Andrzej Paweł Wejland

Interrogacyjne badanie prestiżu zawodów : analiza uporządkowań jednostkowych

Przegląd Socjologiczny Sociological Review 37, 141-162

1989

PRZEGLĄD SOCJOLOGICZNY, T. XXXVII
PL ISSN 0033-2356

ANDRZEJ P. WEJLAND – ŁÓDŹ

INTERROGACYJNE BADANIE PRESTIŻU ZAWODÓW ANALIZA UPORZĄDKOWAŃ JEDNOSTKOWYCH

Treść: Wprowadzenie. – Uporządkowanie w ogóle i uporządkowanie zawodów pod względem prestiżu. – Pomiar porządkowy w ogóle i pomiar porządkowy zawodów pod względem prestiżu. – Rezultaty porządkowania i porównywania parami a zagadnienie przechodniości. – Prosta metoda pomiaru porządkowego. – Złożona metoda pomiaru porządkowego. – Zakończenie.

WPROWADZENIE

Poświęcimy te rozważania pomiarowi danych uzyskiwanych od pojedynczych respondentów przy użyciu porządkowania lub porównywania parami – dwóch podstawowych procedur interrogacyjnych służących określaniu w zbiorze zawodów uporządkowania pod względem prestiżu. Interesować nas będzie możliwość matematycznego opisu uporządkowań jednostkowych, czyli uzyskiwanych od poszczególnych respondentów oraz możliwość matematycznego ustalania uporządkowań w sytuacji, gdy sami respondenci wprost ich nie określają[1].

UPORZĄDKOWANIE W OGÓLE I UPORZĄDKOWANIE ZAWODÓW POD WZGLĘDEM PRESTIŻU

Zacznijmy od przypomnienia, w jaki sposób wprowadzamy pojęcie uporządkowania zbioru pod pewnym względem i jak następnie stosujemy je do uściślenia pojęcia uporządkowania zbioru zawodów pod względem prestiżu.

---

[1] Rozważania tu zawarte są kontynuacją analiz podjętych przez nas w artykule *Interrogacyjne badanie prestiżu zawodów. Założenia pojęciowe i podstawowe procedury*, „Przegląd Socjologiczny", 1979, t. XXXI/1, s. 33-45. Posługujemy się określonym tam aparatem pojęciowym i odwołujemy się do wprowadzanych tam ustaleń teoretycznych. Obecnie używamy jedynie – bo tego wymaga od nas sam przedmiot rozważań – nieco dokładniejszych oznaczeń formalnych.

Dany jest zbiór A o elementach $a_1, \ldots, a_t$. Zakładamy, że elementy zbioru A można porównywać pod względem W.

Rozważamy relację $\succcurlyeq$ taką, że $a_i \succcurlyeq a_j$ oznacza, iż element a_i jest pod względem W oceniany nie niżej (co najmniej tak jak) element a_j. Relacja $\succcurlyeq$ jest relacją zwrotną: dla każdego elementu a_i ze zbioru A : $a_i \succcurlyeq a_i$.

Przy spełnieniu dwóch warunków:

1) dla każdej pary elementów a_i, a_j ze zbioru A: $a_i \succcurlyeq a_j$ lub $a_j \succcurlyeq a_i$,

2) jeśli $a_i \succcurlyeq a_j$ oraz $a_j \succcurlyeq a_k$, to $a_i \succcurlyeq a_k$

relację $\succcurlyeq$ nazywa się uporządkowaniem w zbiorze A.

Warunek pierwszy mówi, że relacja $\succcurlyeq$ jest spójna w zbiorze A. Zapewnia to porównywalność każdych dwóch elementów tego zbioru.

Warunek drugi głosi, że relacja $\succcurlyeq$ jest przechodnia w zbiorze A. Gwarantuje to zgodność porównań jego elementów.

Definiuje się dwie relacje:

a) $\succ$ taką, że $a_i \succ a_j$ oznacza, iż $a_i \succcurlyeq a_j$ oraz nieprawda, że $a_j \succcurlyeq a_i$,

b) $\sim$ taką, że $a_i \sim a_j$ oznacza, iż $a_i \succcurlyeq a_j$ oraz $a_j \succcurlyeq a_i$.

Relację $\succ$ będziemy nazywać relacją wyprzedzania.

Relację $\sim$ nazwiemy relacją nieodróżnialności.

Zbiór A z określoną na nim relacją uporządowania bądź z określonymi na nim relacjami wyprzedzania i nieodróżnialności nazywamy zbiorem uporządkowanym[2].

