Andrzej Pelczar

Wybrane karty z polskiej historii równań różniczkowych

Prace Komisji Historii Nauki Polskiej Akademii Umiejętności 1, 23-38

1999

POLSKA AKADEMIA UMIEJĘTNOŚCI
Tom I PRACE KOMISJI HISTORII NAUKI 1999

Andrzej PELCZAR

WYBRANE KARTY Z POLSKIEJ HISTORII RÓWNAŃ RÓŻNICZKOWYCH

1. Wstęp

Spróbujmy najpierw powiedzieć, czy też przypomnieć, jakie związki ujmowane są przez równania różniczkowe, przede wszystkim przez tzw. równania różniczkowe zwyczajne. Przypomnijmy pojęcie pochodnej funkcji. Jeżeli mamy daną funkcję f określoną dla argumentów będących liczbami rzeczywistymi (z pewnego przedziału liczbowego, powiedzmy przedziału $I = (a,b)$), przyjmującą wartości rzeczywiste, to dla danego punktu ξ z tego przedziału możemy rozważać iloraz $(f(x)-f(\xi))/(x-\xi)$ (nazywany ilorazem różnicowym) dla x z przedziału I i różnych od ξ, oraz badać granicę tego ilorazu, gdy x zmierza do ξ. Jeżeli ta granica istnieje, to nazywamy ją pochodną (pierwszego rzędu) funkcji f w punkcie ξ i oznaczamy przez $f'(\xi)$ (lub – w notacji Leibniza – $df/dx(\xi)$); mówimy też wtedy, że funkcja f jest różniczkowalna w punkcie ξ. Pochodna, w interpretacji geometrycznej, przedstawia tangens kąta nachylenia stycznej do wykresu funkcji f w punkcie $(\xi,f(\xi))$, do „osi x", czyli osi zmiennej niezależnej. Ta interpretacja pozwala na stosunkowo proste opisanie geometryczne problemów wyrażanych równaniami różniczkowymi. Dla zrozumienia natomiast istoty zagadnień opisywanych najprostszymi równaniami różniczkowymi, wtedy gdy opisujemy ruch, potrzebna będzie interpretacja kinematyczna pochodnej. Otóż jeśli funkcja f określa położenie poruszającego się punktu materialnego, w zależności od czasu ($f(t)$ oznacza położenie w chwili t punktu, który w chwili początkowej 0 zajmował pozycję $f(0)$), a więc, jeżeli f opisuje *drogę* punktu, to $f'(t)$ jest jego *prędkością w chwili t*.

Najprostsze równania różniczkowe wiążą prędkość punktu poruszającego się według prawa danego tym równaniem z czasem, który upłynął od chwili początkowej do chwili, w której prędkość badamy oraz z pozycją tego punktu w tej chwili. Szukamy toru ruchu punktu poruszającego się według zadanego prawa. Opis sytuacji jest znacznie łatwiejszy, gdy – właśnie – napiszemy wszystko w postaci równania

$$y'(t) = F(t,y(t)), \tag{1}$$

gdzie F określa zależność wiążącą prędkość z czasem t i pozycją $y(t)$ (punktu) w czasie (chwili) t. Aby znaleźć poszukiwany tor (drogę), rozważanego punktu musimy znać jego położenie w ustalonej chwili początkowej, powiedzmy t^*, a więc rozważamy równanie (1) z warunkiem początkowym

$$y(t^*) = y^*. \tag{2}$$

Takie zagadnienie nazywa się *problemem początkowym Cauchy'ego*.

Geometrycznie zaś można sytuacje opisać tak. W pewnym obszarze na płaszczyźnie związano z każdym punktem kierunek (można sobie wyobrazić, z pewnym przybliżeniem, iż w każdym punkcie „zaczepiona" jest mała igiełka wskazująca kierunek ruchu). Chodzi o znalezienie takiej krzywej (wychodzącej z zadanego punktu początkowego), która w każdym punkcie przez który przechodzi jest styczna do tego zadanego – w tym punkcie – kierunku (jest styczna do tej, „zaczepionej" w tym punkcie igiełki).

Przedstawiony powyżej, z konieczności bardzo szkicowy, zarys intuicyjnych podstaw i geometrycznych interpretacji równań różniczkowych zwyczajnych (które, w przypadkach do tej chwili omawianych, były równaniami *pierwszego rzędu*, bo tylko *pochodne pierwszego rzędu* w nich występowały), wymaga uzupełnień wtedy, gdy mówimy o równaniach wyższych rzędów i równaniach o pochodnych cząstkowych. Przypomnijmy krótko, że *druga pochodna* to pochodna pierwszej pochodnej (w interpretacji fizycznej, jest to *przyspieszenie*, czyli prędkość zmian prędkości); w ten sposób możemy określić następnie *trzecią pochodną* jako pochodną drugiej pochodnej i ogólnie: *n-tą pochodną* jako pochodną (n–1)-szej pochodnej. Równanie, w którym występuje n-ta pochodna funkcji niewiadomej (lub, jak mówimy czasem: pochodna n-tego rzędu) jest równaniem n-tego rzędu. Jeśli mamy funkcję g dwóch zmiennych, która np. każdemu punktowi płaszczyzny o współrzędnych (u,w) przypisuje liczbę $g(u,w)$, to możemy badać ją „ze względu na każdą zmienną z osobna", to znaczy, ustaliwszy np. jakąś wartość, powiedzmy w^* pierwszej zmiennej badać funkcję – już teraz jednej zmiennej –

przyporządkowującą liczbie u liczbę $g(u,w^*)$. Jeżeli ta funkcja – jednej zmiennej – ma w jakimś punkcie u' pochodną, to mówimy, iż nasza wyjściowa funkcja g (dwóch zmiennych) ma w punkcie (u',w^*) *(pierwszą) pochodną cząstkową ze względu na pierwszą zmienną.* W „symetryczny" sposób definiuje się (pierwszą) pochodną cząstkową ze względu na drugą zmienną. Można też definiować pochodne cząstkowe wyższych rzędów. Równania, w których występują, jako funkcje niewiadome, funkcje wielu zmiennych i ich pochodne cząstkowe, nazywają się równaniami *różniczkowymi o pochodnych cząstkowych,* lub krótko *równaniami różniczkowymi cząstkowymi.* Wiele równań różniczkowych cząstkowych ma bardzo ważne interpretacje fizyczne; dają one odpowiedzi na pytania o opis przebiegu konkretnych procesów fizycznych, chemicznych, biologicznych (po zaproponowaniu stosownych modeli matematycznych dla tych procesów). Jako przykłady można wymienić klasyczne równania rozchodzenia się ciepła, równania drgań struny, równania rozkładów potencjałów różnego typu. Wracając do równań zwyczajnych warto przypomnieć o klasycznym równaniu drgań wahadła; jest to równanie drugiego rzędu. Na równaniach różniczkowych oparta jest teoria optymalnego sterowania, której sama nazwa wskazuje na ścisły związek z zastosowaniami (wśród których są zastosowania w projektowaniu i kierowaniu ruchami pojazdów kosmicznych).

