Mirosław Dąbrowski

Analiza uczniowskich błędów – narzędzie polityki edukacyjnej kraju?

Problemy Wczesnej Edukacji/Issues in Early Education 10/3(26), 77-92

2014

PROBLEMY WCZESNEJ EDUKACJI / ISSUES IN EARLY EDUCATION ISSN 1734-1582
3 (26) / 2014

Mirosław Dąbrowski
Uniwersytet Warszawski
mirekd@mimuw.edu.pl

Analiza uczniowskich błędów – narzędzie polityki edukacyjnej kraju?

Summary

Error analysis – a tool used in state educational policy?

Error analysis has been in use as a tool of improving the mathematics teaching – learning process since the 30s of the last century. In Poland, however, this method of developing mathematics teachers' skills has been shown some interest since not earlier than 30 years ago. Moreover, it doesn't seem to be in common use nowadays. Meanwhile, with the growing popularity of external exams and all kinds and levels of skills examining, error analysis may not only help with developing an individual teacher's professional skill, but can also become a tool for improving the quality of the mathematics educational system in global terms. It seems to be essential because the most important tools used in our educational policy – core curriculum and external exams – are likely to reinforce some categories of pupils' errors and so become misleading in the difficult process of school mathematical education. The above will be illustrated with some examples taken from pupils' mathematics skills examining carried out within the last few years.

Słowa-klucze: nauczanie matematyki, błędy uczniowskie, egzaminy zewnętrzne, polityka edukacyjna

Keywords: mathematics teaching process, pupils' errors, external exams, educational policy

Analiza błędów uczniowskich jest wykorzystywana jako narzędzie doskonalenia procesu nauczania i uczenia się matematyki od lat trzydziestych minionego wieku (Radatz 1979). W Polsce zainteresowanie badaniem uczniowskich błędów w tym obszarze procesu kształcenia jest znacznie świeższe – dotyczy przede wszystkim ostatniego trzydziestolecia (np. Krygowska 1989, Ciosek 1992). W większości publikacji poświęconych tej tematyce podkreśla się, i słusznie, ogromne znaczenie analizy błędów dla dalszego matematycznego rozwoju dziecka oraz doskonalenia warsztatu pracy nauczyciela (np. Booker 1989, Freudenthal 1989, Krygowska 1989, Hansen 2005). Wśród proponowanych przy tej okazji typologii uczniowskich błędów zwraca uwagę ta zaproponowana przez G. Bookera (Booker 1989), który wyróżnił m.in. błędy systematyczne, będące efektem utrwalenia się w świadomości dziecka fałszywych wyobrażeń i stosowania przez nie błędnych strategii postępowania. Zdaniem G. Bookera źródło błędów systematycznych tkwi nie w uczniu, lecz w procesie kształcenia – w sposobie wprowadzania dziecka w poznawane zagadnienia matematyczne. Spójrzmy z tej perspektywy na niektóre wyniki prowadzonych w ostatnich latach badań umiejętności matematycznych uczniów trzeciej klasy szkoły podstawowej.

W latach 2005–2012 Centralna Komisja Egzaminacyjna realizowała projekt, współfinansowany przez Europejski Fundusz Społeczny, pod tytułem: *Badanie umiejętności podstawowych uczniów trzeciej klasy szkoły podstawowej* (www.trzecioklasista.edu.pl). W okresie jego funkcjonowania m.in. przeprowadzono na reprezentatywnych próbach cztery badania testowe umiejętności językowych i matematycznych uczniów kończących klasę trzecią – w latach 2006, 2008, 2010 oraz 2011 (por. Dąbrowski, Żytko 2007, Dąbrowski 2009, 2011, Murawska, Żytko 2012). W ramach projektu zrealizowano także dwie edycje dobrowolnego Ogólnopolskiego Badania Umiejętności Trzecioklasistów: OBUT 2011 oraz OBUT 2012, w których uczestniczyło po około 10.000 szkół i prawie po 300.000 trzecioklasistów (por. Pregler, Wiatrak 2011, 2012). W niniejszym opracowaniu odwołam się do tych badań (por. także Dąbrowski 2013).

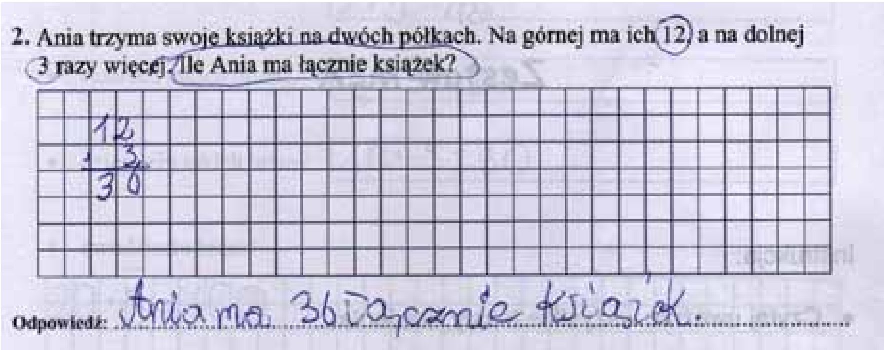
O sztuce czytania (rozwiązywania?) zadań tekstowych

Jednym z podstawowych obszarów umiejętności matematycznych rozwijanych w szkole podstawowej jest rozwiązywanie zadań tekstowych. Od lat, czy to podczas sprawdzianu w klasie szóstej, czy różnorodnych „testów kompetencji" nasi uczniowie ujawniają, że potrafią nieźle radzić sobie tylko z najbardziej typowymi zadaniami. Zobaczmy, co o stosowanych przez nich przy tej okazji strategiach mówią ich błędne rozwiązania. Poniżej przytaczam kilka zadań tekstowych z kolejnych edycji wspomnianych wcześniej badań. Przy każdym zadaniu podany jest rok, w którym było ono wykorzystywane oraz poziom poprawnych rozwiązań.

ZADANIE 1 (2008, 52,6%)
Ania trzyma swoje książki na dwóch półkach. Na górnej ma ich 12, a na dolnej 3 razy więcej. Ile Ania ma łącznie książek?

W roku 2008 było to bardzo typowe dla naszego nauczania początkowego zadanie tekstowe złożone (czyli wielodziałaniowe) dotyczące tzw. porównywania ilorazowego. W aktualnej podstawie programowej kształcenia ogólnego porównywanie ilorazowe pojawia się dopiero na II etapie kształcenia.