Mamy pewien zbiór zawodów. By mówić, że jest on uporządkowany pod względem prestiżu, trzeba najpierw zgodzić się na to, że relacja prestiżu zachodzi między każdym zawodem z tego zbioru a nim samym, a więc że może on być sam ze sobą pod tym względem porównywany. Następnie trzeba przyjąć, że zachodzi ona między dowolnymi dwoma różnymi zawodami, czyli że każde dwa różne zawody są porównywalne pod względem prestiżu oraz że między dowolnymi trzema różnymi zawodami zachodzi ona w sposób zgodny, a zatem że mogą być one porównywane tak, by zgodność porównań została zachowana. Tym samym relację uporządkowania pod względem prestiżu w zbiorze zawodów interpretuje się jako zwrotną, spójną i przechodnią.

POMIAR PORZĄDKOWY W OGÓLE I POMIAR PORZĄDKOWY ZAWODÓW POD WZGLĘDEM PRESTIŻU

Wprowadzimy pojęcie pomiaru porządkowego, by następnie przyjąć je do objaśnienia pojęcia pomiaru porządkowego zawodów pod względem prestiżu.

---

[2] M. Nowakowska, *Psychologia ilościowa z elementami naukometrii*, Warszawa 1975, s. 198-200. W istocie rozpatrujemy tu relację słabego uporządkowania oraz zbiory słabo uporządkowane.

Dany jest zbiór A z określoną na nim relacją uporządkowania $\succcurlyeq$. Dowodzi się, że istnieje funkcja liczbowa f, określona na A, taka, że $f(a_i) \geqslant f(a_j)$ zawsze i tylko, jeśli $a_i \succcurlyeq a_j$. Stwierdza się tym samym, że funkcja f realizuje homomorfizm, odwzorowujący zbiór A uporządkowany przez relację $\succcurlyeq$ w zbiór liczb rzeczywistych uporządkowany przez relację $\geqslant$, czyli przez relację niemniejszości. Funkcję f nazywa się skalą. Jeśli g jest jakąkolwiek o podanych własnościach funkcją określoną na A, to istnieje taka funkcja monotoniczna F, że dla każdego a ze zbioru A zachodzi g(a) = F(f(a)). Funkcja F nazywa się dopuszczalną transformacją skali. Własności funkcji F wskazują na to, jak można przekształcać funkcję f, aby nowo powstała funkcja była w dalszym ciągu skalą. Funkcja F mająca wskazane własności orzeka, iż f jest skalą porządkową. Pomiar na jej podstawie nazywany jest zatem pomiarem porządkowym.

Jak wiemy, za pomocą relacji $\succcurlyeq$ określonej w zbiorze A można zdefiniować relację wyprzedzania $\succ$ oraz relację nieodróżnialności $\sim$ w tym zbiorze. Odpowiednio do tego, za pomocą relacji $\geqslant$ określonej w zbiorze liczb rzeczywistych można zdefiniować dwie relacje:

a) $>$ taką, że $f(a_i) > f(a_j)$ oznacza, iż $f(a_i) \geqslant f(a_j)$ oraz nieprawda, że $f(a_j) \geqslant f(a_i)$,

b) $=$ taką, że $f(a_i) = f(a_j)$ oznacza, iż $f(a_i) \geqslant f(a_j)$ oraz $f(a_j) \geqslant f(a_i)$.

Relacja $>$ to relacja większości.

Relacja $=$ to relacja równości[3].

Mamy pewien zbiór zawodów. Przyjmując, iż jest on uporządkowany pod względem prestiżu zakładamy, iż wśród każdych dwóch zawodów z tego zbioru jeden jest oceniany nie niżej pod względem prestiżu od drugiego, ponadto zaś że pod tym względem któryś z nich oceniany jest wyżej albo że oba są oceniane tak samo.

Problem pomiaru polega tu na skonstruowaniu funkcji liczbowej f, która byłaby skalą porządkową. Przyporządkowanie zawodom liczb może być przy tym takie,że jeśli w parze zawodów pierwszy jest oceniany nie niżej od drugiego, to liczba przyporządkowana pierwszemu zawodowi jest nie mniejsza od liczby, jaka jest przypisana drugiemu z nich, ponadto zaś jeśli pierwszy z zawodów oceniany jest wyżej niż drugi pod względem prestiżu, to liczba przyporządkowana piewszemu zawodowi jest większa od liczby przyporządkowanej drugiemu zawodowi, natomiast jeśli zawody są oceniane jako równe pod względem prestiżu, to liczby im przyporządkowane też są równe.

