Tomasz Krawczyk

Zastosowanie metody Monte Carlo w zarządzaniu Value at Risk portfela inwestycyjnego

Problemy Zarządzania 14/4 (1), 25-38

2016

Problemy Zarządzania, vol. 14, nr 4 (63), t. 1: 25–38
ISSN 1644-9584, © Wydział Zarządzania UW
DOI 10.7172/1644-9584.63.2

Zastosowanie metody Monte Carlo w zarządzaniu Value at Risk portfela inwestycyjnego

Nadesłany: 19.10.15 | Zaakceptowany do druku: 21.10.16

Tomasz Krawczyk*

W artykule przedstawiono zastosowanie metody Monte Carlo w zarządzaniu wartością zagrożoną Value at Risk portfela inwestycyjnego. Istotą obliczenia wartości zagrożonej portfela inwestycyjnego wieloskładnikowego jest zastosowanie podejścia opartego na zastosowaniu obliczeń za pomocą algebry macierzy, w którym główną rolę pełni macierz wariancji-kowariancji. W ramach obliczeń macierzy wariancji-kowariancji korygowana jest macierz zmienności aktywów w zależności od wybranego poziomu ufności. Uwzględniając efekty korelacyjne, można w ten sposób oszacować wartość zagrożoną portfela zdywersyfikowanego. W przypadku nieuwzględnienia efektów korelacyjnych otrzymujemy wartość zagrożoną portfela niezdywersyfikowanego. W koncepcji wartości zagrożonej zdywersyfikowanej, jak i niezdywersyfikowanej istnieje możliwość zastosowania symulacji opartej na metodzie Monte Carlo. Najważniejszym obszarem zastosowania symulacji opartej na metodzie Monte Carlo w koncepcji VaR zdywersyfikowanego i niezdywersyfikowanego są przyszłe notowania aktywów wchodzących w skład portfela. Zaprezentowane zastosowania metody Monte Carlo w koncepcji VaR zdywersyfikowanego i niezdywersyfikowanego mogą służyć do budowy systemów zarządzania ryzykiem rozbudowanych portfeli inwestycyjnych opartych na aktywach, takich jak akcje, waluty, indeksy giełdowe, surowce.

Słowa kluczowe: zarządzanie ryzykiem, wartość zagrożona, symulacja Monte Carlo.

The Application of the Monte Carlo Method in the Management of Value at Risk of an Investment Portfolio

Submitted: 19.10.15 | Accepted: 21.10.16

This paper describes the use of the Monte Carlo method in the management of Value at Risk (VaR) of an investment portfolio. The essence of calculating the VaR is the use of a multi-component investment portfolio approach based on calculations matrix algebra where the main role is played by the variance-covariance matrix. As part of the calculation of the variance-covariance matrix, the changes in volatility matrix of assets are made depending on the level of statistic significance. Taking into account the correlation effects, the VaR of the diversified portfolio can thus be estimated. If we do not take into account the correlation effects, then we get non-diversified portfolio value at risk. The concept of diversified and non-diversified VaR allows for the use of simulation based on the Monte Carlo method. The most important area of application of simulation based on the Monte Carlo method in the concept of diversified and non-diversified VaR is the future trading of assets within a portfolio. The presented Monte Carlo application methods in the concept of diversified and non-diversified VaR can be used to

* **Tomasz Krawczyk** – dr, Uniwersytet Warszawski, Wydział Nauk Ekonomicznych – DELab.

Adres do korespondencji: Uniwersytet Warszawski, Wydział Nauk Ekonomicznych, ul. Dobra 56/66, 00-312 Warszawa; e-mail: tj.krawczyk@uw.edu.pl.

build risk management systems for sophisticated investment portfolios based on underlying assets such as stocks, currencies, stock indices, commodities.

Keywords: risk management, value at risk, Monte Carlo simulation.

JEL: C15

1. Wprowadzenie

Celem artykułu jest przedstawienie możliwości zastosowania symulacji Monte Carlo w metodologii VaR na przykładzie wartości zagrożonej portfela inwestycyjnego. Koncepcja Value at Risk w portfelu inwestycyjnym umożliwia wyliczenie wartości zagrożonej zdywersyfikowanej oraz niezdywersyfikowanej. W przypadku wartości zdywersyfikowanej istotą jest uwzględnienie tzw. efektów korelacyjnych zachodzących pomiędzy aktywami wchodzącymi w skład portfela. Ujemne efekty korelacyjne umożliwiają zmniejszenie wartości zagrożonej portfela. W przypadku wartości niezdywersyfikowanej rozpatrywana jest sytuacja, w której nie uwzględniamy efektów korelacyjnych lub rozpatrujemy szczególny przypadek wartości zagrożonej zdywersyfikowanej, gdzie współczynniki korelacyjne pomiędzy aktywami wchodzącymi w skład portfela są równe jedności. Pomijając skrajny przypadek, gdy współczynnik korelacji jest równy 1, można stwierdzić, że VaR zdywersyfikowany jest mniejszy od VaR niezdywersyfikowanego. Tym samym, można zbudować system analizy ryzyka oraz systemy podejmowania działań opierające się na dwóch poziomach granicznych strat w ramach koncepcji VaR.

