

Pelagia Morejko

Graficzne przedstawienie pojęć matematycznych i ich rola w kształceniu matematycznym na szczeblu początkowym

Nauczyciel i Szkoła 1 (8), 97-103

2000

Artykuł został zdigitalizowany i opracowany do udostępnienia w internecie przez Muzeum Historii Polski w ramach prac podejmowanych na rzecz zapewnienia otwartego, powszechnego i trwałego dostępu do polskiego dorobku naukowego i kulturalnego. Artykuł jest umieszczony w kolekcji cyfrowej bazhum.muzhp.pl, gromadzącej zawartość polskich czasopism humanistycznych i społecznych.

Tekst jest udostępniony do wykorzystania w ramach dozwolonego użytku.

Pelagia Morejko

Graficzne przedstawienie pojęć matematycznych i ich rola w kształceniu matematycznym na szczeblu początkowym

Wprowadzenie

Przyswajanie pojęć matematycznych może się odbywać na jednej z dwóch dróg. Pierwsza z nich jest wyznaczona przez charakter matematyki jako dyscypliny wiedzy aksjomatyczno-dedukcyjnej i abstrakcyjnej¹. Proces przyswajania pojęć zaczyna się od definicji i prowadzi ku identyfikacji desygnatów pojęcia, a następnie wyznaczania kolejno jego cech (innych niż zawarte w definicji). Pójście więc przez dziecko siedmioletnie drogą jaką wskazuje matematyka jako gotowa dyscyplina wiedzy jest niemożliwe. Szansą dla edukacji jest przyjęcie drogi nazywanej „od konkretnego do abstrakcji”. Mimo że pojęcia matematyczne są wyraźnie zhierarchizowane, to jednak istnieje możliwość wyboru takich, które dadzą się wyabstrahować z otaczającej rzeczywistości, a ściślej z czynności wykonywanych na obiektach materialnych. Pojęcia te zaliczane są do tzw. pojęć elementarnych (Z. Krygowska, 1977).

Badanie rzeczywistości, jej opisywanie i przekształcanie w zakresie dostępnym w edukacji wczesnoszkolnej, to początek długiej drogi prowadzącej do abstrakcyjnych pojęć matematycznych. Na drodze tej istotną rolę odgrywają przedstawienia graficzne. J. Bruner (1978) w swojej teorii reprezentacji zwrócił uwagę na przedstawienia graficzne wyróżniające wśród reprezentacji jedną z nich, tzw. ikoniczną.

Wśród różnych pojęć matematycznych szczebla początkowego węzłową rolę odgrywa pojęcie liczby naturalnej i działań na liczbach naturalnych oraz związane z nimi pojęcia zbioru i funkcji, mające charakter zarówno wspierający jak i propedeutyyczny na różnych etapach procesu dydaktycznego.

¹ Każde pojęcie jest z natury swej abstrakcyjne. Ze względu jednak na to, czy desygnaty pojęcia występują w realnej rzeczywistości, czy nie, wygodnie jest używać terminów: pojęcia konkretne, pojęcia abstrakcyjne.

Rysunek a schemat graficzny

Nie ma zadowalającej definicji rysunku. W „Małym słowniku języka polskiego” (1969) czytamy, że rysunek to jest „to, co jest narysowane” i dalej, że jest to „umiejętność przedstawiania na płaszczyźnie bryłowości ciał oraz ich położenia w przestrzeni”. Ta ostatnia część jest istotna z tego względu, że otaczająca nas rzeczywistość jest trójwymiarowa, a rysunek jest płaski. Istnieją natomiast konwencje, które pozwalają na taką transformację rzeczywistości, zgodnie z którymi można rozpoznać dany obiekt. Konwencje, dostosowując się do potrzeb, zmieniają się, stają się coraz bardziej wyrafinowane, a wraz z nimi ewoluuje rysunek od „wiernego”, pozwalającego rozróżnić np. dwie konkretne lalki, przez rysunek przedstawiający lalkę w ogóle (a nie jakąś konkretną), do rysunku-schematu, który może przedstawiać bardzo różne obiekty (przedmioty, związki, sytuacje, działania itp.) w zależności od przyjętych umów. „Schemat to przedstawienie czego w ogólnych zarysach, szkic, struktura, plan czego”. I analogicznie, „schematyczny to przedstawiający co szkicowo, w ogólnych zarysach, z grubsza szkicowy, ogólnikowy, niedokładny”². Schemat przedstawia więc rzeczywistość uproszczoną; stanowi etap pośredni między skomplikowaną rzeczywistością a abstrakcją.