---

[3] C. H. Coombs, R. M. Dawes, A. Tversky, *Wprowadzenie do psychologii matematycznej*, Warszawa 1977, rozdz. 2; M. Nowakowska, *op. cit.*, s. 198-200, 204--206; T. Pawłowski, *Pojęcia i metody współczesnej humanistyki*, Wrocław 1977, s. 76-88, 109-116; J. Pfanzagl, *Theory of Measurement*, Würzburg 1971, rozdz. 1.

Aby wyrazić relacje prestiżu zachodzące między zawodami można dobrać różne funkcje liczbowe. Wszystkie one muszą się jednak odznaczać tym, że należą do klasy funkcji liczbowych dopuszczalnych na gruncie pomiaru porządkowego. O wszystkich tych funkcjach liczbowych wiadomo, że mogą wyrażać jedynie uporządkowanie zawodów pod względem prestiżu, nie pozwalają mówić natomiast, o ile bądź ile razy prestiż jednego zawodu jest większy od prestiżu jakiegoś innego zawodu.

REZULTATY PORZĄDKOWANIA I PORÓWNYWANIA PARAMI A ZAGADNIENIE PRZECHODNIOŚCI

W rozważaniach naszych przyjmuje się, iż porządkowanie oraz porównywanie parami są procedurami, które prowadzić mają do określenia w pewnym zbiorze uporządkowania pod jakimś względem.

Jak wiemy, jednym z warunków tego, by w zbiorze A określone było uporządkowanie pod względem W, jest przechodniość relacji $\succcurlyeq$. Jest to warunek definicyjny: gdyby relacji tej nie przysługiwała własność przechodniości, nie byłaby ona uporządkowaniem.

Warunek ten rozpatrzmy na przykładzie. Niech a_i, a_j, a_k będą trzema zawodami. Jeśli pierwszy z tych zawodów jest pod względem prestiżu oceniany nie niżej niż drugi zawód, zaś drugi zawód jest pod tym względem oceniany nie niżej niż trzeci z zawodów, to – by spełniony był warunek przechodniości – pierwszy zawód musi być oceniany nie niżej niż trzeci.

Warunek ten powinien być taże akcpetowany przez respondenta. Jeśli, powiedzmy, zawodowi lekarza przypisuje on prestiż nie niższy niż zawodowi inżyniera, zaś zawód inżyniera ocenia pod względem prestiżu jako stojący nie niżej niż zawód nauczyciela, to oczekujemy od niego, iż zawód lekarza oceni pod tym względem nie niżej niż zawód nauczyciela.

Własność przechodniości przysługuje też relacjom $\succ$ oraz $\sim$, co formułuje się następująco[4]:

a) jeśli $a_i \succ a_j$ oraz $a_j \succ a_k$, to $a_i \succ a_k$, co oznacza, iż jeśli a_i wyprzedza a_j, zaś a_j wyprzedza a_k, to a_i wyprzedza a_k pod danym względem,

b) jeśli $a_i \sim a_j$ oraz $a_j \sim a_k$, to $a_i \sim a_k$, co mówi nam, że jeśli a_i jest nieodróżnialne od a_j, zaś a_j jest nieodróżnialne od a_k, to a_i jest nieodróżnialne od a_k pod danym względem,

c) jeśli $a_i \succ a_j$ oraz $a_j \sim a_k$, to $a_i \succ a_k$, co wskazuje na to, że jeśli a_i wyprzedza a_j, natomiast a_j jest nieodróżnialne od a_k, to a_i wyprzedza a_k pod danym względem.

---

[4] H. Raiffa, *Decision Analysis. Introductory Lectures on Choices under Uncertainty,* Reading, Mass. 1968, rozdz. 4.8.

Odwołujemy się ponownie do przykładu, przyjmując, iż a_i, a_j, a_k są trzema zawodami, zaś względem, pod jakim są oceniane, jest ich społeczny prestiż.

Jeśli pierwszy z tych zawodów (lekarz) jest oceniany wyżej niż drugi (inżynier), a drugi uzyskuje ocenę wyższą niż trzeci (nauczyciel), to pod względem prestiżu zawód pierwszy (lekarz) stoi wyżej niż zawód trzeci (nauczyciel).

Jeśli pierwszy zawód (lekarz) jest tak samo oceniany jak drugi zawód (inżynier), ten zaś tak samo jak trzeci zawód (nauczyciel), to pierwszy i trzeci zawód (lekarz i nauczyciel) mają równe oceny prestiżu.

Jeśli pierwszy zawód (lekarz) jest oceniany wyżej niż drugi (inżynier), natomiast drugi jest oceniany na równi z zawodem trzecim (nauczyciel), to pierwszy z tych zawodów (lekarz) ma prestiż wyższy niż trzeci zawód (nauczyciel).