Koncepcje Value at Risk zdywersyfikowanego oraz niezdywersyfikowanego można rozszerzyć o zastosowanie metody Monte Carlo. Stosując metodę Monte Carlo w koncepcji VaR zdywersyfikowanego, można przeprowadzić symulację kursów aktywów, takich jak akcje, waluty, indeksy, surowce naturalne. Na podstawie symulacji Monte Carlo można przeprowadzić próbkowanie stopy zwrotu, a tym samym oszacować parametr zmienności danego aktywa w postaci odchylenia standardowego. W ten sposób można uzyskać zasymulowaną macierz zmienności, która dodatkowo korygowana jest przy danym poziomie ufności w ramach koncepcji VaR. W przypadku braku efektów korelacyjnych i zasymulowana macierz zmienności w sposób bezpośredni umożliwia oszacowanie VaR niezdywersyfikowanego. W przypadku VaR zdywersyfikowanego, stosując symulację Monte Carlo należy zwrócić uwagę na współczynniki korelacji. Można zastosować niezmienione współczynniki lub w ramach oszacowanej próbki oszacować je na nowo i wstawić do macierzy korelacji. Na podstawie przeprowadzonej symulacji Monte Carlo zarówno dla VaR zdywersyfikowanego, jak i niezdywersyfikowanego można przeprowadzić procedurę próbkowania, na podstawie której można wyliczyć podstawowe statystyki, takie jak wartość średnia, wariancja, odchylenie standardowe, współczynnik zmienności, wartość maksymalna, wartość minimalna, przedział ufno-

 DOI 10.7172/1644-9584.63.2

ści. Przeprowadzona w ten sposób symulacja oparta na metodzie Monte Carlo pozwala na przeprowadzenie porównania wartości zagrożonej zasymulowanej z portfelem referencyjnym, umożliwia też przeprowadzenie back-testów oraz potencjalnych prognoz poziomów granicznych strat.

2. Wartość zagrożona portfela zdywersyfikowanego i niezdywersyfikowanego

Obliczenie wartości zagrożonej dla portfela zdywersyfikowanego wieloelementowego wymaga przeprowadzenia obliczeń za pomocą algebry macierzy. W celu przeprowadzenia obliczeń potrzebna jest **W** – macierz wag, która zawiera informacje na temat udziału poszczególnych aktywów w portfelu, **V** – macierz zmienności aktywów (zmienność dotoczy w tym przypadku stóp zwrotu aktywów), poziomu ufności w celu skorygowania macierzy zmienności, **C** – macierz współczynników korelacji aktywów (Butler, 1996):

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} w_1 & w_2 & \dots & w_i \end{bmatrix}, \quad \mathbf{V} = \begin{bmatrix} v_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & v_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & v_{ik} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & c_{12} & c_{13} & c_{14} \\ c_{21} & 1 & c_{23} & c_{24} \\ c_{31} & c_{32} & 1 & c_{34} \\ c_{32} & c_{32} & c_{33} & 1 \end{bmatrix}. \quad (1)$$

Na podstawie powyższych macierzy można przeprowadzić obliczenia dla VaR zdywersyfikowanego według równania $\mathrm{VaR}_\alpha = \sqrt{\mathbf{WVCVW}'}$:

$$\begin{bmatrix} w_1 & w_2 & \dots & w_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & v_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & v_{ik} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & c_{12} & c_{13} & c_{14} \\ c_{21} & 1 & c_{23} & c_{24} \\ c_{31} & c_{32} & 1 & c_{34} \\ c_{32} & c_{32} & c_{33} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & v_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & v_{ik} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_k \end{bmatrix} =$$

$$= \mathbf{WVCVW}' = \sqrt{\mathbf{WVCVW}'} = \mathrm{VaR}_\alpha. \quad (2)$$

Z kolej w przypadku obliczeń wartości zagrożonej niezdywersyfikowanej obliczenia przeprowadzamy za pomocą formuły WV:

$$\begin{bmatrix} w_1 & w_2 & \dots & w_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & v_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & v_{ik} \end{bmatrix} = \mathbf{WV}, \quad \mathrm{VaR}_\alpha = a_1 + a_2 + \dots + a_n. \quad (3)$$

Załóżmy, że realizowana jest inwestycja w portfel o wartości 1 mln zł. Poniżej przedstawiono poszczególne macierze oraz oszacowania VaR zdywersyfikowanego i niezdywersyfikowanego.

