Eugeniusz Żabski

Uwagi o antynomiach logicznych, ich założeniach i rozwiązaniach

Nowa Krytyka 7, 103-108

1996

NOWA KRYTYKA 7 Rok 1996
ISBN 0867-647X

Eugeniusz Żabski

Uwagi o antynomiach logicznych, ich założeniach i rozwiązaniach

Antynomie logiczne to – jak wiemy – rozumowania formalnie poprawne (na gruncie logiki klasycznej) i prowadzące do wniosków postaci A wtedy i tylko wtedy, gdy nieprawda, że A*.

Antynomie logiczne dzieli się, na ogół, na teoriomnogościowe i semantyczne. Antynomie teoriomnogościowe to takie, w których występuje pojęcie zbioru. Natomiast te antynomie, w których pojęcie zbioru nie występuje, nazywa się semantycznymi. G. Frege i B. Russell rozwiązanie wszystkich problemów związanych z antynomiami logicznymi uważali za nadzwyczaj ważne. Antynomiom poświęca się dziś znacznie mniej uwagi niż kiedyś, ale nadal budzą one pewne zainteresowanie.

Przypomnijmy trzy, najciekawsze chyba, antynomie semantyczne: kłamcy, Grellinga i Richarda oraz najprostszą z antynomii teoriomnogościowych: antynomię Russella.

* Dalej zamiast zwrotu: „wtedy i tylko wtedy, gdy" będziemy używać skrótu wtw .

1. Antynomie kłamcy, Grellinga, Richarda i Russella

Przypomnijmy najpierw najstarszą z antynomii: antynomię kłamcy. Formułuje się ją czasem tak: Czy zdanie: (e) (e) jest fałszywe, jest prawdziwe, czy fałszywe? Jeśli jest prawdziwe, to jest tak jak ono głosi, czyli jest fałszywe. Sprzeczność. Jeśli zaś jest fałszywe, to nie jest tak, jak ono głosi, czyli nie jest fałszywe. Także sprzeczność.

Przypomnijmy z kolei antynomię Grellinga. Są takie wyrazy języka polskiego, że każdy z nich ma tę własność, o której mówi, np. termin „wyraz" jest wyrazem, termin „nazwa" jest nazwą, wyraz „polski" jest polski, wyraz „rzeczownik" jest rzeczownikiem, a wyraz „pięciozgłoskowy" jest pięciozgłoskowy itp. Wyrazy takie nazywa się autologicznymi. Wyrazy, które nie mają tej własności, o której mówią nazywa się heterologicznymi. Heterologicznymi są np. wyrazy: „czterozgłoskowy", „czasownik", „zdanie" itp. Zapytajmy czy wyraz „heterologiczny" jest autologiczny, czy heterologiczny. Gdyby był heterologiczny, to nie miałby tej własności, o której mówi, czyli nie byłby heterologiczny. Sprzeczność. Gdyby zaś był autologiczny, to miałby własność, o której mówi, czyli byłby heterologiczny. Również sprzeczność.

Przypomnijmy teraz antynomię Richarda. Bierzemy tym razem pod uwagę wszystkie definicje arytmetycznych własności liczb naturalnych. Ustawiamy je w ciąg nieskończony: D_1, D_2, ... Każdej z tych definicji przyporządkowujemy liczbę ustalającą kolejność definicji w tym ciągu. A więc definicji D_n przyporządkowujemy liczbę n, dla dowolnego naturalnego n. Liczba przyporządkowana definicji ma własność, którą owa definicja definiuje, albo jej nie ma. Załóżmy np., że definicji definiującej własność „być liczbą pierwszą" jest przyporządkowana liczba 17. 17 jest liczbą pierwszą, a więc ma własność, którą definicja D_{17} definiuje. Załóżmy też, że liczba 15 jest przyporządkowana definicji definiującej własność „być kwadratem pewnej liczby naturalnej". 15 nie jest kwadratem żadnej liczby naturalnej, nie ma więc własności definiowanej przez definicję D_{15}. Mówi się, że 17 nie jest liczbą Richardowską, a 15 – jest. Ogólnie: (r) x jest liczbą Richardowską wtw x nie ma własności definiowanej przez definicję, której x jest przyporządkowane.