Warunek ten powinien uzyskać również akceptację respondenta. Od wydawanych przez niego ocen prestiżu oczekiwalibyśmy zachowania przechodniości.

Oczekiwanie, iż respondent będzie akceptował warunek przechodniości, nie zawsze bywa spełniane. Zdarza się, iż respondenci nie akceptują dezyderatu przechodniości: odstępują od niego mając dokonać porządkowania (przez co łamią założenia procedury, niwecząc możliwość określenia wprost uporządkowania w zbiorze) i odchodzą od niego, gdy stoi przed nimi zadanie porównywania parami (na skutek czego procedura staje się niejednoznaczna: prowadzi w pewnych przypadkach wprost do określenia uporządkowania w zbiorze, w innych zaś uporządkowania w zbiorze nie określa).

Wobec pojawiania się ocen nieprzechodnich zająć można dwa odmienne stanowiska, ujawnić dwa odmienne podejścia. Podejścia te zwięźle scharakteryzujemy, odwołując się do istniejących na ten temat rozważań[5].

Pierwsze podejście, normatywne, charakteryzuje wymóg usunięcia nieprzechodniości z ocen wydawanych przez respondenta. Wymóg ten teoretycznie uzasadnia się, traktując zachowanie przechodności ocen

---

[5] C. H. Coombs, R. M. Dawes, A. Tversky, *op. cit.*, s. 33-34, 43-45, 214-235; P. C. Fishburn, *Decision and Value Theory*, New York 1964, rozdz. 4; wyd. ros.: P. K. Fiszbern, *Izmierienije otnositelnych cennostiej*, [w:] *Statisticzeskoje izmierienije kaczestwiennych charakteristik*, J. M. Czetyrkin, (red.), Moskwa 1972, s. 43; A. Granberg, *Problemy przechodniości indywidualnych i grupowych preferencji przy konstruowaniu funkcji celu*, [w:] *Metody ilościowe w socjologii*, W. Szubkin, (red.), Warszawa 1968, s. 98--100; J. Korwin-Mikke, *Teoria decyzji przy podejmowaniu decyzji wieloaspektowych*, [w:] *Metody matematyczne w socjologii. Zagadnienia wybrane*, K. Szaniawski, (red.), Wrocław 1971, s. 82-83; J. Kozielecki, *Problema gruppowogo wybora*, Moskwa 1974, s. 46-57; M. Nowakowska, *op. cit.*, s. 221-223; H. Raiffa, *op. cit.*, A. Tversky, *Intransitivity of Preferences*, „Psychological Review", 1969, 76.

jako równoznaczne z utrzymaniem racjonalności „mechanizmów oceniania". Zakłada się istnienie jednej tylko racjonalności, tej właśnie, która polega na przestrzeganiu warunku przechodniości (tak mocno określonego). Nieprzestrzeganie tego warunku, to wobec tego nieracjonalność: brak logiki w ocenianiu, formułowanie ocen nierozsądnych, sprzecznych, niezgodnych itd. Przy podejściu tym przyjmuje się więc, że „mechanizmy oceniania" oparte być mogą na jednej tylko racjonalnej strategii. Następnie zaś wprowadza się dyrektywę: jeśli respondent operuje strategią, przejawiającą się nieprzechodniością ocen, to „mechanizmy oceniania" należy skorygować – zdefiniować respondentowi warunek przechodniości, zwrócić mu uwagę, iż warunku tego nie przestrzega i ponowić prośbę o wydawanie ocen (powtórzyć porządkowanie lub porównywanie parami). Korekta ta nie wymaga poznania powodów, dla których respondent formułował oceny nieprzechodnie. Konfrontacja dezyderatu przechodności ocen z rzeczywistymi procesami oceniania sprowadza się tu do prostego ustalenia, czy dezyderat ten jest, czy też nie jest spełniany. Respektowanie przez respondenta w ponownym ocenianiu warunku przechodniości pozwala określić uporządkowanie elementów zbioru A pod względem W, a dalej – zastosować prostą metodę pomiaru.