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} 26\% & 20\% & 22\% & 17\% & 15\% \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} 32\% & 0\% & 0\% & 0\% & 0\% \\ 0\% & 38\% & 0\% & 0\% & 0\% \\ 0\% & 0\% & 28\% & 0\% & 0\% \\ 0\% & 0\% & 0\% & 49\% & 0\% \\ 0\% & 0\% & 0\% & 0\% & 53\% \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0{,}42 & 0{,}82 & 0{,}13 & 0{,}38 \\ 0{,}42 & 1 & 0{,}46 & -0{,}79 & -0{,}42 \\ 0{,}82 & 0{,}46 & 1 & 0{,}01 & 0{,}12 \\ 0{,}13 & -0{,}79 & 0{,}01 & 1 & 0{,}02 \\ 0{,}38 & -0{,}42 & 0{,}12 & 0{,}02 & 1 \end{bmatrix}.$$

W celu przeprowadzenia wyliczeń VaR zdywersyfikowanego i niezdywersyfikowanego dokonujemy skorygowania macierzy zmienności przy poziomie ufności 0,99 o wartość odczytaną z tablic rozkładu normalnego równą 2,3263:

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} 74\% & 0\% & 0\% & 0\% & 0\% \\ 0\% & 88\% & 0\% & 0\% & 0\% \\ 0\% & 0\% & 65\% & 0\% & 0\% \\ 0\% & 0\% & 0\% & 114\% & 0\% \\ 0\% & 0\% & 0\% & 0\% & 123\% \end{bmatrix}.$$

Następnie przeprowadzamy obliczenia macierzy **VC**:

$$\begin{bmatrix} 74\% & 0\% & 0\% & 0\% & 0\% \\ 0\% & 88\% & 0\% & 0\% & 0\% \\ 0\% & 0\% & 65\% & 0\% & 0\% \\ 0\% & 0\% & 0\% & 114\% & 0\% \\ 0\% & 0\% & 0\% & 0\% & 123\% \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0{,}42 & 0{,}82 & 0{,}13 & 0{,}38 \\ 0{,}42 & 1 & 0{,}46 & -0{,}79 & -0{,}42 \\ 0{,}82 & 0{,}46 & 1 & 0{,}01 & 0{,}12 \\ 0{,}13 & -0{,}79 & 0{,}01 & 1 & 0{,}02 \\ 0{,}38 & -0{,}42 & 0{,}12 & 0{,}02 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 74\% & 31\% & 61\% & 10\% & 28\% \\ 37\% & 88\% & 41\% & -70\% & -37\% \\ 53\% & 30\% & 65\% & 1\% & 8\% \\ 15\% & -90\% & 1\% & 114\% & 2\% \\ 47\% & -52\% & 15\% & 2\% & 123\% \end{bmatrix}.$$

Macierz **VC** mnożona jest przez macierz zmienności. Wynikiem jest macierz **VCV**:

 DOI 10.7172/1644-9584.63.2

$$\begin{bmatrix} 74\% & 31\% & 61\% & 10\% & 28\% \\ 37\% & 88\% & 41\% & -70\% & -37\% \\ 53\% & 30\% & 65\% & 1\% & 8\% \\ 15\% & -90\% & 1\% & 114\% & 2\% \\ 47\% & -52\% & 15\% & 2\% & 123\% \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 74\% & 0\% & 0\% & 0\% & 0\% \\ 0\% & 88\% & 0\% & 0\% & 0\% \\ 0\% & 0\% & 65\% & 0\% & 0\% \\ 0\% & 0\% & 0\% & 114\% & 0\% \\ 0\% & 0\% & 0\% & 0\% & 123\% \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 55{,}42\% & 23{,}28\% & 45{,}44\% & 7{,}20\% & 21{,}06\% \\ 32{,}82\% & 78{,}15\% & 35{,}95\% & -61{,}47\% & -32{,}82\% \\ 34{,}79\% & 19{,}52\% & 42{,}43\% & 0{,}42\% & 5{,}09\% \\ 16{,}89\% & -102{,}65\% & 1{,}30\% & 129{,}94\% & 2{,}60\% \\ 57{,}77\% & -63{,}85\% & 18{,}24\% & 3{,}04\% & 152{,}02\% \end{bmatrix}.$$

Następnie macierz **VCV** jest mnożona przez macierz wag. Wynikiem jest macierz **WVCV**:

$$\begin{bmatrix} 26\% & 20\% & 22\% & 17\% & 15\% \end{bmatrix} \times$$

$$\times \begin{bmatrix} 55{,}42\% & 23{,}28\% & 45{,}44\% & 7{,}20\% & 21{,}06\% \\ 32{,}82\% & 78{,}15\% & 35{,}95\% & -61{,}47\% & -32{,}82\% \\ 34{,}79\% & 19{,}52\% & 42{,}43\% & 0{,}42\% & 5{,}09\% \\ 16{,}89\% & -102{,}65\% & 1{,}30\% & 129{,}94\% & 2{,}60\% \\ 57{,}77\% & -63{,}85\% & 18{,}24\% & 3{,}04\% & 152{,}02\% \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 40\% & -1\% & 31\% & 12\% & 23\% \end{bmatrix}.$$

Kolejny etapem jest przemnożenie macierzy **WVCV** przez transponowaną macierz wag. Wynik, to macierz **WVCVW'**:

$$\begin{bmatrix} 40\% & -1\% & 31\% & 12\% & 23\% \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 26\% \\ 20\% \\ 22\% \\ 17\% \\ 15\% \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 26{,}28\% \end{bmatrix}.$$