Równania różniczkowe są więc dziedziną matematyki mającą bardzo ścisły związek z szeroko rozumianymi zastosowaniami matematyki. Impulsy do ich badania pochodzą z różnych źródeł spoza matematyki, a wyniki badań, bardzo nawet „abstrakcyjnych" problemów, mają wiele zastosowań bardzo „praktycznych".

Nic więc dziwnego, że teoria ta ma długą i ciekawą historię. Wkład w nią matematyki polskiej jest znaczący i wart szczegółowego oglądu.

Niniejszy szkic omawia wybrane rozdziały z polskiej historii równań różniczkowych zwyczajnych i cząstkowych rzędu pierwszego. Omówienie rozwoju równań cząstkowych wyższych rzędów wymaga znacznie więcej czasu i miejsca, a więc i osobnego opracowania.

2. Kilka uwag ogólnych

Już na przełomie wieków XVI i XVII badano takie zagadnienia, które w obecnie stosowanej formie zapisu sprowadzić byłoby można do równań różniczkowych. I tak np. Galileo Galilei (1564–1642) rozważał swobodne spadanie ciał przy założeniu braku oporu ośrodka, a René Descartes (1596–1630) badał pewne problemy optyki i doszedł do równania, które dziś zapisalibyśmy w postaci prostego równania liniowego postaci $y'=by$, gdzie b jest stałą liczbową. Takie równania liniowe były zresztą badane *de facto* jeszcze wcześniej przez Johna Napiera[1] (1550–1617) w związku z definiowaniem logarytmu (rozwiązaniami równań tego typu są funkcje wykładnicze, do których odwrotnymi są odpowiednie funkcje logarytmiczne); Napier nie stosował wtedy oczywiście (nie istniejącego wówczas) rachunku różniczkowego, nie mógł więc używać równań różniczkowych. Rzeczywisty początek historii równań różniczkowych trzeba datować na przełom wieków XVII i XVIII, uznając, iż podwaliny pod ich teorię dały dopiero badania Isaaca Newtona (1642–1727) i Gottfrieda Wilhelma Leibniza (1646–1718), prawdziwych twórców rachunku różniczkowego w naszym rozumieniu. Od Leibniza pochodzi prawie na pewno termin: *równanie różniczkowe*. Teorie budowano niejako „z kawałków", zajmując się rozwiązywaniem konkretnych zadań przy użyciu różnych metod, ze szczególnym uwzględnieniem szeregów potęgowych. Wiele badanych wówczas równań weszło do teorii pod nazwami pochodzącymi od nazwisk autorów najważniejszych wyników. Wymieńmy np. równania: Bernoulliego (od najstarszego z działających w XVII wieku braci, Jacoba Bernoulliego, żyjącego w latach 1654–1705), Riccatiego (1676–1754), Alexisa Claude'a Clairaut (1713–1765) i wreszcie Leonharda Eulera (1707–1783). Matematycy ci wnieśli do nauki ogromny wkład, którego tylko nieznacznymi częściami były wyniki badań nad równaniami, noszącymi dziś ich imiona. W szczególności L. Euler wszedł do historii nauki dzięki takim dokonaniom w matematyce i jej zastosowaniach oraz w fizyce, które miały ogromne znaczenie dla rozpoczynającego się już w XVII wieku budowania zrębów ogólnych teorii matematycznych, ujmujących coraz ogólniej i coraz bardziej systematycznie to, co poprzednio badano wyrywkowo. Badania te w odniesieniu do równań różniczkowych podjęto próbując, między innymi, ustalać pewne klasyfikacje równań, stawiając przy tym coraz ogólniejsze pytania dotyczące równań nie tylko zwyczajnych, ale i cząstkowych. Rozwój tych badań sprawił, że na przełomie XVIII i XIX stuleci, równania różniczkowe zaczynają się wyodrębniać z całości matematyki (dokładniej: z działu zwanego analizą matematyczną) stając się powoli osobną dziedziną. Regułą jest przy tym to, że są one bardzo mocno powiązane z fizyką. Przypomnijmy, że w wieku XVIII oraz w początkach wieku XIX, działali: Jean le Rond d'Alembert (1717–1783), Joseph Louis Lagrange (1736–1813), Pierre Simon Laplace (1749–1827), Johann Friedrich Pfaff (1765–1825), Jean-Baptiste Joseph Fourier (1768–1830), Gaspar Monge (1746–1818) i wreszcie „książę matematyków" Karl Friedrich Gauss (1777–1855). Nazwiska ich znaczą kolejne etapy rozwoju matematyki w ogóle, a teorii równań różniczkowych w szczególności. Przypomnijmy, że od

[1] Spotyka się inne formy pisowni jego nazwiska, m.in.: Neper, Nepier, Naper; stosujemy pisownię przyjętą w *Biographies Index* na internetowych stronach Department of Mathematics, Cambridge University (http:// www.dpmms.cam.ac.uk).

Fouriera pochodzi teoria szeregów trygonometrycznych, mająca fundamentalne znaczenie dla równań różniczkowych, a od Monge'a pierwsze obserwacje związane z geometrycznymi aspektami ich teorii. Wchodząc w wiek XIX matematyka dysponowała wieloma metodami rozwiązywania konkretnych równań różniczkowych i dość znacznie zawansowanymi narzędziami analitycznymi. Wprowadzono pewną klasyfikację równań. Brak było jednak podstawowych, ogólnych, precyzyjnie sformułowanych i ściśle udowodnionych twierdzeń o istnieniu i jednoznaczności rozwiązań; brak było generalnego ujęcia teorii. Brak było wreszcie jakościowego spojrzenia na wiele zagadnień, które takiego spojrzenia i ujęcia wymagały.