Wyrażenie (r) jest definicją. Definiuje arytmetyczną własność „być liczbą Richardowską". Definicji tej jest zatem przyporządkowana pewna liczba naturalna. Załóżmy, że liczbą tą jest n. Spytajmy, czy n jest liczbą Richardowską, czy nie? Jeśli n jest liczbą Richardowską, to zgodnie z definicją (r) nie ma własności definiowanej przez definicję, której n jest przyporządkowana, a więc nie jest liczbą Richardowską. Sprzeczność. Jeśli zaś n nie jest liczbą Richardowską, to znowu, zgodnie z definicją (r), n ma własność definiowaną przez definicję, której n jest przyporządkowana, a więc n jest liczbą Richardowską. Znów sprzeczność.

Przypomnijmy także jedną z antynomii teoriomnogościowych: antynomię Russella. Niech Z będzie zbiorem wszystkich zbiorów, które nie są swoimi własnymi elementami. Zbiór Z definiujemy zatem następująco: X $\in$ Z wtw nieprawda, że (X $\in$ X). Pytamy, czy zbiór Z jest swoim własnym elementem, czy nie? Jeśli jest, to na mocy określenia zbioru Z, nie jest. Sprzeczność. Jeśli nie jest, to także na mocy definicji zbioru Z – jest. I znowu sprzeczność. Antynomie te przedstawione są np. w [Beth 1959].

2. Założenia antynomii kłamcy, Grellinga, Richarda i Russella

Wnioskowanie, w którym nie wszystkie przesłanki są *explicite* wymienione nazywa się – jak wiadomo – entymematami. Owe niewymienione przesłanki entymematu nazywamy założeniami tego wnioskowania.

Analiza przypomnianych tu antynomii pozwala stwierdzić, że rozumowania te są entymematami. Zauważmy bowiem, że w antynomii kłamcy nie wymienia się dwóch następujących przesłanek:

(1) Zdanie (e) jest prawdziwe lub fałszywe.

(2) Nieprawda, że zdanie (e) jest prawdziwe wtw jest fałszywe.

W antynomii Grellinga zaś założeniami są dwa następujące zdania:

(1) Wyraz „heterologiczny" jest autologiczny lub heterologiczny.
(2) Nieprawda, że wyraz „heterologiczny" jest autologiczny wtw jest on heterologiczny.

W antynomii Richarda z kolei tymi nie wymienionymi *explicite* przesłankami są:

(1) Liczba naturalna *n* jest Richardowską lub nią nie jest.
(2) Nieprawda, że liczba *n* jest Richardowską wtw nią nie jest.

W antynomii Russella natomiast zakłada się, iż:

(1) Zbiór Z jest swoim własnym elementem lub nim nie jest.
(2) Nieprawda, że zbiór Z jest swoim własnym elementem wtw nim nie jest.
(3) Zbiór Z istnieje.

Łatwo zauważyć, że założenia (1) i (2) są podstawieniami praw logiki klasycznej odpowiednio: prawa wyłączonego środka ($p \vee \sim p$) i tautologii klasycznej: $\sim (p \equiv \sim p)$, którą nazwiemy prawem nierównoważności sprzeczności. Oczywiste jest, że założenie (3) antynomii Russella nie jest podstawieniem żadnej tautologii. Zatem założeniami antynomii semantycznych są wyłącznie podstawienia tautologii klasycznych, zaś założeniami antynomii Russella są podstawienia praw logiki klasycznej oraz zdanie stwierdzające istnienie zbioru Z nie będące podstawieniem żadnej tautologii.

3. Rozwiązania antynomii logicznych

Wiemy, że sprzeczności w antynomiach semantycznych wynikają z braku odróżnienia w tych rozumowaniach wyrażeń języka przedmiotowego (tj. terminów odnoszących się wyłącznie do obiektów pozajęzykowych) od wyrażeń metajęzyka owego języka przedmiotowego (tj. zwrotów odnoszących się do wyrażeń języka przedmiotowego). Jest to wyjaśnienie antynomii semantycznych. Zatem konsekwentnie odróżniając wyrażenia języka przedmiotowego od wyrażeń metajęzyka owego języka można uniknąć antynomii semantycznych. Z kolei zabezpieczyć się przed antynomiami teoriomnogościowymi można – jak wiadomo – przez konstrukcję języków sztucznych tak, by antynomii tych nie dało się w nich odtworzyć. Na przykład w języku teorii typów logicznych nie można sformułować definicji zbioru wszystkich zbiorów nie będących swoimi własnymi elementami. Jednakże ani wyjaśnienie antynomii, ani zabezpieczenie się przed nimi nie jest ich rozwiązaniem. Rozwiązać antynomię logiczną, to – naszym zdaniem – odrzucić co najmniej jedno z założeń, na których owa antynomia się opiera.