Wyciągnięty pierwiastek z **WVCVW'** daje wynik dla VaR zdywersyfikowanego:

$$\sqrt{\mathrm{WVCVW'}} = 48\%.$$

W celu oszacowania wartości zagrożonej niezdywersyfikowanej potrzebna jest macierz wag oraz skorygowana macierz zmienności. Wynikiem mnożenia tych dwóch macierzy jest macierz **WV**. Suma wartości tej macierzy daje wynik w postaci VaR niezdywersyfikowanego:

$$[26\% \quad 20\% \quad 22\% \quad 17\% \quad 15\%]\begin{bmatrix} 74\% & 0\% & 0\% & 0\% & 0\% \\ 0\% & 88\% & 0\% & 0\% & 0\% \\ 0\% & 0\% & 65\% & 0\% & 0\% \\ 0\% & 0\% & 0\% & 114\% & 0\% \\ 0\% & 0\% & 0\% & 0\% & 123\% \end{bmatrix} =$$

$$= [19\% \quad 18\% \quad 14\% \quad 19\% \quad 18\%].$$

Suma elementów macierzy **WV** daje wynik dla VaR niezdywersyfikowanego:

$$\text{VaR}_{\alpha} = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 89\%.$$

Na podstawie przeprowadzonych wyżej obliczeń można stwierdzić, że wartość VaR dla portfela zdywersyfikowanego zależy od konstrukcji portfela, tzn. udziału poszczególnych aktywów w portfelu, efektów korelacyjnych zachodzących pomiędzy aktywami, zmienności aktywów wchodzących w skład portfela inwestycyjnego oraz przyjętego poziomu ufności, które służy korekcie dla macierzy zmienności. Udział poszczególnych aktywów w dużej mierze będzie związany z informacją na temat ich zmienności i efektów korelacyjnych przy uwzględnieniu obranej strategii wartości oczekiwanej portfela. Zmienność poszczególnych aktywów jest uwarunkowana informacją na temat zmienności stóp zwrotu poszczególnych aktywów na podstawie danych historycznych ich notowań. Czym większa wartość odchylenia standardowego, tym bardziej wzrasta wartość zagrożona dla wartości zagrożonej zarówno zdywersyfikowanej, jak i niezdywersyfikowanej.

Niewątpliwie, istotny wpływ na wartość VaR zdywersyfikowanego ma korelacja. Wzrost dodatni współczynników korelacyjnych pomiędzy aktywami spowoduje wzrost wartości zagrożonej dla portfela inwestycyjnego. Z kolei w przypadku gdy współczynniki korelacyjne uzyskują znaczące ujemne wartości, to wartość zagrożona w sposób istotny się obniża. Brak jakichkolwiek efektów korelacyjnych spowoduje sytuację, która jest widoczna w przypadku oszacowanej wartości zagrożonej niezdywersyfikowanej. Należy o tym pamiętać szczególnie gdy na giełdzie pojawiają się symptomy krachu. Dążenie w sposób szybki wartości VaR zdywersyfikowanego do wartości VaR niezdywersyfikowanego jest bardzo ważnym sygnałem ostrzegawczym dla decydentów portfela inwestycyjnego (Butler, 1996).

DOI 10.7172/1644-9584.63.2

3. Symulacja z zastosowaniem metody Monte Carlo

Metoda Monte Carlo – nazwa została nadana na cześć słynnej stolicy hazardu w Monako – należy do jednych z najbardziej rozwiniętych metodologii. Symulacja oparta na metodzie Monte Carlo to sposób modelowania matematycznego, stworzony przez polskiego matematyka Stanisława Ulama, który w taki oto sposób opisuje metodę Monte Carlo w *Przygodach matematyka*: „Pomysł ten, nazwany później metodą Monte Carlo, wpadł mi do głowy, kiedy podczas choroby stawiałem pasjanse. Zauważyłem, że znacznie praktyczniejszym sposobem oceniania prawdopodobieństwa ułożenia pasjansa jest wykładanie kart, czyli eksperymentowanie z tym procesem i po prostu zapisywanie procentu wygranych, niż próba obliczenia wszystkich możliwości kombinatorycznych, których liczba rośnie wykładniczo" (Ulam, 1996, s. 225). „Pomysł polegał na wypróbowaniu tysięcy takich możliwości z przypadkowym wybieraniem zdarzenia określającego los neutronu na każdym etapie procesu, przy użyciu «liczb losowych» (...) Po zbadaniu możliwych przebiegów procesu jedynie w kilku tysiącach przypadków będziemy mieli dobra próbkę i przybliżoną odpowiedz na pytanie. Wszystko, czego potrzeba, to metoda tworzenia takich przykładowych przebiegów" (Ulam, 1996, s. 226).