Przechodząc do tego, co przyniósł wiek XIX, zacytujmy najpierw fragment z pięknego eseju Lyna Arthura Steena[2]. „Matematyka dziewiętnastowieczna rozwijała się szybko w dwu pozornie przeciwstawnych kierunkach. Doskonaliła ona aparat rachunku różniczkowego i całkowego doprowadzając go do precyzyjnego systemu analizy matematycznej, która umożliwiła rozwój potężnych teorii fizyki matematycznej. Teorie te doprowadziły w końcu do mechaniki kwantowej i teorii względności, a w konsekwencji do głębokiego pojmowania podstawowych własności materii i przestrzeni. Jednocześnie jednak matematyka tego okresu, poprzez energiczne badania sensu rachunku różniczkowego i geometrii odkryła całe nowe światy matematyki w teoriach zbiorów nieskończonych i nieeuklidesowych geometrii; teorie te doprowadziły w końcu matematyków wieku XX do głębszego pojmowania podstaw swego własnego przedmiotu".

To co powiedziano wyżej w odniesieniu do całej matematyki można – *mutatis mutandis* – odnieść do jej części, do równań różniczkowych. Z jednej bowiem strony rozwijano (i doskonalono) metody rozwiązywania poszczególnych równań, zwracając uwagę na powiązania z fizyką i dostarczając jej coraz bardziej precyzyjnych narzędzi badawczych, z drugiej zaś starano się równocześnie stworzyć możliwie pełne i ścisłe fundamenty i zarysować ogólne ramy teorii, tak by doprowadzić do *głębszego pojmowania podstaw swego przedmiotu*. W związku z tym drugim nurtem zakończono w ostatnim ćwierćwieczu XIX stulecia prace nad sformułowaniem i udowodnieniem podstawowych twierdzeń o istnieniu i jednoznaczności rozwiązań, o regularnej zależności rozwiązań od warunków początkowych, o klasie regularności rozwiązań. Pierwsze, ważne etapy na tej drodze pokonano, dzięki pracom Augustina Louisa Cauchy'ego (1789–1857), który położył ogromne zasługi przy budowaniu podstaw całej analizy matematycznej. W teorii równań różniczkowych wprowadził najpierw precyzyjnie okre-

---

[2] L. A. Steen, *Matematyka dzisiaj*, [w:] *Matematyka współczesna. Dwanaście esejów*. Red. L. A. Steen, PWN Warszawa 1983, str. 13-24 (tłum. z: *Mathematics Today. Twelve Informal Essays*, ed. L. A. Steen, Springer Verlag, New York, Heidelberg, Berlin, 1978).

ślone pojęcie warunków początkowych (dlatego mówimy dziś o problemach początkowych Cauchy'ego), a następnie sformułował i udowodnił twierdzenie o istnieniu i jednoznaczności problemów typu (1)-(2) wspomnianych wyżej we wstępie, przy założeniu, że funkcja F z prawej strony równania (1) spełnia odpowiednie warunki regularności. Zastosował Cauchy metodę pochodzącą od Eulera (zwaną teraz *metodą łamanych Eulera*). Cauchy stosował też *metodę kolejnych przybliżeń*, którą potem doskonalono i stosowano do rozmaitych, bardzo ogólnych zagadnień. Metodę tę rozwijała później także krakowska szkoła Tadeusza Ważewskiego, o czym będzie mowa niżej. W roku 1890 Guiseppe Peano (1858–1932) opublikował dużą pracę[3] zawierającą dowód istnienia rozwiązań problemów typu (1)-(2) przy założeniu – tylko – ciągłości funkcji F, co istotnie wzmacniało twierdzenie Cauchy'ego (który zakładał o F znacznie więcej), a równocześnie i dowód jednoznaczności rozwiązań przy założeniu większej regularności funkcji F. Można uznać, iż praca ta kończy pewien etap budowy podstaw teorii równań różniczkowych.

W ostatniej ćwierci wieku XIX nastąpił też inny punkt zwrotny w historii równań różniczkowych. W czasie, gdy –jak to powiedziano wyżej –kończono badania dotyczące podstaw teorii i konstruowania analitycznych metod rozwiązywania równań, rozpoczęto budowanie tzw. *jakościowej teorii równań różniczkowych.* Na jej gruncie powstała potem *teoria układów dynamicznych.* Jakościowa teoria równań różniczkowych obejmuje problemy związane z własnościami rozwiązań i zbiorów rozwiązań, których możemy nie mieć zapisanych *explicité* w postaci konkretnych wzorów, przy założeniu, że „prawe strony" badanych równań czynią zadość pewnym warunkom. Chodzi więc o to, by odpowiedzieć na pytania o pewne własności rozwiązań, wiedząc, że funkcje określające rozważane równania (w przypadku równania (1), jest to funkcja F) mają znane nam własności, lecz nie mając wcale zagwarantowanej efektywnej rozwiązywalności badanych równań ani tym bardziej efektywnej postaci rozwiązań. Pytanie o zachowanie się rozwiązań równań zwyczajnych, gdy argument, interpretowany jako czas, *dąży do nieskończoności* (czyli *rośnie nieograniczenie*) postawił chyba pierwszy precyzyjnie Henri Poincaré (1854–1912); od niego pochodzi ważne pojęcie *cyklu granicznego.* Podstawowe pojęcia *stabilności* wprowadził Aleksander Michajłowicz Lapunow (1857–1918) i zapoczątkował całą teorię. Chodzi w niej o to, czy małe zmiany na początku badanego procesu (małe zmiany warunków początkowych) skutkują dużymi, czy też małymi zmianami gdy czas rośnie nieograniczenie. Zagadnienia te mają swe łatwe do przewidzenia odniesienia do różnych problemów technicznych i przyrodniczych. Jakościowa teorii

[3] G. Peano, *Démonstration de lintégrabilité des équations différentielles ordinaires,* Math. Ann., 37 (890), 182-228.

równań różniczkowych zawiera też stosowanie metod topologicznych, pochodzące m.in. od Tadeusza Ważewskiego i wiele innych zagadnień.

Badając rozwój równań różniczkowych w Polsce można dostrzec pewne analogie między ich historią „w ogóle" i jej częścią polską począwszy od połowy XIX wieku.

