Oprócz powodów ontologicznego i kosmologicznego wymienia się także powód metalogiczny, zgodnie z którym (AN) umożliwia zbudowanie teorii opartej jedynie na CLS, co ma stanowić o przewadze AB nad AH. Pomińmy to, że (AA) razem z (AM) nie wystarczają do tego, by zbudować na gruncie S5 (lub B) dowód ontologiczny w wersji Hartshorne'a (por. p. 2). Zauważmy natomiast, że nawet jeśli argumentację Biłata dałoby się przystosować do pary (**AA**) i (**AN**), to na tej podstawie moglibyśmy uznać tylko to, że AB (a raczej jakaś jej wersja modalna z (**AN**)) jest nie *bardziej kontrowersyjną* formalizacją dowodu Anzelma *niż* teoria AH, a to nie wystarcza, by uzasadnić stanowisko z (1.1) (oraz z (1.2)).

7. Powód metalogiczny preferencji AB przed AH odwołuje się do preferencji logiki klasycznej przed systemami S5 i B. Wachlarz możliwych wyborów w kwestii podstawy formalnej argumentacji Anzelma jest jednak znacznie bogatszy i to samo tyczy się wyboru logiki (lub teorii), która umożliwia porównanie omawianych implikacji (AA) i (AN) oraz ich modalnych domknięć (**AA**) i (**AN**).

Jak Autor słusznie zauważa:

(7.1) $\mathrm{CLS}^{p_0}\,[\Box p_0 \vee \Box\neg p_0] \vdash \mathrm{AA}$

oraz

(7.2) $\mathrm{CLS}^{p_0}\,[\Box p_0 \vee \Box\neg p_0] \vdash \mathrm{AN}$[6].

Jak jednak mierzyć siłę „kontrowersyjności" (AA) i (AN), o której mówi się w związku z (7.1)? Jeśli to równoważność:

(7.3) $\mathrm{AA} \leftrightarrow \mathrm{AN}$

ma być choćby koniecznym warunkiem tego, by (AA) i (AN) były równie problematyczne (lub kontrowersyjne), to tę zależność otrzymujemy dopiero na gruncie AH (*sic!*). Powtórzmy (3.5):

$$\mathrm{AH} \vdash (p_0 \to \Box p_0) \leftrightarrow (\neg p_0 \to \Box\neg p_0).$$

Logiką, która zaś gwarantuje (7.2), jest znacznie silniejszy niż S5 (i B) wspomniany system TV, ponieważ:

---

[6] Jak pamiętamy (por. 3.3), formuła $\Box p_0 \vee \Box\neg p_0$ jest tezą formalizmu Hartshorne'a.

(7.4) $Q \vdash (A \rightarrow \Box A) \leftrightarrow (\Diamond A \rightarrow A)$ wtedy, gdy Q = TV,

a wiadomo, że:

(7.5) $CLS[\Diamond/\Box] \vdash (\neg A \rightarrow \Box \neg A) \leftrightarrow (\Diamond A \rightarrow A)$.

Implikacje (AN) i (AA) oczywiście nie są porównywalne na gruncie AB, ponieważ AB $\nvdash$AA.

Zwróćmy jeszcze uwagę na (**AA**) i (**AN**). W tym wypadku nie powiela się zależność z (6.3).

Równoważność:

(P) $\Box(A \rightarrow \Box A) \leftrightarrow \Box(\Diamond A \rightarrow A)$

jest schematem charakterystycznym systemu modalnego KP i może odgrywać ważną rolę w dyskusji nad (**AA**) i (**AN**). (P) wyznacza logikę teorii, w której można by próbować rozważać (**AA**) i (**AN**) jako *równie kontrowersyjne*. Logika KP jednocześnie nie trywializuje modalności (jak ma to miejsce w TV) i opisuje je słabiej niż S5 lub B, a z drugiej strony także ich nie ignoruje, jak to dzieje się w CLS. KP może być także narzędziem w konstrukcji dowodu ontologicznego: rozszerzona o aksjomaty postaci (T) umożliwia najkrótsze wyprowadzenie TH i to w sposób, w którym korzysta się nie z (**AA**), ale z (**AN**) i *bez użycia* aksjomatów (B) lub (5), chociaż KPT=S5[7].