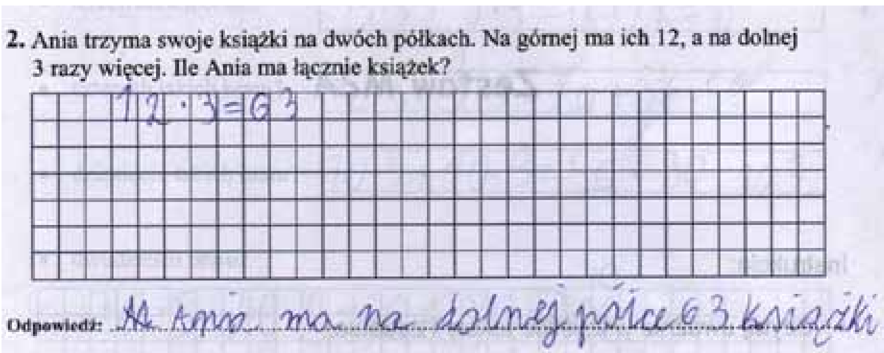
Najczęściej powtarzający się przy jego rozwiązywaniu błąd polegał na ograniczeniu się tylko do wykonania mnożenia 12 × 3:


2. Ania trzyma swoje książki na dwóch półkach. Na górnej ma ich 12, a na dolnej 3 razy więcej. Ile Ania ma łącznie książek?

12
· 3
36

Odpowiedź: Ania ma 36 łącznie książek.

Postąpiło w ten sposób 36,8% badanych trzecioklasistów. Co ciekawe, autorzy tych rozwiązań pisali w odpowiedzi nie o liczbie książek na dolnej półce, lecz o łącznej liczbie książek. Udało mi się znaleźć tylko jedno rozwiązanie (na około 1100) o inaczej brzmiącej odpowiedzi:


2. Ania trzyma swoje książki na dwóch półkach. Na górnej ma ich 12, a na dolnej 3 razy więcej. Ile Ania ma łącznie książek?

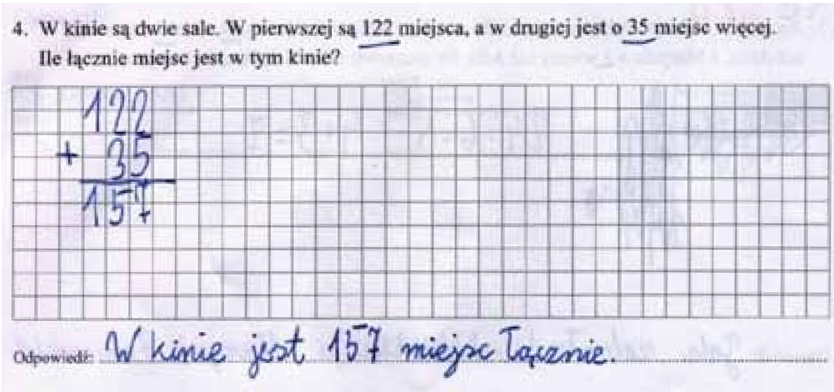
12 · 3 = 63

Odpowiedź: Ania ma na dolnej półce 63 książki.

ZADANIE 2 (2008, 47,9%)

W kinie są dwie sale. W pierwszej są 122 miejsca, a w drugiej o 35 miejsc więcej. Ile łącznie miejsc jest w tym kinie?

Także i to zadanie było, i chyba nadal jest, bardzo typowym zadaniem złożonym na tzw. porównywanie różnicowe. Mamy w nim do czynienia z analogicznym jak poprzednio typem błędu:


4. W kinie są dwie sale. W pierwszej są 122 miejsca, a w drugiej jest o 35 miejsc więcej.
Ile łącznie miejsc jest w tym kinie?

$$\begin{array}{r} 122 \\ +\ 35 \\ \hline 157 \end{array}$$

Odpowiedź: W kinie jest 157 miejsc łącznie.

Jednak jego nasilenie było nieco większe: 43,4% uczniów. W tym przypadku we wszystkich tego typu rozwiązaniach, bez wyjątku, mowa była o *liczbie miejsc łącznie* czy *w całym kinie*.

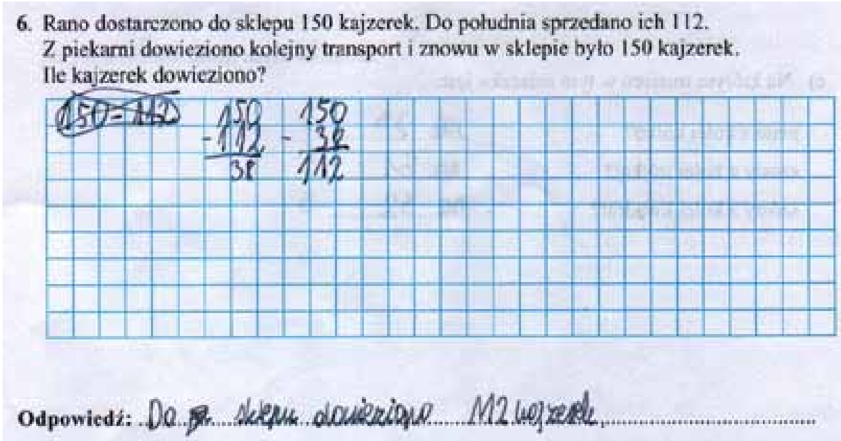
W takiej sytuacji na ogół przyjmuje się, że uczeń, zamiast zadania złożonego rozwiązał, być może przez zwykłe gapiostwo, odpowiednie zadanie proste. Jednak bardziej prawdopodobne wydaje się inne wyjaśnienie – uczniowie ci ujawnili stosowaną przez nich strategię radzenia sobie z zadaniami tekstowymi, która w swojej najprostszej wersji może brzmieć tak:

> *Znajdź (zaznacz) w tekście zadania liczby i dobierz do nich pasujące działanie, a potem znajdź (zaznacz) pytanie i sformułuj na nie odpowiedź, korzystając z uzyskanego wyniku.*

ZADANIE 3 (2010, 34,8%)
Rano dostarczono do sklepu 150 kajzerek. Do południa sprzedano ich 112. Z piekarni dowieziono kolejny transport i znowu w sklepie było 150 kajzerek. Ile kajzerek dowieziono?