3. Początki równań różniczkowych na ziemiach polskich

Trudno ustalić z całą pewnością, kto pierwszy, z zajmujących się matematyką i fizyką w Polsce, z całą świadomością i znajomością przedmiotu, objął swą działalnością dydaktyczną lub wydawniczą, względnie naukową, tematykę równań różniczkowych. Należy przyjąć, że ci którzy zetknęli się z analizą matematyczną w ogóle, musieli wcześniej czy później zająć się także – choćby fragmentarycznie – równaniami różniczkowymi, jako jednym z jej zaawansowanych działów. I tak np. można przypuszczać, że równania różniczkowe pojawiły się (*explicité* lub *implicite*) na wykładach Józefa Jakubowskiego (1743–1814), wykładowcy matematyki w warszawskim Korpusie Kadetów. W roku 1771 ukazała się przetłumaczona przez Jakubowskiego na język polski książka Etienne Bézouta (1730–1783)[4]. W części III tej książki są podane elementy analizy (prawdopodobnie po raz pierwszy w języku polskim). Od Jakubowskiego pochodzą polskie terminy: *różniczka, całka, rachunek różniczkowy, rachunek całkowy.*[5] Można też przypuszczać, że równania różniczkowe nie były obce Janowi Michałowi Hube'mu (1737–1807), który w latach 1782–1794 był dyrektorem Korpusu Kadetów. Na przełomie wieków XVIII i XIX wykładał matematykę na Uniwersytecie Wileńskim Franciszek Milikont Narwojsz (1742–1819). Program jego wykładów zamieszczony w książce J. Dianni i A. Wachułki[6] wskazuje na to, iż równania różniczkowe „miały szansę" (a może nawet powinny były) pojawić się w trakcie tych wykładów, co najmniej *implicite.* Na pewno chyba pojawiły się one w wykładach Zachariasza Niemczewskiego (1766–1820) w początkach XIX wieku, także na Uniwersytecie Wileńskim. Wykładał on algebrę i rachunek różniczkowy, m.in. na podstawie przetłumaczonego przez siebie francuskiego podręcznika (którego autorem był Sylvestre Francoise Lacroix (1765–1843)), a w programie były między innymi *„zrówanania różnicowe"*. Wiadomo, że równania różniczkowe, w tym także cząstkowe, znalazły swe miejsce w wy-

---

[4] *Nauka matematyki do użycia artyleryi francuskiey napisana przez p.Bézout, a dla pożytku pospolitego osobliwie dla korpusu artyleryi narodowey na język polski przełożona....*

[5] Termin *pochodna* jest autorstwa Jana Śniadeckiego.

[6] J. Dianni, A. Wachułka, *Tysiąc lat polskiej myśli* matematycznej, PZWS, Warszawa 1963.

kładach Augustyna Frączkiewicza (1789–1883) na Uniwersytecie Warszawskim. Przedstawiał on m.in. teorię Pfaffa równań cząstkowych pierwszego rzędu, a więc można powiedzieć, iż jego wykłady dotyczyły także i najnowszych wówczas osiągnięć w zakresie równań różniczkowych. Nie zajmował się jednak nimi jako badacz. Dodajmy jako ciekawostkę, że Frączkiewicz był uczniem Karola Hube'go (1766–1845), syna Michała, o którym była mowa wyżej; Karol Hube, absolwent Korpusu Kadetów i uniwersytetu w Tybindze, był od roku 1810 profesorem Uniwersytetu Krakowskiego, na którym działał bardzo owocnie. Wspomniani powyżej, przykładowo i dość wyrywkowo, matematycy polscy, którzy zajmowali się (lub mogli się zajmować) równaniami różniczkowymi, nie koncentrowali się jednak na pewno na ich teorii jako przedmiocie swych badań naukowych (o ile w ogóle badania naukowe podejmowali...).

W pierwszych latach XIX wieku działał chyba tylko jeden polski uczony, którego nazwisko weszło (nie bez opóźnień zresztą) na trwałe do matematyki, w tym i do teorii równań różniczkowych. Był nim Józef Hoene-Wroński (1776–1853), jednostka wybitna, o fascynującym, dramatycznym życiorysie i szerokich, niekonwencjonalnych zainteresowaniach i poglądach filozoficznych. Przybliżeniu dzieła Hoene-Wrońskiego poświęcił wiele uwagi i wysiłku Samuel Dickstein (1851–1939), starając się ułatwić odbiór ważnych rezultatów zapisywanych przez Hoene-Wrońskiego w sposób zawikłany (zwłaszcza dla współczesnego czytelnika). W teorii liniowych równań różniczkowych używa się *wyznaczników* pewnych *macierzy*; wyznaczniki te grają kluczową rolę i nazywają się teraz *wronskianami*.

Osiągnięcia Hoene-Wrońskiego były ogromnej wagi, ale były dokonane w Paryżu, gdzie przebywał od roku 1800, i nie zmieniały obrazu ogólnie bardzo niskiego poziomu badań naukowych (czy też ich braku) w zakresie matematyki na ziemiach polskich w początkach XIX wieku. Dotyczy to w szczególności równań różniczkowych. Dlatego też początków ich historii w Polsce należy szukać – jeśli się przyjmie, że ma być ona związana z badaniami naukowymi – dopiero pod koniec XIX wieku. Oznacza to, że niemal sto lat musiało upłynąć od czasu pierwszego zapoznawania się z podstawami teorii, w niektórych przynajmniej ośrodkach na ziemiach polskich, do rozpoczęcia prawdziwych badań. Tak duże opóźnienie wynikało z ogólnej sytuacji kraju i wynikającej z niej sytuacji edukacji w ogóle, a uczelni wyższych w szczególności. Działalność Komisji Edukacji Narodowej miała swe długofalowe skutki także dla matematyki. Zahamowano regres Akademii Krakowskiej i dokonano podstawowych reform, troska o właściwe podręczniki znalazła odbicie w wydawaniu tłumaczeń dobrych książek pisanych przez wybitnych specjalistów europejskich i stymulowaniu polskich autorów; są to fakty dobrze znane. Ogromne zasługi dla tego dzieła położył – jak wiadomo – Jan Śniadecki (1756–1830). Przywiązywał wielką wagę do kształcenia w zakresie matematyki, astronomii i nauk przyrodniczych. Pierwszy w Polsce docenił wagę rachunku prawdopodobieństwa. Od jego czasów były na Uniwersytecie Krakowskim dwie katedry matematyki. Zaczęto próbować odrabiać zacofanie w naukach ścisłych i przyrodniczych. Niestety polityczny upadek kraju spowodował kolejny zastój, a nawet regres w nauce polskiej. Dotyczyć to musiało także matematyki, a więc i dopiero co „dotkniętych" przez polskich matematyków równań różniczkowych. Na szczęście jednak ten regres nie był tak głęboki, jak w okresie przed reformą kołłątajowską, która zostawiła trwały ślad i umożliwiła start z wyższego niż przed nią pułapu, gdy sytuacja zaczęła się poprawiać, głównie dzięki zwiększaniu się liczby coraz wybitniejszych jednostek wśród profesorów uniwersyteckich.