Istotnym elementem w symulacji opartej na metodzie Monte Carlo jest zatem losowanie przypadkowe wielkości charakteryzujących proces – dotyczy to rozkładów procesów zarówno prostych, jak i złożonych. Symulacja składa się z następujących głównych części:
– sformułowania modeli stochastycznych badanych procesów realnych,
– modelowania zmiennych losowych o danym rozkładzie prawdopodobieństwa,
– rozwiązywania problemu statystycznego z zakresu teorii estymacji.

Upraszczając proces, można stwierdzić, że symulacja Monte Carlo umożliwia wygenerowanie tysięcy, a nawet setek tysięcy próbek wyników, co umożliwia wykorzystanie jej do analizy ryzyka, jego kwantyfikacji, analizy wrażliwości, a także prognozy. Warto mieć na uwadze jeszcze jedno przesłanie Stanisława Ulama w tej metodzie: „Cechą metody Monte Carlo jest to, że nigdy nie daje ona dokładnej odpowiedzi; wnioski z niej pokazują raczej, że odpowiedź jest zawarta w pewnym przedziale błędu z takim a takim prawdopodobieństwem" (Ulam, 1996, s. 228). Podstawą zastosowania metody Monte Carlo w symulacji jest znajomość rozkładów prawdopodobieństwa. W przypadku analizy pomiarów metoda Monte Carlo polega na losowaniu wyników pomiarów podlegających założonemu rozkładowi i może być wykorzystywana do symulacji procesu pomiaru.

Matematycznie metodę Monte Carlo można przedstawić, rozważając przykład szacowania całki funkcji f w danym przedziale:

$$\alpha = \int_0^1 f(x)dx, \tag{4}$$

gdzie wartość oczekiwana E [f (U)], gdzie U jest rozkładem jednostajnym zawartym w przedziale od 0 do 1. Przyjmując kolejne wartości U_1, U_2, … w ramach rozkładu jednostajnego z przedziału [0,1], można wykonać wyliczenia funkcji f na n losowych wartościach, a następnie oszacować średnią rezultatów w ramach estymacji metodą Monte Carlo:

$$\hat{\alpha}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(U_i), \tag{5}$$

jeśli f jest rzeczywiście całkowana w przedziale [0,1], wtedy na mocy prawa wielkich liczb

$$\hat{\alpha}_n \to \alpha \text{ z prawdopodobieństwem 1 jako } n \to \propto,$$

jeśli f jest zatem całkowalna dla funkcji kwadratowej, to otrzymujemy

$$\sigma_f^2 = \int_0^1 (f(x) - \alpha)^2 \, dx, \tag{6}$$

wtedy błąd $\hat{\alpha}_n \to \alpha$ w ramach estymacji metodą Monte Carlo aproksymowany jest do rozkładu normalnego z średnią 0 i odchyleniem standardowym $\sigma_f / \sqrt{n}$, a jakość aproksymacji poprawia się wraz ze wzrostem n. Parametr σ_f, który jest nieznany w odniesieniu do α, może być oszacowany za pomocą wzoru na odchylenie standardowe próbki:

$$S_f = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n} (f(U_i) - \hat{\alpha})^2. \tag{7}$$

Stąd, z wartości funkcji f (U_1),… f (U_n) uzyskujemy nie tylko oszacowanie całki dla parametru α, ale także pomiar błędu obliczeń (Glasserman, 2003).

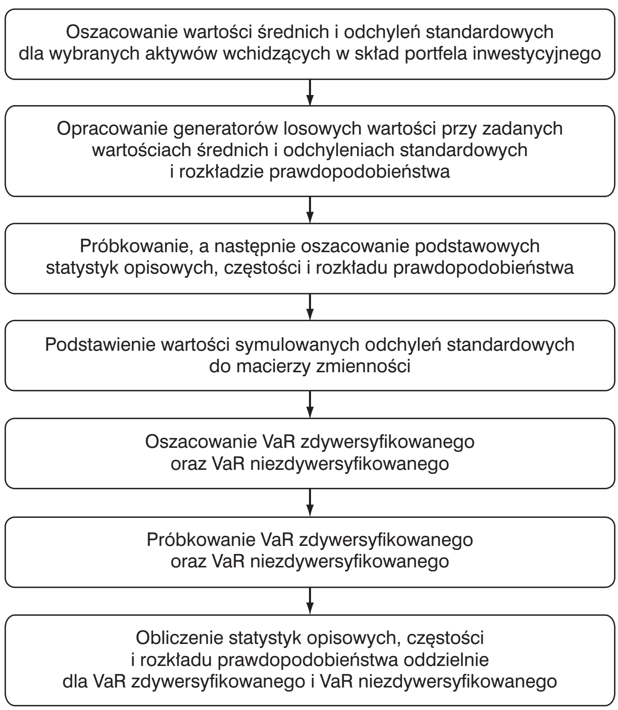
4. Symulacja Monte Carlo VaR portfela zdywersyfikowanego i niezdywersyfikowanego

Przeprowadzenie symulacji Monte Carlo dla portfela zdywersyfikowanego i niezdywersyfikowanego wymaga zastosowania określonego algorytmu obliczeniowego, który sprowadza się do realizacji poszczególnych etapów:

1. Aktywa wchodzące w skład portfela inwestycyjnego są analizowane ze względu na notowania kursu. Istotnym aspektem jest określenie historycznego fragmentu czasowego, jaki będzie uwzględniony do szacowania poszczególnych miar statystycznych. Ważna jest też stosowana miara czasu.