To zadanie jest nietypowe dla naszego nauczania początkowego – w jego treści podana jest odpowiedź: *dowieziono tyle, ile wcześniej sprzedano, czyli 112*.

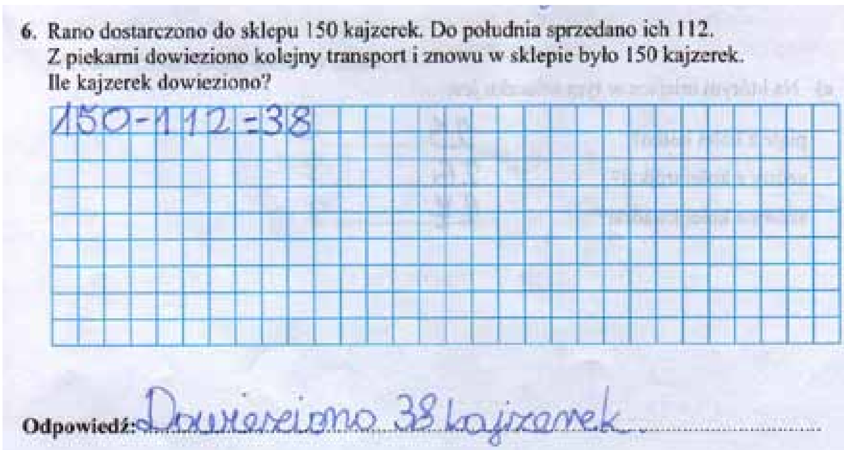
Tylko trzech uczniów (0,3%) podało samą poprawną odpowiedź, reszta autorów dobrych rozwiązań, czyli 34,5% trzecioklasistów, liczyła:


6. Rano dostarczono do sklepu 150 kajzerek. Do południa sprzedano ich 112.
Z piekarni dowieziono kolejny transport i znowu w sklepie było 150 kajzerek.
Ile kajzerek dowieziono?

150 − 112 = 38
150 − 38 = 112

Odpowiedź: Do ~~sk~~ sklepu dowieziono 112 kajzerek.

Ponad ¼ trzecioklasistów (27,3%) podała w odpowiedzi wynik odejmowania „wyczytanego” z pierwszego wiersza treści zadania:


6. Rano dostarczono do sklepu 150 kajzerek. Do południa sprzedano ich 112.
Z piekarni dowieziono kolejny transport i znowu w sklepie było 150 kajzerek.
Ile kajzerek dowieziono?

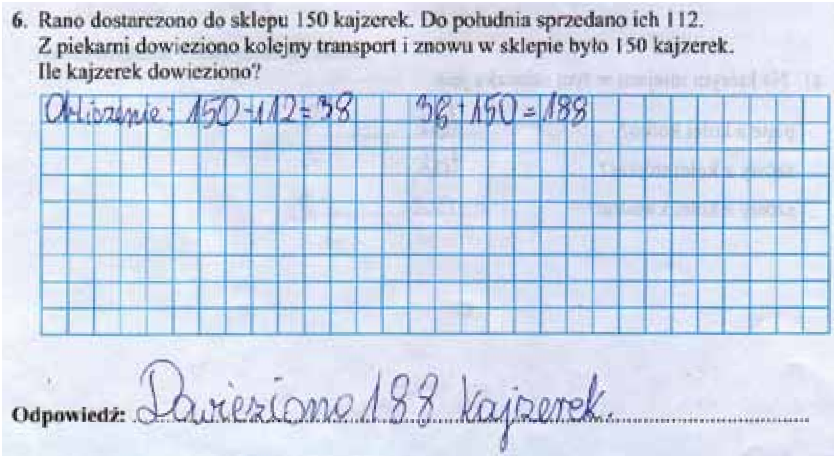
150-112=38

Odpowiedź: Dowieziono 38 kajzerek

Skąd taki pomysł? Żeby to zrozumieć, wystarczy przyjrzeć się uważnie początkowi zadania:

150, sprzedano, 112, zatem 150 – 112 = 38.

Prawie tyle samo uczniów (20,2%) „doczytało” to zadanie do końca:

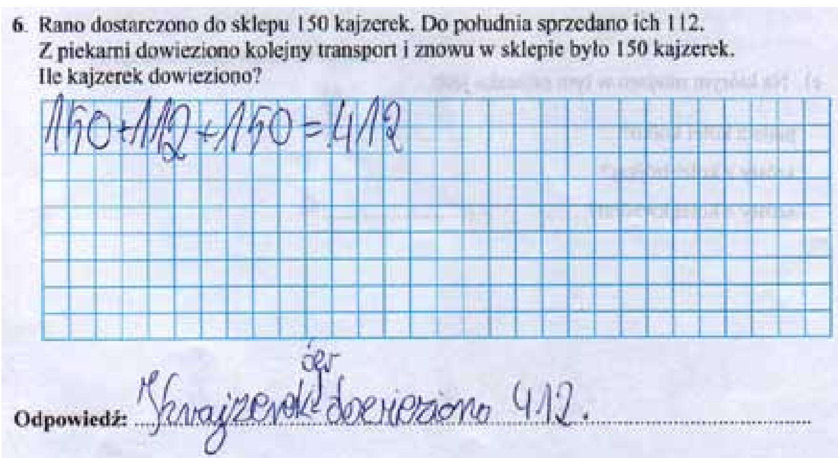

6. Rano dostarczono do sklepu 150 kajzerek. Do południa sprzedano ich 112.
Z piekarni dowieziono kolejny transport i znowu w sklepie było 150 kajzerek.
Ile kajzerek dowieziono?

Obliczenie: 150-112=38   38+150=188

Odpowiedź: Dowieziono 188 kajzerek.

150, sprzedano, 112, zatem 150 – 112 = 38;
dowieziono, 150, czyli 38 + 150 = 188.