4. Równania różniczkowe na tle matematyki polskiej w XIX wieku

Przypomniawszy sytuację w jakiej znajdowała się matematyka (wraz z całą nauką) w Polsce na początku XIX wieku, przejdźmy od razu do jego drugiej połowy, a nawet do końcowego 30-lecia, gdyż z punktu widzenia niniejszego opracowania niczego specjalnie interesującego nie można odnotować w odniesieniu do lat wcześniejszych. Można powiedzieć, że w tym okresie były cztery ośrodki polskiej myśli matematycznej: Warszawa, Kraków, Lwów i... Paryż.

Zdzisław Opial pisze[7]: „Kapitalne znaczenie w dziejach matematyki w Polsce miał bez wątpienia krótki żywot w latach 1862–1869 Szkoły Głównej w Warszawie. Uczelni tej udało się w ciągu kilku zaledwie lat zaszczepić nowemu pokoleniu młodzieży polskiej szczere zamiłowanie do nauk przyrodniczych i nie przemijający zapał do pracy społecznej". Swe podstawowe wykształcenie matematyczne zawdzięczają tej właśnie Szkole, m.in. wspomniany już Samuel Dickstein (który magisterium robił już jednak w rosyjskim Uniwersytecie Warszawskim w roku 1876) oraz Władysław Gosiewski (1844–1911) i Marian Baraniecki (1848–1895); byli oni też społecznikami, o których zapale mówi powyższy cytat. Społecznikowski zapał Dicksteina przejawiał się m.in. w tym, że prowadził w założonych przez siebie i braci fizyków, Władysława i Edwarda Natansonów, *Wiadomościach Matematyczno-Fizycznych* dział przeglądów i recenzji prac matematycznych; jego zasługi w tym zakresie są nie do przecenienia; dotyczy to w bardzo dużym stopniu literatury z równań różniczkowych. Dzięki

[7] Z. Opial *Zarys dziejów matematyki w Uniwersytecie Jagiellońskim w drugiej połowie XIX wieku*, [w:] *Studia z dziejów katedr Wydziału Matematyki, Fizyki, Chemii Uniwersytetu Jagiellońskiego*, red. S. Gołąb, Kraków 1964, 59-74.

działaniom m.in. tych trzech matematyków powstały podwaliny pod przyszły ośrodek matematyki warszawskiej.

Najwybitniejszym matematykiem działającym w Krakowie (jeśli chodzi o pozycję naukową, to trzeba powiedzieć – najwybitniejszym matematykiem na ziemiach polskich w owym czasie) był Franciszek Karol Józef Mertens (1840–1929). Objął stanowisko profesorskie w Krakowie w roku 1864, by po dziewiętnastu latach przenieść się do Grazu, a potem do Wiednia. Był wybitnym specjalistą w analitycznej teorii liczb; napisał jedną pracę z teorii równań różniczkowych, ale to był margines jego zainteresowań naukowych. Na miejsce Mertensa przyszedł z Warszawy, w roku 1885, wspomniany już Baraniecki; jego oryginalna twórczość była skromna; miał zasługi wydawnicze i popularyzatorskie oraz pedagogiczne. Jego najwybitniejszym uczniem był Stanisław Kępiński (1867–1908). Studiował w Krakowie w latach 1885–1889, a w dwa lata później doktoryzował się na podstawie rozprawy o równaniach różniczkowych drugiego rzędu. W roku 1896, po śmierci Baranieckiego, został profesorem nadzwyczajnym, by w roku 1899 przenieść się na Politechnikę Lwowską. Kępiński zajmował się przede wszystkim równaniami różniczkowymi (m.in. kontynuował prace nad tematyką rozprawy doktorskiej) i funkcjami analitycznymi. Jego działalność naukowa oznaczała w Krakowie – znowu, po przerwie spowodowanej odejściem Mertensa – powiew matematyki europejskiej, gdyż był on pod wpływem Felixa Christiana Kleina (1844–1925), wybitnego matematyka, znanego przede wszystkim z badań nad geometriami nieeuklidesowymi i związkami geometrii z teorią grup, u którego studiował, jako stypendysta, w Getyndze. Już we Lwowie Kępiński napisał bardzo dobry podręcznik z równań różniczkowych[8]. W roku 1895 rozpoczął pracę na Uniwersytecie Jagiellońskim Kazimierz Paulin Żorawski, najpierw jako profesor nadzwyczajny, a od roku 1898 profesor zwyczajny; będzie jeszcze o nim mowa w dalszym ciągu.

We Lwowie były dwie dobre uczelnie: Uniwersytet i Szkoła Politechniczna. Wiemy już, że od roku 1899 pracował we Lwowie Stanisław Kępiński. Wielkiej działalności naukowej tam nie rozwinął; bywał obciążany obowiązkami dziekańskimi i rektorskimi. Wcześniej, pierwszym z liczących się matematyków, w kształtującym się na nowo w XIX wieku naukowym środowisku Lwowa, był profesor Uniwersytetu i Szkoły Politechnicznej,

---

[8] S. Kępiński, *Podręcznik równań różniczkowych ze szczególnym uwzględnieniem potrzeb techników i fizyków;* cz.I. *Równania różniczkowe zwyczajne,* cz. II. *Równania różniczkowe cząstkowe,* Lwów 1907.

[9] W klasztorze fundacji Puzynów więzieni byli na przełomie lat 1939 i 1940 polscy oficerowie (por.: A. Płoski, *O dziele Józefa Puzyny „Teorya Funkcyj Analitycznych"*, [w:] *Matematyka XIX wieku,* Materiały z II Ogólnopolskiej Szkoły Historii Matematyki, red. S. Fudali, Szczecin 1988, 237-244).

niezły badacz i konstruktor „przyrządów matematycznych", Wawrzyniec Żmurko (1824–1889). Jednym z jego uczniów, na pewno najwybitniejszym, był Józef Puzyna (1856–1919), z kniaziowskiego rodu; jego członkowie „pisali się z Kozielska"[9]. Był wybitnym specjalistą w zakresie funkcji analitycznych, ale napisał też pracę z teorii równań różniczkowych (powstałą w powiązaniu z jego głównym nurtem zainteresowań). Od roku 1872 działał we Lwowie Władysław Zajączkowski (1837–1898), który studiował w Krakowie i najpierw tu wykładał (jako docent prywatny w latach 1862–1864), a potem był w Warszawie. Zajmował się twórczo równaniami różniczkowymi i był autorem kilku dość ważnych prac. Napisał też obszerny podręcznik z tej teorii, który właściwie zasługuje na osobne omówienie przekraczające ramy niniejszego opracowania. Podręcznik ten wydany został w Paryżu, w roku 1877, *nakładem* – jak czytamy – *właściciela Biblioteki Kórnickiej, Przewodniczącego w Towarzystwach Naukowej Pomocy i Nauk Ścisłych w Paryżu* [czyli Jana Działyńskiego].