Stwierdziliśmy, że antynomie kłamcy, Grellinga, Richarda i Russella zakładają podstawienie dwóch tautologii klasycznych: prawa wyłączonego środka i prawa nierównoważności sprzeczności. Zatem rozwiązać te antynomie, to odrzucić co najmniej jedno z tych praw, więc rozwiązać owe antynomie, to logikę klasyczną zastąpić jakąś inną logiką, w której co najmniej jedno z wymienionych praw nie obowiązuje.

Wiadomo, że prawa logiki klasycznej, o których wspominaliśmy (w szczególności prawo wyłączonego środka), budziły od dawna wątpliwości u niektórych logików. Wiadomo też, że zbudowano wiele nieklasycznych rachunków logicznych, w których przynajmniej jedno z tych praw nie obowiązuje. Jako przykłady takich rachunków wymieńmy: trójwartościowy rachunek zdań Łukasiewicza, logiki Kleenego (słaba i mocna), intuicjonizm, rachunek Boczwara. Wszystkie te rachunki przedstawione są np. w [Malinowski 1990]. Przykładami takich rachunków są także rachunki nihilistyczne omówione w [Żabski 1995].

Zauważmy jednakże, że tylko logika Boczwara i rachunki nihilistyczne, z wymienionych tu nieklasycznych systemów logicznych, zbudowane zostały z myślą o rozwiązaniu antynomii logicznych. Rozwiązanie antynomii przez pozostałe logiki jest efektem niezamierzonym, ubocznym. Niemniej jednak wszystkie te nieklasyczne systemy są remedium na antynomie logiczne.

Antynomie teoriomnogościowe rozwiązywać można analogicznie jak antynomie semantyczne. Antynomie teoriomnogościowe, w przeciwieństwie do antynomii semantycznych, można rozwiązać środkami logiki klasycznej.

Stwierdziliśmy, że założenie (3) antynomii Russella nie jest – w przeciwieństwie do założeń (1) i (2) – podstawieniem żadnej tautologii. Z założenia tego, tj. założenia o istnieniu zbioru Z, definicji tego zbioru i praw logiki klasycznej wynika równoważność dwóch zdań sprzecznych (będąca podstawieniem klasycznej kontrtautologii). Stąd, na mocy prawa logiki klasycznej: $[p \rightarrow (q \equiv \sim q)] \rightarrow \sim p$ wynika to, iż założenie (3) jest fałszywe. Zatem antynomia Russella jest w gruncie rzeczy: 1) entymematem i 2) niedokończonym dowodem nieistnienia zbioru wszystkich zbiorów nie będących swoimi własnymi elementami, jest więc ta antynomia niedokończonym dowodem fałszywości założenia (3).

Analogicznie wygląda sprawa z pozostałymi antynomiami teoriomnogościowymi. Oparte są one zawsze na założeniu istnienia odpowiedniego zbioru. Owe antynomie są więc niedokończonymi dowodami fałszywości założeń, na których te wnioskowania są oparte, tzn. niedokończonymi dowodami nieistnienia postulowanych w antynomiach teoriomnogościowych zbiorów.

Reasumując: Wszystkie antynomie logiczne są entymematami. Odrzucenie co najmniej jednej z nieujawnionych przesłanek, na których oparte są te antynomie jest – jak się wydaje – najprostszym i najlepszym sposobem rozwiązania owych rozumowań. W przypadku antynomii teoriomnogościowych do odrzucenia jednego z założeń wystarcza logika klasyczna, w przypadku zaś antynomii semantycznych logika klasyczna zawodzi. Zbudowano jednakże logiki, w których nie obowiązują prawo wyłączonego środka bądź prawo nierównoważności sprzeczności, będące podstawą założeń przyjmowanych w antynomiach logicznych.

Bibliografia

Beth E.V. 1959: *The Foundations of Mathematics*. Amsterdam.

Malinowski G. 1990: *Logiki wielowartościowe*. Warszawa.

Żabski E. 1995: *Logiki nihilistyczne. Zarys problematyki*. Warszawa.