Na zakończenie chciałabym zwrócić uwagę na opinię zawartą w (1.2), którą podzielam z Autorem. Sądzę, że główna (lecz nie jedyna) siła dowodu ontologicznego tkwi w (być może Leibnizjańskiej) teorii perfekcji. To jednak znaczy, że argumentacja Anzelma jest w istocie rzeczy tylko *fragmentem* pewnej istotnie bogatszej teorii. Propozycje Hartshorne'a i Biłata w różny sposób formalizują ten właśnie fragment i domagają się uzupełnienia do teorii o silniejszych składowych — nie tylko pozalogicznej, lecz także logicznej. W takim rozszerzeniu składowa logiczna nie musi ignorować modalności zdaniowych i może być wręcz konieczne uwzględnienie w niej praw, w których $\Box$ oraz $\Diamond$ są istotnie sprzęgnięte z innymi pojęciami logicznymi (jak ma to miejsce w formułach Barcan i Buridana dla $\forall$ oraz $\exists$)[8]. Wówczas jednak, niezależnie od tego, jakie prawa byłyby zaangażowane w wyprowadzenie tezy o koniecznym istnieniu bytu najdoskonalszego, twierdzenie (1.1) byłoby po prostu fałszywe: oczywiste jest, że zarówno pojęcie *dowodu*, jak i pojęcie *tezy* mają sens tylko w granicach *całej* teorii, która w takim wypadku byłaby teorią istotnie modalną.*

[7] Te zależności jako pierwszy omawia Purtill (1966).

[8] Taką sytuację spotykamy np. w naszkicowanym przez Gödla rozwinięciu teorii Hartshorne'a o fragment teorii perfekcji. Syntetyczny opis różnych uzupełnień formalizmu Gödla można znaleźć w (Hájek, 2011).

* Tekst przygotowany w ramach projektu finansowanego przez Narodowe Centrum Nauki (DEC-2013/08/M/HS1/00439).

BIBLIOGRAFIA

Biłat A. (2012), *Logika modalna a dowód ontologiczny*, „Filozofia Nauki" XX.1(77), 103-108.

Hájek P. (2011), *Gödel's Ontological Proof and Its Variants* [w:] *Kurt Gödel and the Foundations of Mathematics. Horizons of Truth*, M. Baaz, C. H. Papadimitriou, H. W. Putnam, D. S. Scott, C. L. Harper (red.), Cambridge: Cambridge University Press, 307- 321.

Hartshorne Ch. (1965), *Anselm Discovery. A Re-Examination of the Ontological Proof for God's Existence*, La Salle: Open Court.

Hartshorne Ch. (1962), *The Logic of Perfection*, La Salle: Open Court [wyd. IV 1991].

Perzanowski J. (1994a), *O wskazanych przez Ch. Hartshorne'a modalnych krokach w dowodzie ontologicznym św. Anzelma* [w:] *Filozofia / Logika, Filozofia logiczna 1994*, J. W. Perzanowski, A. Pietruszczak (red.), Toruń: Wydawnictwo UMK, 77-96.

Perzanowski J. (1994b), *O modalnej logice parasymetryczności KP i jej kuzynkach* [w:] *Filozofia / Logika, Filozofia logiczna 1994*, J. W. Perzanowski, A. Pietruszczak (red.), Toruń: Wydawnictwo UMK, 331-336.

Purtill R. A. (1966), *Hartshorne's Modal Proof*, „The Journal of Philosophy" 63(14), 397-409.

Świętorzecka K. (2002), *O stosowalności niektórych modalnych reguł inferencji w rozumowaniach pozalogicznych*, „Filozofia Nauki" X.1(37), 109-138.