Zatem 47,5% uczniów prawdopodobnie dobierało obliczenia do liczb podanych w treści, posiłkując się dodatkowo analizą występujących w niej słów – mamy więc do czynienia z rozbudowaną wersją strategii opisanej wcześniej. Także i w tym zadaniu pewna grupa uczniów sięgnęła po strategię w jej najprostszej postaci, dodając wszystkie czy niektóre z podanych liczb:

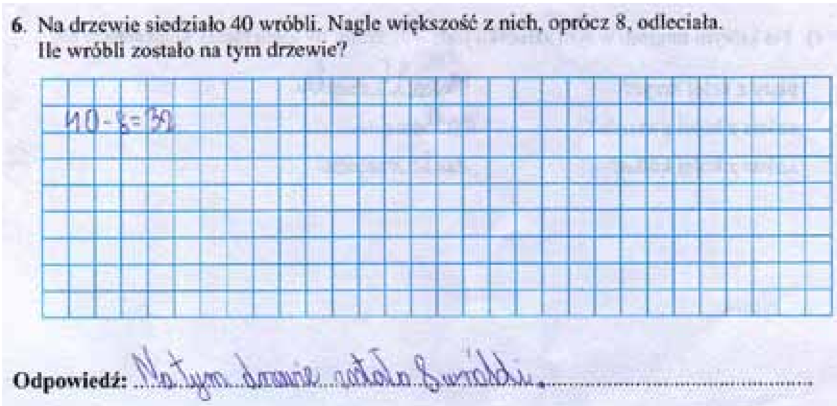

6. Rano dostarczono do sklepu 150 kajzerek. Do południa sprzedano ich 112.
Z piekarni dowieziono kolejny transport i znowu w sklepie było 150 kajzerek.
Ile kajzerek dowieziono?

150+112+150=412

Odpowiedź: Kajzerek dowieziono 412.

ZADANIE 4 (2010, 30,9%)
Na drzewie siedziało 40 wróbli. Nagle większość z nich, oprócz 8, odleciała. Ile wróbli zostało na drzewie?

Kolejne zadanie z odpowiedzią podaną w treści, na pozór zdecydowanie prostsze od poprzedniego. Być może by było prostsze, gdyby uczniowie nie poszukiwali z determinacją jakiegoś obliczenia do wykonania:

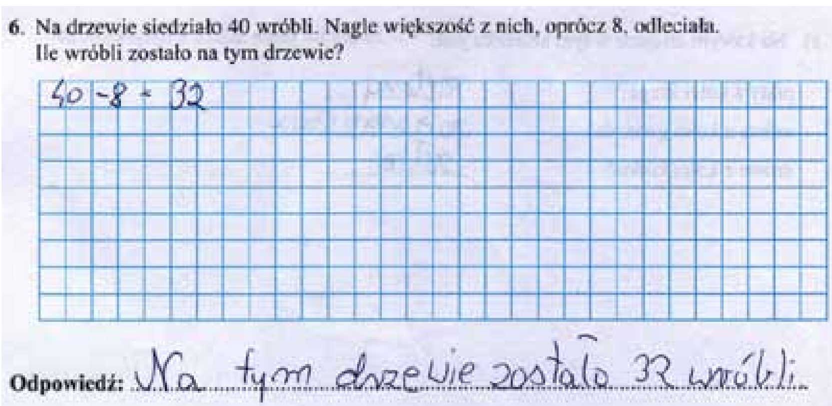


6. Na drzewie siedziało 40 wróbli. Nagle większość z nich, oprócz 8, odleciała. Ile wróbli zostało na tym drzewie?

40-8=32

Odpowiedź: Na tym drzewie zostało 8 wróbli.

Prawie połowa trzecioklasistów: 49,1% po „przeczytaniu" treści zadania: *40, 8, odleciało* doszła do wniosku, że poprawną odpowiedzią jest 32:



6. Na drzewie siedziało 40 wróbli. Nagle większość z nich, oprócz 8, odleciała. Ile wróbli zostało na tym drzewie?

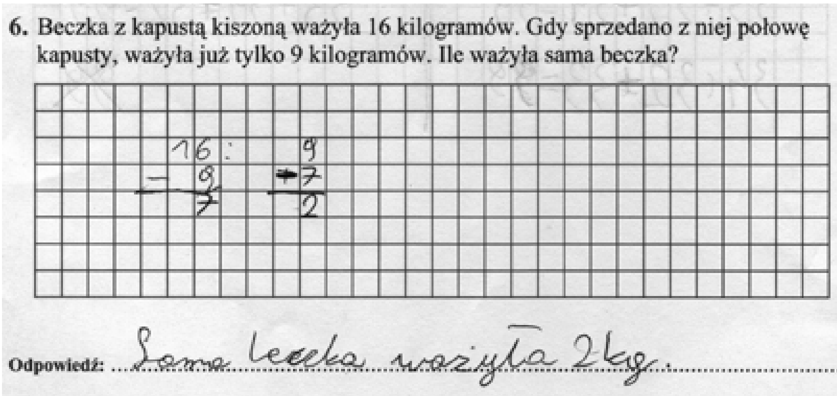
40-8=32

Odpowiedź: Na tym drzewie zostało 32 wróbli.

ZADANIE 5 (2008, 17,1%)

Beczka z kapustą kiszoną ważyła 16 kilogramów. Gdy sprzedano z niej połowę kapusty, ważyła już tylko 9 kilogramów. Ile ważyła sama beczka?

Także i to zadanie daje się rozwiązać z pomocą absolutnie elementarnych operacji:

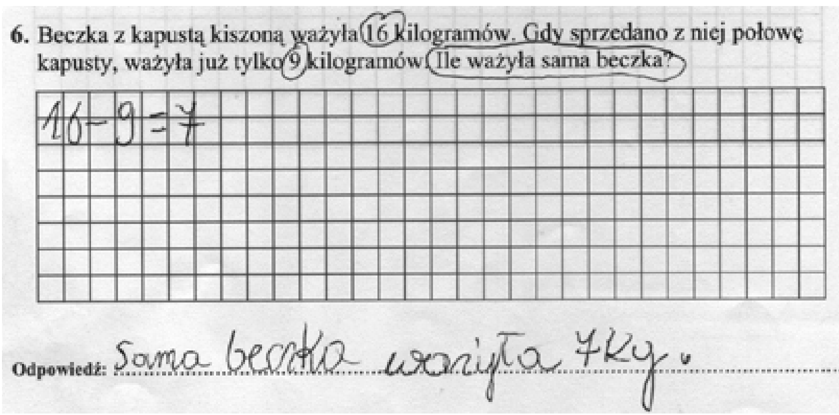


6. Beczka z kapustą kiszoną ważyła 16 kilogramów. Gdy sprzedano z niej połowę kapusty, ważyła już tylko 9 kilogramów. Ile ważyła sama beczka?