Drugiego podejścia, opisowego, nie charakteryzuje wymóg usunięcia nieprzechodniości z ocen uzyskiwanych od respondenta. Rezygnację z tego wymogu teoretycznie uzasadnia się twierdząc, iż zachowanie przechodniości ocen nie jest równoznaczne z utrzymaniem racjonalności „mechanizmów oceniania". Twierdzi się, że nie istnieje jedna tylko racjonalność, sprowadzająca się do przestrzegania warunku przechodniości (ten zresztą może być określony słabiej). Ktoś nieprzestrzegający tego warunku może jednak posiadać swoistą, różną od tamtej, racjonalność: odrębną logikę w ocenianiu, formułowanie ocen na swój sposób rozsądnych, niesprzecznych, zgodnych itd. Przy podejściu tym zakłada się zatem, iż „mechanizmy oceniania" mogą być oparte na różnych racjonalnych strategiach. Wypływa z tego dyrektywa: jeśli respondent operuje strategią objawiającą się nieprzechodniością ocen, to „mechanizmów oceniania" nie trzeba korygować – nie trzeba prezentować respondentowi warunku przechodniości, można darować sobie zwracanie mu uwagi, iż warunku tego nie przestrzega i nie ponawiać prośby o wydawanie ocen (nie powtarzać porządkowania lub porównywania parami). Nie czyniąc takiej korekty można jednak zagłębić się w powody, dla których respondent dawał oceny nieprzechodnie. Konfrontacja dezyderatu przechodniości ocen z faktycznymi procesami oceniania ujawnić może nie tylko to, czy dezyderat ten jest spełniany, ale i to, dlaczego bywa on niespełniany. Może się okazać, iż nieprzechodniość ocen, zwłaszcza nieprzechodniość relacji nieodróżnialności, wiąże się z tym, że oceniając elementy zbioru A pod względem W, respondent w różnych fazach oceniania stosuje któryś z względów $W_1,...,W_n$, ściśle między sobą związanych, stanowiących pewne „wymiary" względu W (takim wielowymiarowym względem jest zapewne, np. prestiż społeczny). Możemy dojść do tego, iż nieprzechodniość ocen pojawia się wówczas, gdy sytuacja oceniana jest dla respondenta obojętna, gdy wybór – nie angażując jego osobistych zainteresowań – nie skłania do uściślenia zajmowanego stanowiska. Ale może też wyjść na jaw, iż respondent po prostu postępuje niekonsekwentnie, nie stosuje żadnej uchwytnej strategii oceniania, popełnia pomyłki i niedopatrzenia. Nierespektowanie przez respondenta w ocenianiu warunku przechodniości nie pozwala co prawda określić wprost uporządkowania elementów zbioru A pod względem W, lecz – przez zastosowanie złożonej metody pomiaru – uzyskujemy możliwość określenia w zbiorze A uporządkowania elementów pod względem W*, będącym pewnym korelatem W.

Obie metody pomiaru – prostą i złożoną – przedstawimy w dalszym ciągu tych rozważań.

PROSTA METODA POMIARU PORZĄDKOWEGO

1. REZULTATY PORZĄDKOWANIA I METODA ICH POMIARU PRZYPISYWANIE RANG W PORZĄDKOWANIU ZAWODÓW POD WZGLĘDEM PRESTIŻU

Powiemy najpierw, co uważa się za rezultaty porządkowania w obu jego zasadniczych wariantach. Określimy dla każdego z tych wariantów rezultaty porządkowania w badaniu prestiżu zawodów. Rozpatrzymy następnie przypisywanie rang jako pewną prostą metodę porządkowego pomiaru rezultatów porządkowania.

Jako rezultaty porządkowania w pierwszym wariancie uzyskuje się ciąg t elementów zbioru A, między którymi w określony sposób zachodzi relacja uporządkowania:

$$a_1 \succcurlyeq a_2 \succcurlyeq \dots \succcurlyeq a_{t-1} \succcurlyeq a_t$$

W ciągu tym elementy zbioru A ponumerowano tak, że numer pierwszy otrzymał element, który jest oceniany nie niżej niż wszystkie pozostałe elementy zbioru, element o numerze drugim jest oceniany nie niżej niż wszystkie elementy z wyjątkiem pierwszego, itd. Numeracja ta zależna jest zatem od zachodzenia między elementami relacji uporządkowania. Wszystkie elementy zbioru A mogą być ponadto ponumerowane wstępnie (numeracja związana jest wtedy jedynie z identyfikującym oznaczeniem elementów zbioru A).

W przypadku badania prestiżu zawodów elementami ciągu są poszczególne zawody ze zbioru poddanego porządkowaniu. Ciąg ten określa uporządkowanie zawodów pod względem prestiżu. Dowiadujemy się, że o zawodzie oznaczonym numerem pierwszym respondent powiedział, iż ma on prestiż nie niższy niż każdy inny zawód z przedstawionego mu zbioru, zawód opatrzony numerem drugim wskazał jako ten, który ma nie niższy prestiż niż wszystkie zawody z wyjątkiem pierwszego itd.