W Paryżu nie było oczywiście żadnej polskiej szkoły matematycznej, ale stał się on ośrodkiem skupiającym ludzi, których działalność przyniosła doniosłe owoce dla całej nauki polskiej, przede wszystkim zaś dla nauk ścisłych, a dla matematyki w szczególności. W latach 1870–1882 działało tam z inicjatywy i przy finansowym poparciu Jana Działyńskiego, Towarzystwo Nauk Ścisłych (Władysław Folkierski, Władysław Gosiewski, Edward Habich, Władysław Kretkowski, Grakh Niewęgłowski, Adolf Sągajło i inni). Wydawano *Pamiętnik Towarzystwa Nauk Ścisłych* i patronowano wydawaniu książek; o jednej z nich, z równań różniczkowych była mowa wyżej. Trudno tu przecenić rolę Jana Działyńskiego, zarówno inspiracyjną i organizacyjną, jak i finansową.

Oprócz wspomnianych wyżej matematyków, którzy mieli swój udział w rozwoju równań różniczkowych i działali w ośrodkach akademickich, na uwagę zasługuje sylwetka Jana Władysława Stodółkiewicza (1856–1934). Był on nauczycielem płockich szkół średnich. Napisał wiele prac z równań różniczkowych zwyczajnych (niemal wyłącznie liniowych) oraz cząstkowych pierwszego rzędu, głównie o charakterze przyczynkowym. Wydał też książkę, którą można uznać za zbiór zadań z równań różniczkowych. Prace jego mieszczą się w nurcie badań szczegółowych bardzo specjalnych równań, można powiedzieć – specjalnych przykładów (teraz powiedzielibyśmy, iż było to rozwiązywanie szczegółowych zadań). Podobny charakter miało wiele prac innych matematyków zajmujących się tą tematyką (z tym, że nie dostarczały one tak jaskrawych przykładów tego rodzaju). Na prace syntetyczne i ogólne, na istotny wkład do teorii w wydaniu matematyki polskiej, trzeba było poczekać jeszcze kilkadziesiąt lat; w tym sensie można uznać, że polska historia równań różniczkowych ma elementy analogiczne do ich „historii w ogóle".

Próbując ująć ogólnie, to co powiedziano na temat kształtowania się polskich ośrodków matematycznych w XIX wieku, można stwierdzić, iż pomimo zahamowania – a nawet początkowego cofnięcia się – procesu rozwojowego w pierwszej połowie tego stulecia, uparta praca coraz szerszego grona uczonych i pedagogów doprowadziła do tego, że w ostatnich jego dziesięcioleciach działały (i wzmacniały się) centra matematyczne w Warszawie, Krakowie i we Lwowie. Istniał też ośrodek w Wilnie (osłabiony jednak w porównaniu do poprzednich okresów). Działało specyficzne środowisko paryskie. Były czasopisma matematyczne. Wydawano podręczniki. Zrobiono też pewne istotne kroki organizacyjne, takie jak utworzenie w roku 1874 Seminarium Matematycznego na Uniwersytecie Jagiellońskim. Były wreszcie początki nowoczesnych badań i pewne wyniki (przede wszystkim Mertensa, także Puzyny oraz – w ostatnim pięcioleciu XIX wieku – Żorawskiego; w zakresie równań różniczkowych najważniejsze były wyniki Zajączkowskiego, ale nie miały one tej rangi co np. rezultaty Martensa z teorii liczb).

5. Pierwsza połowa XX wieku

Powiedziano już, że w roku 1895 przybył do Krakowa (ze Lwowa, co warto tu podkreślić) Kazimierz Paulin Żorawski (1866–1953), który trzy lata wcześniej, po studiach w Lipsku i Getyndze, doktoryzował się pod kierunkiem wybitnego matematyka norweskiego, pracującego wówczas w Getyndze, Mariusa Sophusa Lie (1842–1899), który był m.in. twórcą teorii grup ciągłych, zwanych teraz *grupami Lie'go*. Żorawski kierował jedną z dwóch katedr matematyki na Uniwersytecie Jagiellońskim do roku 1919, kiedy to przeniósł się do Warszawy. Druga katedrę (przypomnieć tu wypada, że dwie katedry istniały od czasów Śniadeckiego) objął w roku 1900 Stanisław Zaremba (1863–1942), absolwent studiów technicznych w Petersburgu (dyplom inżynierski w roku 1886), doktor matematyki Uniwersytetu Paryskiego (z roku 1889), mieszkający i pracujący we Francji do roku 1899. Dłuższy pobyt we Francji zostawił na sylwetce naukowej Zaremby wyraźny ślad. Współpracował m.in. z tak wybitnymi specjalistami z teorii równań różniczkowych cząstkowych jak Eduard Jean-Baptiste Goursat (1858–1936) i Paul Painlevé (1863–1933) i sam stał się powszechnie uznanym specjalistą w tej dziedzinie. Rozpoczęcie działalności na Uniwersytecie Jagiellońskim przez Żorawskiego i Zarembę, matematyków, o formacjach ukształtowanych w ośrodkach zaliczanych wówczas do najważniejszych, oznaczało, dla Krakowa i dla ziem polskich, początek systematycznego uprawiania matematyki nowoczesnej w sensie adekwatnym dla przełomu wieków XIX i XX (i początku obecnego stulecia). Był to początek systematycznego prowadzenia badań i uzyskiwania wyników liczących się w świecie. Wysoką ocenę wyników Zaremby potwierdzają wypowiedzi znakomitych uczonych jemu współczesnych, ale także całkiem nowe odniesienia do jego wyników dotyczących zastosowań równań różniczkowych w teorii „lepkosprężystości" (*visco-elestaticity*) w wydanej w roku 1965 encyklopedii fizyki[10]. W omawianej tutaj dziedzinie, równaniach różniczkowych zwyczajnych, więcej do powiedzenia miał i więcej zainteresowania okazywał, Kazimierz Żorawski. Jest on autorem ważnych prac dotyczących przekształcania pewnych równań, w taki sposób, że po przekształceniu mają prostszą postać i można je rozwiązać, lub łatwiej udowodnić istnienie rozwiązań. Część jego wyników antycypowała to, co po latach objęto teorią układów dynamicznych. Władysław Ślebodziński (1884–1972) pisze tak[11]: „Można zdaje się powiedzieć, że z wystąpieniem tych dwóch wybitnych uczonych matematyka polska przestała być wyłącznie konsumentem cudzych myśli i cudzych wyników i że rozpoczął się od tej chwili jej czynny i twórczy udział w rozwoju tej nauki". Żaden z tych wielkich uczonych nie stworzył, co prawda, szkoły naukowej w klasycznym, wąskim rozumieniu tego terminu, ale obaj stworzyli chyba coś więcej – prawdziwe, mocne, środowisko naukowe. Ich uczniowie (których w dużej części można uważać za ich **wspólnych** uczniów) stworzyli już „klasyczne" szkoły naukowe. I tak, Franciszek Leja (1885–1979), którego rozprawa doktorska u Żorawskiego dotyczyła tematyki równań różniczkowych, stworzył szkołę funkcji analitycznych; Antoni Hoborski (1879–1940) i jego uczeń (ale także i uczeń Zaremby) Stanisław Gołąb (1902–1980) byli twórcami szkoły geometrii różniczkowej, a najwybitniejszy uczeń Zaremby, wspominany już poprzednio Tadeusz Ważewski (1896–1972) zbudował szkołę naukową nazywaną przez specjalistów *Krakowską Szkołą Równań Różniczkowych.* Zanim omówimy szerzej jego działalność wspomnijmy jeszcze, że zarówno Hoborski jak i Gołąb napisali pewne prace z teorii równań różniczkowych, ale było to na marginesie ich zainteresowań geometrią różniczkową (oraz w wypadku Gołąba – także i równaniami funkcyjnymi). Również epizodycznie raczej zajmował się równaniami różniczkowymi Alfred Rosenblatt (1880–1947), pierwszy – i jedyny wówczas, w pierwszym dwudziestoleciu naszego stulecia – asystent w Seminarium Matematycznym UJ. Miał on na swym koncie prace z równań zwyczajnych i cząstkowych rzędu pierwszego.