 DOI 10.7172/1644-9584.63.2

2. Kolejnym etapem jest oszacowanie miar statystycznych, takich jak wartość średnia, wariancja i odchylenie standardowe, współczynnik zmienności dla każdego aktywa wchodzącego w skład portfela inwestycyjnego. Rozpatrywaną wartością jest w tym przypadku stopa zwrotu z inwestycji wyrażona w postaci szeregu czasowego przy uwzględnieniu określonej miary czasu.
3. Następnie, posiadając wartość średnią oraz odchylenia standardowego dla każdego aktywa wchodzącego w skład portfela inwestycyjnego za pomocą liczb losowych o rozkładzie jednostajnym oraz funkcji rozkładu normalnego, tworzymy dla każdego z osobna aktywa generator losowy, przy pomocy którego przeprowadzamy próbkowanie.
4. Po utworzeniu odpowiedniej liczebnej próby dla każdego aktywa wchodzącego w skład portfela inwestycyjnego budujemy przedział w celu wyznaczenia częstości oraz szacujemy funkcję prawdopodobieństwa dla przyjętego w założeniach rozkładu statystycznego. W rozpatrywanym przypadku jest to rozkład normalny.
5. Kolejnym etapem jest oszacowanie podstawowych statystyk opisowych dla każdej przeprowadzonej symulacji. Na podstawie opracowanej próby otrzymanej z symulacji Monte Carlo obliczamy wartość średnią, wariancję,



Rys. 1. Schemat realizacji dla symulacji VaR zdywersyfikowanego i niezdywersyfikowanego. Źródło: opracowanie własne.

odchylenie standardowe, współczynnik zmienności, wartość maksymalną, wartość minimalną, przedział ufności.
6. Oszacowane wartości odchyleń standardowych z poszczególnych symulacji są wstawiane do macierzy zmienności. Następnie macierze zmienności jest korygowana o wartość odczytaną z tablic rozkładu normalnego przy zadanym poziomie ufności.
7. W przypadku przyjęcia założenia o niezmienianiu współczynników korelacji należy oszacować VaR zdywersyfikowany oraz VaR niezdywersyfikowany. W przypadku gdy współczynniki zmienności z statystyk opisowych są większe niż 10%, należy oszacować współczynniki korelacji na nowo na podstawie zasymulowanych próbek poszczególnych aktywów.
8. Wynik VaR zdywersyfikowanego oraz VaR niezdywersyfikowanego należy oddzielnie spróbować i obliczyć statystki opisowe, tzn. średnią, wariancję, odchylenie standardowe, współczynnik zmienności, wartość maksymalną, wartość minimalną, przedział ufności.
9. Wynik symulacji należy porównać z wynikami referencyjnymi.

Poniżej przedstawiono przykładową symulację Monte Carlo dla VaR zdywersyfikowanego składającego się pięciu aktywów:

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} 39\% & 16\% & 19\% & 10\% & 16\% \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} 6\% & 0\% & 0\% & 0\% & 0\% \\ 0\% & 5\% & 0\% & 0\% & 0\% \\ 0\% & 0\% & 5\% & 0\% & 0\% \\ 0\% & 0\% & 0\% & 11\% & 0\% \\ 0\% & 0\% & 0\% & 0\% & 4\% \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0{,}32 & 0{,}72 & 0{,}11 & 0{,}58 \\ 0{,}32 & 1 & 0{,}56 & -0{,}89 & -0{,}46 \\ 0{,}72 & 0{,}56 & 1 & 0{,}15 & 0{,}19 \\ 0{,}11 & -0{,}89 & 0{,}15 & 1 & 0{,}05 \\ 0{,}58 & -0{,}46 & 0{,}19 & 0{,}05 & 1 \end{bmatrix}.$$

W celu przeprowadzenia wyliczeń VaR zdywersyfikowanego i niezdywersyfikowanego dokonujemy skorygowania macierzy zmienności przy poziomie ufności 0,99 o wartość odczytaną z tablic rozkładu normalnego równą 2,3263:

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} 15\% & 0\% & 0\% & 0\% & 0\% \\ 0\% & 12\% & 0\% & 0\% & 0\% \\ 0\% & 0\% & 12\% & 0\% & 0\% \\ 0\% & 0\% & 0\% & 25\% & 0\% \\ 0\% & 0\% & 0\% & 0\% & 9\% \end{bmatrix}.$$