Rysunek jest pojęciem ogólniejszym od schematu. Schemat jest więc także rysunkiem. W odniesieniu zaś do czynności wygodnie (i zgodnie z językiem naturalnym) będziemy nazywać rysowaniem każdą czynność polegającą na zaznaczeniu na kartce papieru ołówkiem (kredką itp.) obiektu (przedmiotu, związku, sytuacji itp.), bez względu na to, jak dalece ów rysunek będzie odbiegał od rzeczywistości. Natomiast przez schematyzowanie będziemy rozumieć proces polegający na wyborze z otaczającej rzeczywistości pewnych jej cech i dołączeniu takich konwencji, aby łącznie odzwierciedlały rzeczywistość.

Czynności schematyzowania zalicza Z. Krygowska do ważnych składników aktywności matematycznej (1977, cz. 2, 1986, t VI), wyznaczając tej ostatniej wiodącą funkcję w kształceniu matematycznym.

W nauczaniu matematyki różne przedstawienia graficzne (rysunki) występują jako:

- schemat rysunkowy — w geometrii płaskiej;
- grafy, drzewa, tabele, pętle (schematy Venna), koła Eulera;
- schematy czynności (sposobów postępowania).

Ewoluuowanie rysunku od „wiernego” do odległego od rzeczywistości odpowiada różnym odmianom reprezentacji ikonicznej. Można tu mówić zarówno o jej stopniowości, jak i użyć sformułowania reprezentacji mieszananej. Przetwarzanie zdarzeń zachodzących w otoczeniu jest dość długim procesem, w trakcie którego jed-

² Słownik wyrazów obcych. Warszawa 1970.

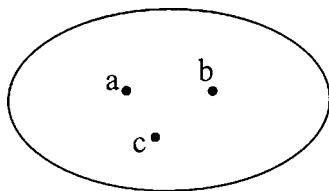
nostka utrwała zdarzenia poprzez rysowanie, schematyzowanie, wychodząc poza dostarczone informacje, by w końcowej fazie tego procesu uzyskać dość daleki, czy wręcz w żaden sposób nie wskazujący na pierwowzór, układ odniesienia w formie symbolicznej. Stopniowalność reprezentacji można tu rozumieć jako proces zubożania rysunku o elementy bezpośrednio wskazujące na rzeczywistość. Natomiast reprezentacje ikoniczne mieszane są szczególnie subtelne (Z. Semadeni 1982, s. 167), łączą bowiem elementy enaktywne z ikonicznymi. Źródłem rysunku jest realna rzeczywistość (przedmioty, związki, czynności itp.), a także symbolika (mowa o konwencjach wyrażonych słownie lub symbolami). Kierunek przedstawienia graficznego może iść także od symbolu do rysunku, choć jest to droga dydaktycznie trudniejsza.

Rola jaką odgrywają reprezentacje ikoniczne w przejściu między skomplikowaną rzeczywistością a abstrakcją jest nie do przecenienia. W działalności edukacyjnej ucznia pojawiają się one jako element celowej organizacji jego pracy, ale podkreślmy, że ich doniosłość wynika również z faktu, że graficzne przedstawienia są na porządku dziennym efektem spontanicznej aktywności podmiotu uczącego się.

Graficzne przedstawienia pojęć teorii zbiorów

Pojęcia związane z teorią zbiorów reprezentowane są za pomocą schematów Venna, kół Eulera, diagramów Carolla, dendrytów („drogi”, „drzewa”).

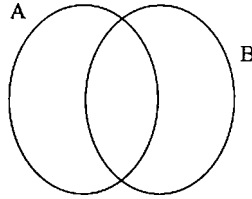
Schemat Venna dla przedstawienia zbioru wykorzystuje pętlę, wewnątrz której znajdują się punkty oznaczające elementy zbioru (rys. 1).