Jako rezultat porządkowania w drugim wariancie otrzymuje się ciąg t elementów zbioru A, między którymi w określony sposób zachodzą relacje wyprzedzania lub nieodróżnialności, np.:

$$a_1 \succ a_2 \succ a_3 \sim a_4 \sim a_5 \succ \dots \succ a_{t-1} \sim a_t$$

W ciągu tym elementy zbioru A zostały ponumerowane tak, że numer pierwszy otrzymał element, który wyprzedza każdy inny element zbioru, numer drugi – element, który wyprzedza wszystkie elementy z wyjątkiem pierwszego, kolejne trzy elementy są nieodróżnialne pod danym względem, podobnie jak dwa elementy opatrzone ostatnimi numerami. Numeracja ta zależna jest więc od zachodzenia między elementami relacji wyprzedzania lub nieodróżnialności. Wszystkie elementy zbioru A mogą być prócz tego ponumerowane wstępnie (numeracja ma wtedy związek wyłącznie z identyfikującym oznaczeniem elementów zbioru A).

W przypadku badania prestiżu zawodów elementy ciągu, to zawody ze zbioru objętego porządkowaniem. Ciąg ten ustalałby uporządkowanie zawodów pod względem prestiżu. Uzyskujemy informację, że zawód oznaczony numerem pierwszym wskazany został przez respondenta jako zawód o prestiżu wyższym niż prestiż jakiegokolwiek innego zawodu z przedłożonego mu zbioru, zawód z numerem drugim ma jego zdaniem prestiż wyższy niż wszystkie zawody z wyjątkiem pierwszego, trzem następnym zawodom respondent przypisał równy prestiż, tak samo jak zawodom oznaczonym dwoma ostatnimi numerami.

Pomiaru rezultatów porządkowania dokonuje się przez przyporządkowanie ciągowi elementów pewnego ciągu liczb. Ma to być przy tym taki ciąg liczb, byśmy o pomiarze mogli mówić, iż ma charakter porządkowy.

Przy pierwszym wariancie porządkowania elementom ciągu:

$$a_1 \succcurlyeq a_2 \succcurlyeq \dots \succcurlyeq a_{t-1} \succcurlyeq a_t$$

można przyporządkować liczby z ciągu:

$$f(a_1) \geqslant f(a_2) \geqslant \dots \geqslant f(a_{t-1}) \geqslant f(a_t)$$

Oznaczmy $f(a_i)$ przez r_i. Wówczas ciąg liczbowy zapiszemy:

$$r_1 \geqslant r_2 \geqslant \dots \geqslant r_{t-1} \geqslant r_t$$

Przy drugim wariancie porządkowania elementom ciągu, np.:

$$a_1 \succ a_2 \succ a_3 \sim a_4 \sim a_5 \succ \dots \succ a_{t-1} \sim a_t$$

można przyporządkować liczby z ciągu:

$$f(a_1) > f(a_2) > f(a_3) = f(a_4) = f(a_5) > \dots > f(a_{t-1}) = f(a_t)$$

Oznaczmy $f(a_i)$ przez r_i. Ciąg liczbowy zapisujemy wobec tego:

$$r_1 > r_2 > r_3 = r_4 = r_5 > \dots > r_{t-1} = r_t$$

W praktyce reprezentacją dla ciągu elementów bywa ciąg liczb wymiernych. Liczby przypisywane kolejnym elementom nazywa się ich rangami.

Jeśli stosowany jest pierwszy wariant porządkowania, to rangami elementów czyni się dodatnie liczby całkowite, ułożone w kolejności odwrotnej do kolejności, w jakiej ponumerowane są elementy w ciągu:

$$r_1 = t, r_2 = t\text{-}1, \ldots, r_{t\text{-}1} = 2, r_t = 1$$

Zauważmy, iż elementowi, który oceniany jest nie niżej niż wszystkie inne elementy zbioru, a więc elementowi ocenianemu najwyżej, przypisana jest tu ranga pierwsza, lecz o wartości liczbowej najwyższej (przy oznaczeniu elementów ciągu za pomocą rosnących numerów 1 ... t).

Ciągowi elementów może być jednak przyporządkowany również odwrotny ciąg liczbowy:

$$f(a_1) \leqslant f(a_2) \leqslant \ldots \leqslant f(a_{t\text{-}1}) \leqslant f(a_t)$$

czyli

$$r_1 \leqslant r_2 \leqslant \ldots \leqslant r_{t\text{-}1} \leqslant r_t$$

Wtedy rangami mogą być dodatnie liczby całkowite ułożone odwrotnie (rangę elementu czyni się równą numerowi tego elementu w ciągu):

$$r_1 = 1, r_2 = 2, \ldots, r_{t\text{-}1} = t\text{-}1, r_t = t$$

Elementowi ocenianemu najwyżej przypisywałoby się w tym przypadku rangę pierwszą, lecz o wartości liczbowej najniższej.