Tadeusz Ważewski rozpoczął, po ukończeniu liceum w Tarnowie, studia

[10] C. Truesdell, W. Noll, *The Non-Linear Field Theories of Mechanics*, [w:] *Encyclopedia of Physics/Handbuch der Physik*, red. S. Flüge, tom III, część 3, Springer Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1963,

[11] W. Ślebodziński, *Kazimierz Żorawski*, [w:] *Studia z dziejów katedr Wydziału Matematyki, Fizyki, Chemii Uniwersytetu Jagiellońskiego*, red. S. Gołąb, Kraków 1964, 87-101.

fizyczne na Uniwersytecie Jagiellońskim w roku 1914, a następnie skierował swe zainteresowania ku matematyce i studiował pod kierunkiem Stanisława Zaremby. Początkowo interesował się topologią i teorią mnogości (i tej tematyki dotyczą jego pierwsze prace). W latach 1921–1923 studiował w Paryżu i tam uzyskał doktorat (na podstawie rozprawy o tzw. *dendrytach* czyli kontinuach spójnych i nie zawierających żadnej krzywej zamkniętej); członkami komisji egzaminacyjnej byli wybitni uczeni: Arnaud Denjoy[12] (1884–1974), Émile Borel (1871–1956) i Paul Montel (1876–1975). Praca o kontinuach prostowalnych przyniosła Ważewskiemu habilitację na UJ w roku 1927. W roku 1933 został Ważewski profesorem nadzwyczajnym. Aresztowany 6 XI 1939 roku w ramach „Sonderaktion Krakau" został osadzony wraz z innymi profesorami w obozie koncentracyjnym w Sachsenhausen. Po powrocie do Krakowa włączył się w działalność tajnego uniwersytetu. Jego uczniami tego okresu byli m.in. Jacek Szarski (1921–1980) i Jan Mikusiński (1913–1987). W roku 1954 został Ważewski profesorem zwyczajnym. Był członkiem korespondentem PAU; po powstaniu PAN został jej członkiem korespondentem, a w roku 1957 członkiem zwyczajnym. Był prezesem Polskiego Towarzystwa Matematycznego, które w roku 1967 nadało mu godność swego członka honorowego; w tym samym roku UJ nadał mu doktorat honoris causa. Po początkowym okresie zainteresowań topologią i teorią mnogości, zaczął Ważewski koncentrować swe zainteresowania na równaniach różniczkowych i w tej dziedzinie uzyskał najbardziej znane rezultaty. Nie mogąc omawiać ich wszystkich, wspomnijmy o wybranych. W serii prac z lat trzydziestych podał Ważewski bardzo ważne twierdzenia o istnieniu i jednoznaczności rozwiązań problemów Cauchy'ego dla równań cząstkowych pierwszego rzędu i o oszacowaniach obszarów istnienia tych rozwiązań. Szczególne znaczenie mają te właśnie wyniki o oszacowaniach obszarów istnienia, gdyż podają **oszacowania najlepsze** (nie można zagwarantować istnienia w obszarach większych). Najbardziej znane, klasyczne już teraz, wyniki Ważewskiego dotyczą zastosowań metod topologicznych w równaniach różniczkowych. Podstawowe twierdzenie, zwane w literaturze *Twierdzeniem Retraktowym Ważewskiego* mówi o tym, że z pewnych założeń o zachowaniu się rozwiązań na brzegu ustalonego zbioru, można wnioskować o istnieniu pewnego rozwiązania, które się w tym zbiorze zawiera („nie wychodzi z tego zbioru"). Jest to wynik piękny przez prostotę sformułowania, głębokość treści matematycznej, jasną ideę dowodu (który w najprostszych przypadkach „sam się narzuca" jako intuicyjnie bardzo klarowny, a w przypadku ogólnym wymaga pomysłowego zastosowania zaawan-

[12] Do jego nauczycieli należał m.in. Paul Painlevé, z którym – jak to powiedziano wyżej – współpracował wcześniej krakowski mistrz Ważewskiego, Stanisław Zaremba.