Rys.1

Stosowanie tego schematu jest jednak dziś kontrowersyjne. Według H. Freudenthala (za: Z. Krygowska 1977, cz. 2, s. 57–58) nie nadaje się do reprezentowania określonych zbiorów, nie może również reprezentować zbioru nieskończonego. Schemat przedstawiony na rysunku 1 nie odbija więc żadnego określonego zbioru. Zaś według Krygowskiej schemat ten jest symbolem zbioru trójelementowego. Schemat Venna w postaci dwóch przecinających się pętli przedstawia dwa zbiory

(odpowiednio 3 pętle — 3 zbiory, itd.) i dobrze nadaje się do interpretacji działań na zbiorach (rys. 2), również zawierania się zbiorów.

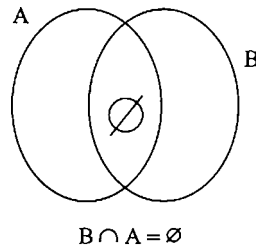
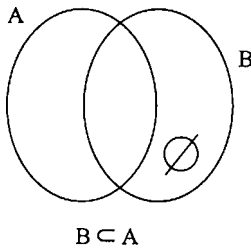


Rys.2

W przypadku gdy któryś ze zbiorów czy podzbiorów jest zbiorem pustym, to umieszcza się wewnątrz odpowiedniego konturu symbol zbioru pustego (rys. 3a, b)).

a)

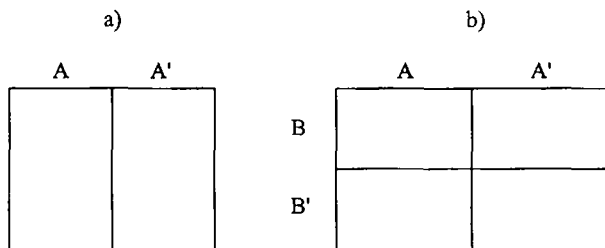
b)



Rys.3

Schematem Venna można posługiwać się również w ten sposób, że tę część, w której znajdują się jakieś elementy, zamalowujemy.

Do ilustrowania pojęć teorii zbiorów wykorzystuje się również ilustrację rysunkową stosunków zakresów pojęć za pomocą kół Eulera. Dwa zachodzące na siebie koła oznaczają dwa zakresy (zbiory), które nie są rozłączne; natomiast zbiory rozłączne przedstawia się za pomocą kół wzajemnie zewnętrznych. Mimo że te dwie konwencje (schematy Venna i koła Eulera) różnią się i nie powinno się ich mieszać, to jednak doświadczenie szkolne pokazuje, że rezygnacja ze zbytniego w tym zakresie rygoryzmu jest pożyteczna. Obok schematów Venna w nauczaniu wykorzystuje się tzw. diagramy Carolla, zwane też schematami okienkowymi (rys.4 a, b)), gdzie A, B oznaczają dwa podzbiory pewnego ustalonego zbioru (uniwersum), A', B' — odpowiednio ich dopełnienia.

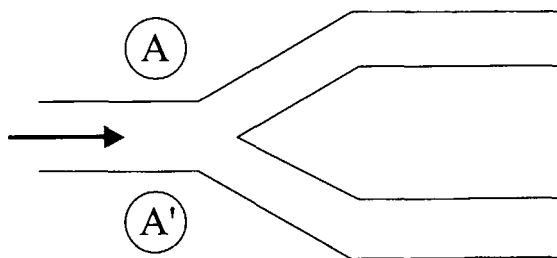


Rys.4

Te reprezentacje ikoniczne (choć użycie symboli odbiera im trochę „obrazowości”) nazywa Z. Scmadeni o b s z a r o w y m i.

Sytuacje przedstawione za pomocą reprezentacji ikonicznych obszarowych można przedstawić za pomocą reprezentacji ikonicznych dendrytowych („drogi”, „drzewa”). Nazwa pochodzi od skojarzenia z kształtem drzewa.

Reprezentacje tego typu są używane od dawna, np. jako drzewa genealogiczne. Rysunek 5 pokazuje przejście od schematu Carolla (rys.4a) do schematu-drogi (rys.5).