16 : 9

Odpowiedź: Sama beczka ważyła 2kg.

Ponad połowa uczniów: 50,1% rozumowała jednak inaczej, najprawdopodobniej tak: *16, sprzedano, 9*, zatem:



6. Beczka z kapustą kiszoną ważyła 16 kilogramów. Gdy sprzedano z niej połowę kapusty, ważyła już tylko 9 kilogramów. Ile ważyła sama beczka?

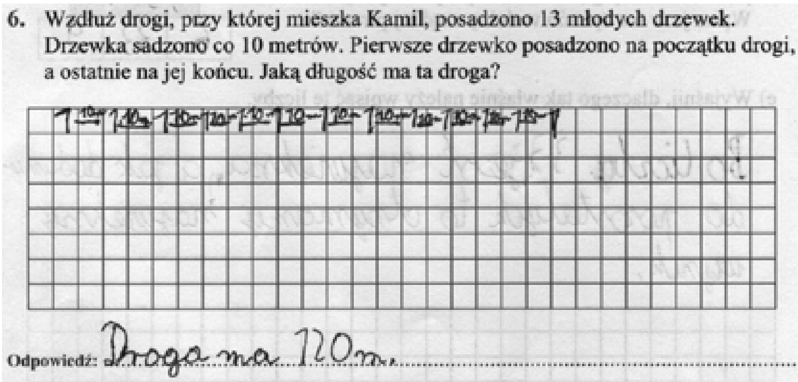
16−9=7

Odpowiedź: Sama beczka ważyła 7kg.

ZADANIE 6 (2008, 5,3%)

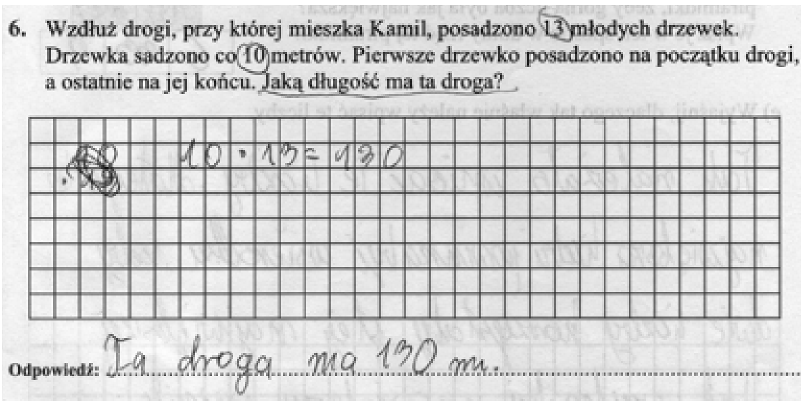
Wzdłuż drogi, przy której mieszka Kamil, posadzono 13 młodych drzewek. Drzewka sadzono co 10 metrów. Pierwsze drzewko posadzono na początku drogi, a ostatnie na jej końcu. Jaką długość ma ta droga?

Wystarczy prosta analiza opisanej w nim sytuacji czy sporządzenie rysunku, aby odpowiedź stała się oczywista:


6. Wzdłuż drogi, przy której mieszka Kamil, posadzono 13 młodych drzewek. Drzewka sadzono co 10 metrów. Pierwsze drzewko posadzono na początku drogi, a ostatnie na jej końcu. Jaką długość ma ta droga?

Odpowiedź: Droga ma 120 m.

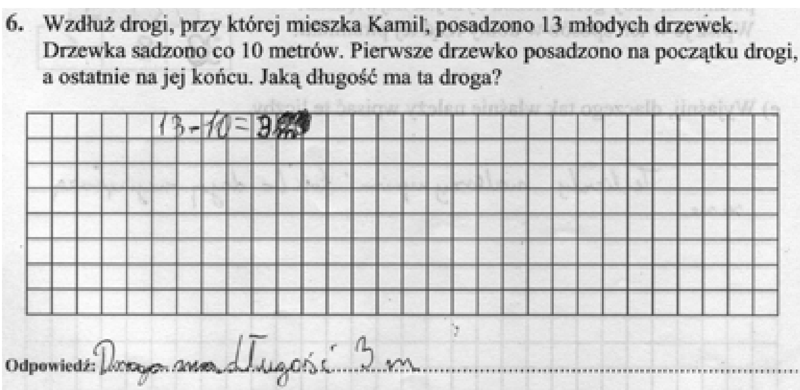
Jednak dominowało inne podejście:


6. Wzdłuż drogi, przy której mieszka Kamil, posadzono 13 młodych drzewek. Drzewka sadzono co 10 metrów. Pierwsze drzewko posadzono na początku drogi, a ostatnie na jej końcu. Jaką długość ma ta droga?

10 · 13 = 130

Odpowiedź: Ta droga ma 130 m.

Znowu, prawdopodobnie, znana już z poprzednich przykładów strategia: zaznaczam liczby i pytanie, szukam pasującego działania i formułuję odpowiedź. Aż 63,4% uczniów uznało, że najlepiej pasującym działaniem jest mnożenie, 16,1% zdecydowało się na dodawanie albo odejmowanie:


6. Wzdłuż drogi, przy której mieszka Kamil, posadzono 13 młodych drzewek. Drzewka sadzono co 10 metrów. Pierwsze drzewko posadzono na początku drogi, a ostatnie na jej końcu. Jaką długość ma ta droga?

13 - 10 = 3

Odpowiedź: Droga ma długość 3 m

Łącznie aż 79,5% badanych trzecioklasistów mogło w ten sposób „przeczytać" treść tego zadania.

Zbierzmy jeszcze raz przytoczone powyżej dane.

Tabela 1. Poziom poprawnych rozwiązań przytoczonych zadań oraz rozwiązań, w których trzecioklasiści mogli zastosować omawiane strategie (w procentach)

Rozwiązania	**Zadanie 1 półki**	**Zadanie 2 kino**	**Zadanie 3 bułki**	**Zadanie 4 wróble**	**Zadanie 5 beczka**	**Zadanie 6 droga**
Poprawne	52,6	47,9	34,8	30,9	17,1	5,3
Błędne, z użyciem omawianych strategii	36,8	43,4	47,5	49,1	50,1	79,5

Niektóre z zadań tekstowych wykorzystywanych w badaniach trzecioklasistów na próbach reprezentatywnych zostały także użyte w badaniach OBUT (Pregler, Wiatrak 2011, 2012). Ze względu na specyfikę badań OBUT nadano im postać zadań zamkniętych, a dystraktory do nich zbudowano w oparciu o najczęściej pojawiające się kategorie błędów dla wersji otwartych. W efekcie, w roku 2011 aż w przypadku pięciu zadań (w tym jednego typowo algorytmicznego, dotyczącego obliczenia obwodu prostokąta o podanych bokach) uczniowie mogli wybrać dystraktory odpowiadające omawianym powyżej strategiom, co mogło wskazywać na to, że tak właśnie rozumowali, rozwiązując te zadania. Zobaczmy, jak intensywnie uczniowie po nie sięgali.