Jeśli stosowany jest drugi wariant porządkowania, to elementom przypisuje się rangi podobnie, z tą jednak różnicą, że elementom nieodróżnialnym przyznaje się jedną rangę (tzw. ranga łączna lub wiązana). Rangami są tu dodatnie liczby całkowite lub ułamkowe:

$$r_1 = t, r_2 = t\text{–}1, r_3 = r_4 = r_5 = \frac{(t-2) + (t-3) + (t-4)}{3}, \ldots, r_{t\text{-}1} = r_t = \frac{2+1}{2} = 1{,}5$$

Zwróćmy uwagę na to, że elementowi ocenianemu nie niżej niż wszystkie pozostałe elementy zbioru, a więc ocenianemu najwyżej, przypisaliśmy tutaj rangę pierwszą, lecz o wartości liczbowej najwyższej (przy oznaczeniu elementów ciągu za pomocą rosnących numerów 1... t).

Tu także ciągowi elementów można jednak przyporządkować odwrotny ciąg liczbowy:

$$f(a_1) < f(a_2) < f(a_3) = f(a_4) = f(a_5) < \ldots < f(a_{t\text{-}1}) = f(a_t)$$

czyli

$$r_1 < r_2 < r_3 = r_4 = r_5 < \ldots < r_{t\text{-}1} = r_t$$

Wówczas rangami będą dodatnie liczby całkowite lub ułamkowe ustawione na odwrót (ranga elementów nieodróżnialnych równa jest średniej arytmetycznej numerów tych elementów w ciągu):

$$r_1 = 1, r_2 = 2, r_3 = r_4 = r_5 = \frac{3+4+5}{3} = 4, \ldots, r_{t\text{-}1} = r_t = \frac{(t-1)+t}{2}$$

Elementowi ocenianemu najwyżej przyznano tym razem rangę pierwszą, ale o wartości liczbowej najniższej.

Wspomnijmy na koniec, iż rangi może przypisywać respondent w trakcie porządkowania bądź też mogą być one przypisywane niezależnie[6].

2. REZULTATY PORÓWNYWANIA PARAMI I METODA ICH POMIARU PRZYPISYWANIE RANG W PORÓWNYWANIU PARAMI ZAWODÓW POD WZGLĘDEM PRESTIŻU

Pokażemy, co traktuje się jako rezultaty porównywania parami w obu jego zasadniczych wariantach. Określimy dla każdego z tych wariantów rezultaty porównywania parami w badaniu prestiżu zawodów. Zaznajomimy się z kolei z przypisywaniem rang jako pewną prostą metodą porządkowego pomiaru rezultatów porównywania parami.

Rezultatem porównywania parami w pierwszym wariancie jest zbiór t^2 par elementów zbioru A, między którymi w określony sposób zachodzi relacja uporządkowania:

$$a_i \succcurlyeq a_j$$

Wszystkie elementy zbioru A mogą być wstępnie ponumerowane. W przypadku, gdy porównania elementów w parach okazują się przechodnie, od zbioru par można przejść do ciągu t elementów zbioru A, między którymi w określony sposób zachodzi realacja uporządkowania:

$$a_1 \succcurlyeq a_2 \succcurlyeq \ldots \succcurlyeq a_{t-1} \succcurlyeq a_t$$

Numeracja elementów ciągu $a_1,...,a_t$ określona jest tutaj przez relację uporządkowania, podczas gdy numeracja wstępna od zachodzenia tej relacji jest niezależna. Druga z tych numeracji czyniona jest zwykle w tym celu, by sporządzając rejestr par elementów zbioru A nie pominąć jakiejś pary, by więc porównywać między sobą wszystkie elementy zbioru A.

Jeśli badamy prestiż zawodów, to elementami każdej pary są poszczególne zawody ze zbioru objętego porównywaniem parami. Każda para określa uporządkowanie dwóch zawodów pod względem prestiżu. Z jej analizy wiemy, iż jeden z zawodów w parze jest oceniany pod tym względem nie niżej niż drugi zawód (przy tym każdy zawód jest oceniany nie niżej od siebie samego).

Rezultatem porównywania parami w drugim wariancie jest zbiór t^2 par elementów zbioru A, między którymi w określony sposób zachodzą relacje wyprzedzania lub nieodróżnialności:

$$1)\ a_i \succ a_j$$
$$2)\ a_i \sim a_j$$

[6] R. T. Eckenrode, *Weighting Multiple Criteria*, „Management Science", 1965, 12,3; wyd. ros.: R. T. Eckenrode, *Wzwieszennyje mnogomiernyje kritierii*, [w:] *Statisticzieskoje izmiernienije...*, s. 140 ; P. C. Fishburn, *op. cit.*, s. 41-43; W. Gutjahr, *Die Messung psychischer Eigenschaften*, Berlin 1971, s. 70; E. P. Rajchman, G. G. Azgaldow, *Ekspertnyje metody w ocenkie kaczestwa towarow*, Moskwa 1974, s. 97-98.