 DOI 10.7172/1644-9584.63.2

Następnie przeprowadzamy obliczenia macierzy **VC**:

$$\begin{bmatrix} 15\% & 0\% & 0\% & 0\% & 0\% \\ 0\% & 12\% & 0\% & 0\% & 0\% \\ 0\% & 0\% & 12\% & 0\% & 0\% \\ 0\% & 0\% & 0\% & 25\% & 0\% \\ 0\% & 0\% & 0\% & 0\% & 9\% \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0{,}32 & 0{,}72 & 0{,}11 & 0{,}58 \\ 0{,}32 & 1 & 0{,}56 & -0{,}89 & -0{,}46 \\ 0{,}72 & 0{,}56 & 1 & 0{,}15 & 0{,}19 \\ 0{,}11 & -0{,}89 & 0{,}15 & 1 & 0{,}05 \\ 0{,}58 & -0{,}46 & 0{,}19 & 0{,}05 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 15\% & 5\% & 11\% & 2\% & 9\% \\ 9\% & 12\% & 7\% & -11\% & -6\% \\ 4\% & 7\% & 12\% & 2\% & 2\% \\ 3\% & -22\% & 4\% & 25\% & 1\% \\ 5\% & -4\% & 2\% & 0\% & 9\% \end{bmatrix}.$$

Macierz **VC** mnożona jest przez macierz zmienności. Wynikiem jest macierz **VCV**:

$$\begin{bmatrix} 15\% & 5\% & 11\% & 2\% & 9\% \\ 9\% & 12\% & 7\% & -11\% & -6\% \\ 4\% & 7\% & 12\% & 2\% & 2\% \\ 3\% & -22\% & 4\% & 25\% & 1\% \\ 5\% & -4\% & 2\% & 0\% & 9\% \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 15\% & 0\% & 0\% & 0\% & 0\% \\ 0\% & 12\% & 0\% & 0\% & 0\% \\ 0\% & 0\% & 12\% & 0\% & 0\% \\ 0\% & 0\% & 0\% & 25\% & 0\% \\ 0\% & 0\% & 0\% & 0\% & 9\% \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2\% & 1\% & 1\% & 0\% & 1\% \\ 1\% & 1\% & 1\% & -3\% & -1\% \\ 1\% & 1\% & 1\% & 0\% & 0\% \\ 0\% & -3\% & 0\% & 6\% & 0\% \\ 1\% & -1\% & 0\% & 0\% & 1\% \end{bmatrix}.$$

Następnie macierz **VCV** jest mnożona przez macierz wag. Wynikiem jest macierz **WVCV**:

$$\begin{bmatrix} 39\% & 16\% & 19\% & 10\% & 16\% \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2\% & 1\% & 1\% & 0\% & 1\% \\ 1\% & 1\% & 1\% & -3\% & -1\% \\ 1\% & 1\% & 1\% & 0\% & 0\% \\ 0\% & -3\% & 0\% & 6\% & 0\% \\ 1\% & -1\% & 0\% & 0\% & 1\% \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1{,}35\% & 0{,}26\% & 0{,}98\% & 0{,}46\% & 0{,}42\% \end{bmatrix}.$$

Kolejny etapem jest przemnożenie macierzy **WVCV** przez transponowaną macierz wag. Wynik, to macierz **WVCVW'**:

$$\begin{bmatrix}1{,}35\% & 0{,}26\% & 0{,}98\% & 0{,}46\% & 0{,}42\%\end{bmatrix}\begin{bmatrix}39\%\\16\%\\19\%\\10\%\\16\%\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0{,}87\%\end{bmatrix}.$$

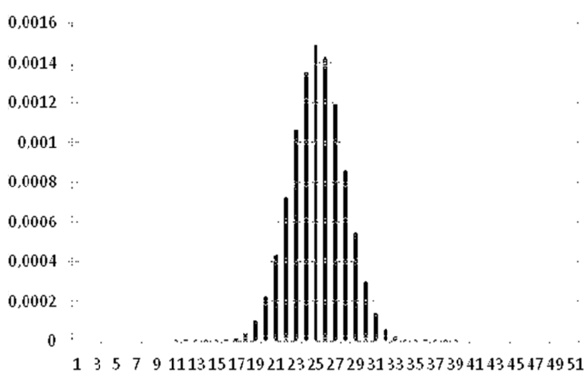
Wyciągnięty pierwiastek z **WVCVW'** daje wynik dla VaR zdywersyfikowanego:

$$\sqrt{\mathbf{WVCVW'}} = 9\%.$$

W ramach symulacji Monte Carlo wynik jest próbkowany, a następnie szacowane są podstawowe statystyki opisowe (tabela 1). Na rysunku 2 przedstawiono też wykres częstości.

VaR MC	
Średnia	92989,2668
Błąd standardowy	11,80827063
Mediana	92915,40292
Odchylenie standardowe	264,0409582
Wariancja próbki	69717,62758
Kurtoza	14,50267903
Skośność	2,720950034
Zakres	2623,025375
Minimum	92703,89716
Maksimum	95326,92254
Suma	46494633,4
Licznik	500
Poziom ufności (99,0%)	30,53285383

Tab. 1. Podstawowe statystyki opisowe otrzymane z próby w ramach symulacji Monte Carlo dla $n = 500$. Źródło: opracowanie własne.