Tabela 2. Procentowy rozkład liczby wyborów dystraktorów, które mogą wskazywać na zastosowanie przez uczniów omawianych strategii rozwiązywania zadań tekstowych w badaniu OBUT 2011

Liczba wyborów dystraktorów omawianego typu	0	1	2	3	4	5
Procent uczniów	8,8	23,1	23,4	19,5	15,3	9,9

Jak widać, aż 44,7% trzecioklasistów zaznaczyło konsekwentnie te dystraktory w więcej niż połowie zadań, co może oznaczać, że omawiane strategie są dla nich codziennością.

Przyjrzyjmy się jeszcze jednemu zadaniu z badań trzecioklasistów:

ZADANIE 7 (2008, 75,1%)
Janek, Piotr i Michał zbierają modele samochodów. Janek ma już 24 modele. Piotr ma o 8 więcej niż Janek, a Michał o 2 mniej niż Piotr. Ile modeli ma Michał?

Uzyskany przez uczniów wynik budzi szacunek: ¾ trzecioklasistów zastosowało właściwy tok rozumowania przy rozwiązywaniu tego zadania. Tak dobrze sobie radzą z tego typu zadaniami złożonymi? A może przyczyna dobrego poziomu rozwiązań tkwi w czym innym? Przeczytajmy jego treść tak, jak – najprawdopodobniej – robi to część uczniów:

24, 8, więcej, czyli 24 + 8 = 32,
2, mniej, zatem 32 – 2 = 30.

I zadanie dobrze rozwiązane.

Wystarczy coś w układzie danych w zadaniu zaburzyć, aby obraz umiejętności uczniów zaczął się zmieniać:

ZADANIE 7A (2008, 66,7%)
Janek, Piotr i Michał zbierają modele samochodów. Janek ma już 40 modeli. Piotr ma o osiem więcej niż Janek, a Michał o 2 mniej niż Piotr. Ile modeli ma Michał?

ZADANIE 7B (2008, 56,6%)
Janek, Piotr i Michał zbierają modele samochodów. Piotr ma o 8 modeli więcej niż Janek, a Michał o 2 mniej niż Piotr. Ile modeli ma Michał, jeśli Janek ma 16 modeli?

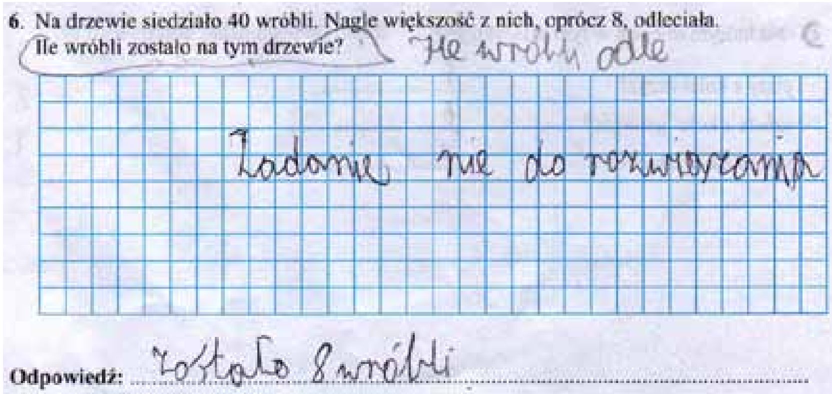
ZADANIE 7C (2008, 51,8%)
Janek, Piotr i Michał zbierają modele samochodów. Piotr ma o osiem modeli więcej niż Janek, a Michał o 2 mniej niż Piotr. Ile modeli ma Michał, jeśli Janek ma już 32 modele?

Reasumując: jest bardzo prawdopodobne, że dla mniej więcej połowy trzecioklasistów dopasowywanie działania (działań) do liczb i słów-kluczy podanych w treści zadania jest często stosowaną, a może nawet podstawową (jedyną?) strategią służącą rozwiązywaniu zadań tekstowych.

Szukając przyczyny

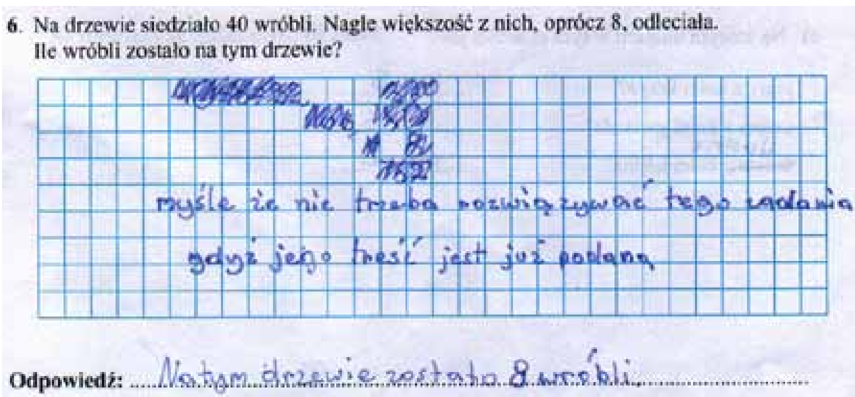
Używając nomenklatury G. Bookera mamy do czynienia z bardzo rozpowszechnionym błędem systematycznym w kluczowym dla matematycznego rozwoju uczniów obszarze. Jakie działania realizowane w procesie matematycznego kształcenia mogą przyczyniać się do powstawania tych strategii?