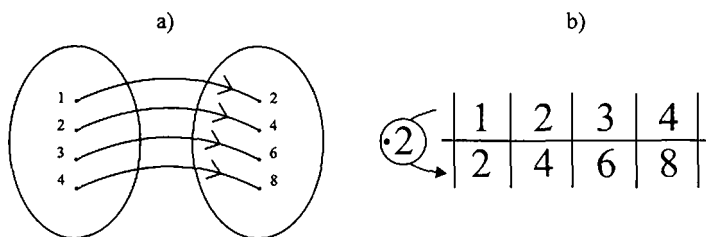
Rys.5

Graficzne przedstawienia pojęcia funkcji

Sposoby przestawiania funkcji są zależne od przyjętej definicji.

W nauczaniu szkolnym mnogościowc rozumienie funkcji decyduje o tym, że funkcja jest zbiorem, bądź układem pewnych zbiorów, z dołączonym tzw. przepisem funkcyjnym.

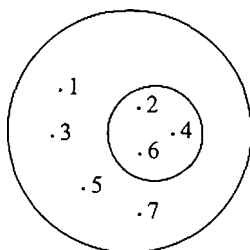
W zakresie reprezentacji ikonicznej dydaktyka dysponuje bardzo różnorodnymi przedstawieniami. Najczęściej mamy do czynienia z przedstawieniami rysunkowymi z dołączonymi elementami symbolicznymi. Reprezentować w ten sposób można tylko te funkcje, w których zbiór X jest skończony i na dodatek mało liczny. W nauczaniu początkowym mamy właśnie do czynienia tylko z takimi przypadkami. Funkcję będziemy przedstawiać w postaci grafu lub tabelki (typowe wykresy w układzie współrzędnych na tym szczeblu nauczania nie mają zastosowania). Rysunek 6 a), b) przedstawia pewną funkcję w postaci grafu i tabelki. Jest to funkcja $y = 2x$, $x \in X = \{1, 2, 3, 4\}$.



Rys. 6

Graficzne przedstawienie liczby naturalnej i działań na liczbach naturalnych

W nauczaniu szkolnym pojęcie liczby naturalnej i działań na liczbach naturalnych występuje dość wcześnie w reprezentacji symbolicznej. Z reprezentacji ikonicznej uczniowie korzystają w formie gotowych rysunków przedmiotów. Ustalają równoliczność między dwoma zbiorami narysowanych przedmiotów, przedmioty zbiorów podlegają przeliczaniu, dodawaniu, odejmowaniu, dzieleniu itp. Bardziej zaawansowane w tym zakresie czynności ucznia polegają na wydzieleniu z danego zbioru liczb podzbioru, którego elementy spełniają określony warunek (rys. 7).



Rys. 7

W przedstawianiu działań na liczbach naturalnych wykorzystuje się tabele funkcyjne. Widoczny jest tu wyraźnie związek pojęcia liczby naturalnej z pojęciem funkcji i zbioru.

Zakończenie

Wybór pojęcia zbioru, funkcji i liczby naturalnej wraz z pojęciami im towarzyszącymi nie jest przypadkowy. W Podstawach Programowych (MEN, 1999) wiodąca rola przypadła liczbie naturalnej i działaniom na liczbach naturalnych. Zasada integracji treści, aczkolwiek niejawną, jest mocno osadzona w wymienionych wyżej pojęciach, a używane w nauczaniu szkolnym graficzne przedstawienia są wystarczającym dla niej potwierdzeniem.

Literatura

- Z. Krygowska: *Zarys dydaktyki matematyki*, cz. I. Warszawa 1977.
- Z. Krygowska: *Zarys dydaktyki matematyki*, cz. II. Warszawa 1977.
- Z. Krygowska: *Elementy aktywności matematycznej, które powinny odgrywać znaczącą rolę w matematyce dla wszystkich*. „Dydaktyka Matematyki” t.6, 1986. *Podstawa Programowa, I etap edukacyjny, Nauczanie zintegrowane*. MEN 1999.
- Z. Semadeni: *Reprezentacje enaktywne i reprezentacje ikoniczne w sensie Brunera na przykładzie pojęć mnogościowych*. „Dydaktyka Matematyki” t. 1, 1981.