sowanego aparatu topologicznego) oraz niebanalne zastosowania. Metoda dowodu tego twierdzenia, nazywana w literaturze *metodą topologiczną Ważewskiego* stała się podstawą do bardzo istotnych uogólnień, które pozwoliły na zastosowanie aparatu topologii algebraicznej, rozwijanego nadal intensywnie, w teorii równań różniczkowych i układów dynamicznych. Cieszy to, że w tej dziedzinie mają dużo do powiedzenia młodzi matematycy krakowscy, „wnukowie" i „prawnukowie" naukowi Tadeusza Ważewskiego. Te wyniki Ważewskiego otwarły nowy rozdział w jakościowej teorii równań różniczkowych. Miał też Ważewski swój udział w budowaniu podstaw teorii sterowania, gdy w latach pięćdziesiątych zauważył, iż prace z lat trzydziestych Stanisława Krystyna Zaremby[13] (1903–1990), syna Stanisława Zaremby (a także prace matematyka francuskiego André Marchauda), o pewnych uogólnieniach równań różniczkowych, mogą, po stosownym przeformułowaniu, dać podstawowe twierdzenia o istnieniu tzw. *trajektorii optymalnych*. Obecnie ta tematyka wchodzi także w zakres teorii *inkluzji różniczkowych*. Ważewski stworzył – jak to już powiedziano – szkołę naukową, której uczestnicy kontynuowali badania Mistrza i poszerzali, nieraz bardzo znacznie, tematykę. Jacek Szarski stał się współtwórcą teorii nierówności różniczkowych; poszedł drogą zaczętą przez Ważewskiego, by stać się następnie wybitnym specjalistą, autorem pierwszej monografii z tej dziedziny; miał też bardzo ważny udział w rozwoju ogólnej teorii równań różniczkowych cząstkowych rzędu pierwszego typu parabolicznego. Zdzisław Opial (1930–1974) w swym bogatym dorobku zawarł wyniki z wielu działów równań i nierówności różniczkowych. O wadze jego wyników świadczy np. to, że ukazała się książka poświęcona **jednej** pracy Opiala i pracom do niej nawiązujących[14]. Włodzimierz Mlak (1931–1994) zajmował się m.in. równaniami w przestrzeniach Banacha, nieskończonymi układami nierówności i równań różniczkowych (niezależnie od innych zagadnień spoza teorii równań różniczkowych). Zofia Mikołajska-Mlakowa (1923–1993) miała swój udział w rozwoju teorii optymalnego sterowania i inkluzji różniczkowych nazywanych przez Ważewskiego *równaniami orientorowymi*; bardzo ważne wyniki w tej dziedzinie należą do Andrzeja (w zakonie Benedyktynów – Bernarda) Turowicza OSB (1904–1989), a także Zdzisława Opiala i Zbigniewa Kowalskiego (1924–1992). Tematyka ta była też uprawiana przez Czesława Olecha, Andrzeja Lasotę,

[13] S. K. Zaremba po studiach w Krakowie był docentem na USB w Wilnie; po wojnie mieszkał w Kanadzie i Walii (gdzie umarł). Zajmował się wieloma dziedzinami matematyki, w szczególności rachunkiem prawdopodobieństwa i statystyką, a także – w początkowym okresie swej kariery naukowej – równaniami różniczkowymi. Był wybitnym taternikiem, alpinistą, himalaistą i andystą.

[14] R. P. Agarwal, P. Y. H. Pang, *Opial Inequalities with Applications in Differential and Difference Equations*, Kluwer, Dordrecht-Boston-London, 1995.

których wyniki z tej i wielu innych dziedzin równań różniczkowych weszły na stałe do literatury matematycznej. Andrzej Pliś (1929–1991) miał wielki udział w rozwoju teorii równań cząstkowych pierwszego rzędu; od niego pochodzi pojęcie *wstęgi charakterystycznej drugiego rzędu*. Pliś był autorem zaskakujących przykładów pokazujących, że pewne założenia w klasycznych twierdzeniach są niezbędne. Tadeusz Ważewski i jego uczniowie zajmowali się też *metodą kolejnych przybliżeń;* kilka wyników z tego zakresu należy do klasycznych już rezultatów teorii. Wspomniany wyżej Jan Mikusiński, który po krótkim pobycie w Krakowie pracował w Poznaniu i na Śląsku, był autorem teorii zwanej teraz *teorią operatorów Mikusińskiego*, mającej duże zastosowanie w teorii równań różniczkowych (i ich zastosowań).

Lista matematyków polskich, zajmujących się bardzo żywo rozwijającą się w XX wieku teorią równań różniczkowych, a także lista tematów – przedstawione wyżej – są bardzo dalekie od kompletności. Nie ma miejsca na omówienie wyników matematyków lubelskiej szkoły doktoranta Ważewskiego, Adama Bieleckiego (m.in. Jan Kisyński i Kazimierz Goebel), oraz ośrodka poznańskiego, w którym Władysław Orlicz (1903–1990), wywodzący się ze szkoły lwowskiej, stworzył szkołę analizy funkcjonalnej. W drugiej połowie bieżącego stulecia Poznań stał się też ważnym ośrodkiem równań różniczkowych. Sam Orlicz równaniami zajmował się okazjonalnie; wraz z Andrzejem Alexiewiczem (1917–1996) udowodnił ciekawe twierdzenie mówiące o wyjątkowości pewnych własności równań różniczkowych. W latach 50-tych przybywało ośrodków badających omawiane tu równania zwyczajne (przede wszystkim: Warszawa, a także m.in. Gdańsk, Wrocław, Toruń, Zielona Góra).

Skoncentrowałem się na przedstawieniu szkoły krakowskiej ze względu na to, iż w pierwszej połowie bieżącego stulecia był to główny ośrodek rozwijający badania w zakresie równań i nierówności różniczkowych zwyczajnych i cząstkowych rzędu pierwszego na najwyższym poziomie, w skali nie tylko ogólnopolskiej ale i światowej. Kończąc nasze rozważania na połowie XX wieku, możemy więc w zasadzie i w pewnym uproszczeniu, ograniczyć je – w odniesieniu do pierwszego pięćdziesięciolecia kończącego się wieku – właśnie do szkoły krakowskiej.

Opracowanie niniejsze oparte jest na maszynopisie pracy autora *Polska historia równań różniczkowych zwyczajnych i równań różniczkowych cząstkowych pierwszego rzędu* i na artykule *Matematyka w Polsce u początków PTM (i nieco wcześniej)* opublikowanym w „Wiadomościach Matematycznych", t. XXI. (1996), str. 138-115. Oprócz literatury cytowanej w opracowaniu korzystano też z literatury cytowanej w tych dwóch pracach.