Częściowej odpowiedzi na to pytanie dostarczają sami uczniowie. Spójrzmy na poniższe rozwiązania zadania „o wróblach" (zadanie 4.):


6. Na drzewie siedziało 40 wróbli. Nagle większość z nich, oprócz 8, odleciała.
Ile wróbli zostało na tym drzewie? Ile wróbli odle

Zadanie nie do rozwiązania

Odpowiedź: zostało 8 wróbli


6. Na drzewie siedziało 40 wróbli. Nagle większość z nich, oprócz 8, odleciała.
Ile wróbli zostało na tym drzewie?

myślę że nie trzeba rozwiązywać tego zadania
gdyż jego treść jest już podana

Odpowiedź: Na tym drzewie zostało 8 wróbli

Jak widać, uczniowie jednoznacznie stawiają znak równości pomiędzy rozwiązywaniem zadania, a wykonywaniem i zapisywaniem obliczeń. Autor pierwszego z tych rozwiązań nawet, w „naturalnym" odruchu, chciał poprawić zadanie tak, aby jednak *dało się rozwiązać*, ale ostatecznie zrezygnował z tego.

Jak pokazują badania ankietowe nauczycieli czy obserwacje lekcji (por. np. Dąbrowski 2013) identycznie myśli większość nauczycieli i egzekwuje to przekonanie w procesie kształcenia. Moim zdaniem, to najważniejsza przyczyna analizowanego zjawiska – dominacja w praktyce szkolnej i w świadomości społecznej jednej z możliwych metod: *wykonanie obliczenia* nad celem, któremu ma ona służyć: *rozwiązanie zadania tekstowego*, czyli *znalezienie odpowiedzi na pytanie postawione w jego treści*. Co więcej, metoda ta wymaga dokonania matematyzacji sytuacji opisanej w zadaniu za pomocą języka symbolicznego, co sprawia, że jest metodą najtrudniejszą z możliwych.

Jeśli na to powszechne przekonanie „nałożymy" m.in.:

- tradycję podawania przez nauczyciela gotowej metody rozwiązywania danego typu zadania tekstowego,
- zwyczaj konsekwentnego utrwalania tej metody, czyli rozwiązywania wedle tego samego schematu serii identycznych strukturalnie zadań,
- małą strukturalną różnorodność zadań rozwiązywanych na I etapie kształcenia,
- materiały edukacyjne, gdzie od samego początku na podanie sposobu rozwiązania zadania tekstowego przeznaczona jest zazwyczaj wąska kratka, niekiedy z rozpoczętym już obliczeniem,
- długie serie zadań rozwiązywanych wedle tego samego schematu na kartach pracy czy stronach zeszytu ćwiczeń,

to sposób postępowania uczniów staje się znacznie bardziej zrozumiały.

Obawiam się, że w kolejnych latach zjawisko to będzie się jeszcze nasilać – i to za sprawą podstawy programowej kształcenia ogólnego dla I etapu kształcenia, w której znajduje się zapis, że uczeń kończący klasę pierwszą, czyli w wieku 7 lat, *zapisuje rozwiązanie zadania z treścią przedstawionego słownie w konkretnej sytuacji, stosując zapis cyfrowy i znaki działań* (Załącznik do Rozporządzenia Ministra Edukacji Narodowej z dnia 23 grudnia 2008 r. (Dz. U. Nr 4, poz. 17)). Na dodatek aktualnie obowiązująca podstawa „dba" o to, żeby różnorodność rozwiązywanych zadań tekstowych była jeszcze mniejsza, przenosząc zadania złożone, a nawet niektóre typy zadań prostych na II etap kształcenia.

Rzut oka na egzaminy

A jak w przypadku starszych uczniów? Czy kolejne lata nauki matematyki eliminują błędne uczniowskie strategie dotyczące zadań tekstowych? Szukając odpowiedzi na te pytania przyjrzyjmy się kilku zadaniom z różnych edycji sprawdzianu w klasie szóstej (por. www.cke.edu.pl). Ze względu na sposób upubliczniania wyników egzaminów musimy ograniczyć się do zadań zamkniętych.

ZADANIE I (2008, 56,8%)
We wtorek sprzedano 35 butelek wody mineralnej, a w środę 3 razy więcej. Ile łącznie butelek wody sprzedano we wtorek i w środę?
A. 105 B. 73 C. 38 D. 140

Jest to zadanie strukturalnie identyczne z zadaniem 1. Poziom wykonania obu zadań jest bardzo zbliżony: 52,6% dla wersji otwartej w klasie trzeciej oraz 56,8% dla wersji zamkniętej w klasie szóstej. Dystraktor A w zadaniu I, który odpowiada najbardziej typowemu błędowi z klasy trzeciej (36,8%), został wybrany przez 40,6% szóstoklasistów.

Zobaczmy, w jaki sposób zostało wyjaśnione w sprawozdaniu ze sprawdzianu pochodzenie tego błędu (CKE 2008: 35): *Prawdopodobnie uczniowie potrafili zastosować porównywanie ilorazowe, ale zapomnieli o liczbie butelek sprzedanych we wtorek*. A może raczej: uczniowie pomnożyli liczby podane w treści zadania, bo zastosowali zbudowaną już w nauczaniu początkowym strategię?

ZADANIE II (2007, 53,1%)
Marta, robiąc 10 kroków, pokonuje odcinek drogi długości 6 metrów. Na przejście z domu do szkoły potrzebuje 300 kroków. Jaką długość ma jej droga do szkoły?
A. 50 m B. 180 m C. 500 m D. 1800 m

Tym razem najczęściej wybieranym dystraktorem było D, czyli iloczyn liczb 6 i 300. Zdecydowało się na niego 30,5% uczestników egzaminu. Zobaczmy, jak zostało to skomentowane w omówieniu wyników (CKE 2007: 35): *Uczniowie prawdopodobnie obliczyli długość drogi bez uwzględnienia jednego warunku zadania.* A może znaleźli wynik pasujący do iloczynu dwóch podanych w treści liczb?