Rys. 2. Oszacowana częstość na podstawie przeprowadzonej symulacji Monte Carlo. Źródło: opracowanie własne.

 DOI 10.7172/1644-9584.63.2

5. Dalsze kierunki badań

Zastosowanie metody Monte Carlo nie ogranicza się tylko do symulacji portfela inwestycyjnego opartego na takich aktywach, jak akcje, indeksy, waluty. Metodologia Value at Risk jest obecnie cały czas rozbudowywana o nowe zastosowania w obszarze inwestycyjnym, tworząc tym samym szeroki obszar badawczy. Interesującym aspektem badawczym są możliwe zastosowania symulacji Monte Carlo wraz z metodologią VaR w obszarze analizy ryzyka kredytowego oraz kredytowych instrumentów pochodnych szczególnie opartych na obligacjach korporacyjnych.

Wyniki przeprowadzonego badania przez Białek-Jaworska i Krawczyk (2015) wskazują na dodatni wpływ zmienności stóp zwrotu akcji na udział wielkości emisji obligacji korporacyjnych w sumie bilansowej, a silny ujemny wpływ na substytucyjność długu publicznego (emisji obligacji korporacyjnych) i prywatnego (zadłużenia w banku). Wyższe ryzyko inwestycyjne towarzyszące relatywnie większym emisjom obligacji korporacyjnych (w stosunku do aktywów ogółem) wywołuje potrzebę stworzenia alternatywnych modeli wyceny Value at Risk dla obligacji korporacyjnych i kredytowych instrumentów pochodnych, tym bardziej ze względu na brak ratingów kredytowych emitentów instrumentów dłużnych. Spółki o średnich ratingach kredytowych (od BB do B–), ustalonych według modelu Altmana dla Polski (Z" score for Emerging Markets, wykorzystywanych przez StockWatch.pl) emitują relatywnie więcej obligacji korporacyjnych w stosunku do aktywów niż spółki o najlepszych ratingach kredytowych (od AAA do BBB). Natomiast spółki o najgorszych ratingach kredytowych (od CCC to D) bardziej zadłużają się w banku w relacji do aktywów ogółem (Białek-Jaworska i Krawczyk, 2015).

W ramach wybranych kredytowych instrumentów pochodnych istnieją możliwości rozwinięcia badań nad zastosowaniem pogłębionej metody Monte Carlo nad instrumentem CDS (Credit Default Swap). Obszarem do pogłębionych badań jest w tym przypadku budowa metodologii łączących ten instrument z aktywami przedsiębiorstwa przy wykorzystaniu metody Monte Carlo oraz VaR (Krawczyk, 2013).

Innym interesującym obszarem badań nad wykorzystaniem metody Monte Carlo w ramach szeroko pojętej metodologii wartości zagrożonej jest możliwość zastosowań szeregów czasowych. Dotychczasowe badania prowadzone w tym zakresie pokazują możliwość wykorzystania takich modeli szeregów czasowych, jak modele autoregresji i średniej ruchomej (ARiMA) oraz modele ogólnej heteroskedastyczności warunkowej (GARCH). Zwłaszcza modele GARCH wraz z specjalnymi odmianami pozwalają na oszacowanie w sposób dokładniejszy parametrów zmienności, które pełnią istotną funkcję w obliczeniach VaR. Zastosowanie modeli szeregów czasowych w zestawieniu z metodą Monte Carlo oraz wartością zagrożoną pozwala na budowę licznych odmian systemów zarządzania ryzykiem, które będą wymagały prowadzenia dalszych badań.

6. Zakończenie

W artykule przedstawiono możliwości zastosowania symulacji Monte Carlo w ramach wartości zagrożonej zdywersyfikowanej oraz niezdywersyfikowanej dla portfela inwestycyjnego. Przedstawione zastosowania symulacji Monte Carlo w koncepcji VaR portfela inwestycyjnego ukazują możliwości tworzenia systemów zarządzania ryzykiem inwestycyjnym. W szczególności zastosowanie symulacji Monte Carlo na przykładzie VaR portfela zdywersyfikowanego oraz niezdywersyfikowanego otwiera możliwości na prowadzenie badań nad innymi zastosowaniami VaR wraz z metodą Monte Carlo w zagadnieniach dotyczących ryzyka kredytowego oraz kredytowych instrumentów pochodnych.

Bibliografia

Białek-Jaworska, A. i Krawczyk, T. (2015). Corporate Bonds or Bank Loans? The Choice of Funding Sources and Information Disclosure of Polish Listed Companies. *Argumenta Oeconomica* (in review).

Butler, C. (1998). *Mastering Value Risk*. London: Prentice Hall.

Glasserman, P. (2003). *Monte Carlo Methods in Financial Engineering*. New York: Springer.

Krawczyk, T. (2013). *Metoda Monte Carlo w procesie inwestycyjnym. Zastosowania praktyczne w Microsoft Excel*. Warszawa: Witkom.

Ulam, S.M. (1996). *Przygody matematyka*. Warszawa: Prószyński i S-ka.

 DOI 10.7172/1644-9584.63.2