ZADANIE III (2008, 65,0%)
Na straganie wystawiono do sprzedaży 48 plażowych czapek. Przed południem sprzedano połowę z nich, a po południu ⅓ pozostałych. Ile czapek sprzedano po południu?
A. 8 B. 16 C. 24 D. 32

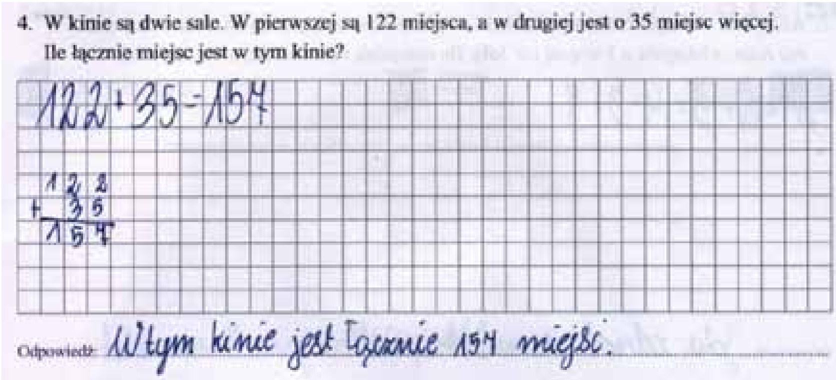
Ponownie, najczęstszym błędem: 19,3% było wybranie iloczynu liczb podanych w treści, czyli dystraktora B. I komentarz (CKE 2008: 35): *Prawdopodobnie uczniowie obliczyli ⅓ liczby 48, nie biorąc pod uwagę dwóch istotnych informacji: połowę i pozostałych*. Fakt, ale dlaczego tak zrobili? Najprawdopodobniej dlatego, że w treści zadania zauważyli tylko dwie liczby i do nich dobrali odpowiednie działanie.

Podobne zadanie wykorzystano w roku 2002:
ZADANIE IV (2002, 47,9%)
Jesienią świstak gromadzi pod skórą zapas tłuszczu na zimę, powiększając aż o ⅔ masę swego ciała. Na początku lata świstak ważył 3 kg. Ile kilogramów będzie ważył tuż przed zapadnięciem w sen zimowy?
A. 2 B. 5 C. 4½ D. 3⅔

Iloczyn liczb z treści, czyli dystraktor A wybrało 8,8% szóstoklasistów, iloraz (C): 7,3%, a sumę (D) aż 35,1%.

Strategie opisane podczas omawiania zadań z klasy trzeciej pojawiają się na sprawdzianie także przy okazji zadań otwartych, ale nie znamy nasilenia tego zjawiska, gdyż CKE nie zbiera (?) tego typu informacji. Jak widać, problem pozostał, jego skali możemy się tylko domyślać.

I ostatnie już nawiązanie do systemu egzaminów zewnętrznych. Wyobraźmy sobie, że zadanie 2 pojawia się na sprawdzianie jako zadanie otwarte, a uczeń rozwiązał je dodając liczby podane w treści zadania:



Jak to rozwiązanie byłoby ocenione?

Gdyby za zadanie były 2 punkty do zdobycia, to klucz mógłby wyglądać tak:

- uczeń oblicza liczbę miejsc w drugiej sali – 1 punkt,
- uczeń oblicza łączną liczbę miejsc – 1 punkt,

zatem autor powyższego rozwiązania otrzymuje 50% możliwych punktów.

Gdyby zadanie zostało „wycenione” na 3 punkty, to klucz mógłby być nieco rozbudowany:

- uczeń oblicza liczbę miejsc w drugiej sali – 1 punkt,
- uczeń oblicza łączną liczbę miejsc – 1 punkt,
- uczeń podaje poprawną odpowiedź – 1 punkt.

Uczeń otrzymałby więc 1 punkt na trzy możliwe, czyli 33⅓% punktów do zdobycia za to zadanie. Wedle polskiej „normy maturalnej” ZDAŁ.

Błędy uczniów powinny być informacją dla nauczyciela, ale także, a może nawet przede wszystkim, powinny być informacją dla decydentów oświatowych. Uczmy się na błędach uczniów!

Literatura

Booker G. (1989), *Rola błędów w konstrukcji matematycznej wiedzy*. „Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego”, Seria V, Dydaktyka Matematyki 11.

Centralna Komisja Egzaminacyjna (2007), *Osiągnięcia uczniów kończących szkołę podstawową w roku 2007*. Warszawa.

Centralna Komisja Egzaminacyjna (2008), *Osiągnięcia uczniów kończących szkołę podstawową w roku 2008*. Warszawa.

Ciosek M. (1992), *Błędy popełniane przez uczących się matematyki i ich hipotetyczne przyczyny*. „Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego”, Seria V, Dydaktyka Matematyki 13.

Dąbrowski M. (red.) (2009), *Trzecioklasista i jego nauczyciel. Raport z badań ilościowych 2008*. Warszawa, Centralna Komisja Egzaminacyjna.

Dąbrowski M. (red.) (2011), *Trzecioklasiści 2010. Raport z badań ilościowych.* Warszawa, Centralna Komisja Egzaminacyjna.

Dąbrowski M. (2013), (*Za*) *trudne, bo trzeba myśleć? O efektach nauczania matematyki na I etapie kształcenia.* Warszawa, Instytut Badań Edukacyjnych.

Dąbrowski M., Żytko M. (red.) (2007), *Badanie umiejętności podstawowych uczniów trzecich klas szkoły podstawowej. Raport z badania ilościowego.* Cz. I. Warszawa, Centralna Komisja Egzaminacyjna.

Freudenthal H. (1989), *Błędy nauczyciela – analiza dydaktyczna samego siebie*. „Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego”, Seria V, Dydaktyka Matematyki 11.

Hansen A. (2005), *Children's Errors in Mathematics*. Exeter, Learning Matters Ltd.

Krygowska A.Z. (1989), *Zrozumieć błąd w matematyce*. „Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego”, Seria V, Dydaktyka Matematyki 10.

MEN (2008), Załącznik do Rozporządzenia Ministra Edukacji Narodowej z dnia 23 grudnia 2008 r. (Dz. U. Nr 4, poz. 17).

Murawska B., Żytko M (red.) (2012), *Uczeń, szkoła, dom. Raport z badań 2011*. Warszawa, Centralna Komisja Egzaminacyjna.

Pregler A., Wiatrak E. (red.) (2011), *Ogólnopolskie badanie umiejętności trzecioklasistów. Raport z badań OBUT 2011.* Warszawa, Centralna Komisja Egzaminacyjna.

Pregler A., Wiatrak E. (red.) (2012), *Ogólnopolskie badanie umiejętności trzecioklasistów. Raport z badań OBUT 2012.* Warszawa, Centralna Komisja Egzaminacyjna.

Radatz H. (1979), *Error Analysis in Mathematics Education*. „Journal for Research in Mathematics Education”, Vol. 10, No. 3.