Wszystkie elementy zbioru A mogą uzyskać wstępną numerację. Jeśli porównania elementów w parach są przechodnie, od zbioru par przejść można do ciągu t elementów zbioru A, między którymi w określony sposób zachodzą relacje wyprzedzania lub nieodróżnialności, np.:

$$a_1 \succcurlyeq a_2 \succcurlyeq a_3 \sim a_4 \sim a_5 \succcurlyeq \ldots \succcurlyeq a_{t-1} \sim a_t$$

Numeracja elementów ciągu $a_1,\ldots,a_t$ ustalona jest na podstawie relacji wyprzedzania i nieodróżnialności, a numeracja wstępna jest oczywiście od zachodzenia tych relacji niezależna. Tu również tę ostatnią numerację wprowadza się po to, by ustalając rejestr par elementów zbioru A nie pominąć którejś z par, by zatem zapewnić porównanie każdego elementu z każdym w zbiorze A.

Jeśli badamy prestiż zawodów, to elementami każdej pary są poszczególne zawody ze zbioru objętego porównywaniem parami. Każda para określa *wyprzedzanie* lub *nieodróżnialność* dwóch zawodów pod względem prestiżu. Na podstawie jej analizy ustalamy, iż jeden z zawodów w parze wyprzedza drugi zawód pod względem prestiżu lub że oba zawody są pod tym względem między sobą nieodróżnialne (przy tym każdy zawód jest nieodróżnialny od siebie samego).

Pomiar rezultatów porównywania parami następuje przez przyporządkowanie każdej parze elementów pewnej pary liczb. Dobiera się tu liczby w ten sposób, by pomiar miał charakter porządkowy.

Przy pierwszym wariancie porównywania parami elementom dowolnej pary $a_i \succcurlyeq a_j$ można przyporządkować parę liczb $f_j(a_i) \geqslant f_i(a_j)$, co przy oznaczeniu $f_j(a_i)$ przez r_{ij} oraz $f_i(a_j)$ przez r_{ji} daje $r_{ij} \geqslant r_{ji}$.

Przy drugim wariancie porównywania parami elementom dowolnej pary o postaci $a_i \succ a_j$ przyporządkowuje się parę liczb $f_j(a_i) > f_i(a_j)$, czyli $r_{ij} > r_{ji}$, zaś elementom dowolnej pary o postaci $a_i \sim a_j$ parę liczb $f_j(a_i) = f_i(a_j)$, czyli $r_{ij} = r_{ji}$.

W praktyce reprezentacją dla pary elementów czyni się parę liczb wymiernych. Liczby te nazywa się rangami w parach.

W przypadku, gdy użyty jest pierwszy wariant porównywania parami rangi dla każdej pary elementów przypisywane bywają na przykład tak:

$$\text{jeśli } a_i \succcurlyeq a_j, \text{ to } r_{ij} = 1,\ r_{ji} = 0$$

Jeśli porządkowanie elementów w parach przebiega z zachowaniem przechodniości, to porównywanie parami może doprowadzić do uporządkowania całego zbioru A. W konsekwencji uzyskać można ciąg t elementów zbioru A:

$$a_1 \succcurlyeq a_2 \succcurlyeq \ldots \succcurlyeq a_{t-1} \succcurlyeq a_t,$$

którym w znany już sposób przyporządkowuje się rangi w zbiorze (rangi ogólne $r_1,\ldots,r_t$).

W przypadku, gdy użyto drugiego wariantu porównywania parami rangi dla każdej pary elementów przypisywane bywają, np. następująco:

a) jeśli $a_i \succ a_j$, to $r_{ij} = 2$, $r_{ji} = 0$

b) jeśli $a_i \sim a_j$, to $r_{ij} = r_{ji} = 1$

Jeśli porządkowanie elementów w parach przebiega w ten sposób, że zachowana jest przechodniość, to z porównywania parami można uzyskać uporządkowanie całego zbioru A. W rezultacie otrzymuje się ciąg t elementów zbioru A, np.:

$$a_1 \succ a_2 \succ a_3 \sim a_4 \sim a_5 \succ \dots \succ a_{t-1} \sim a_t,$$

którym w ustalony sposób przypisze się rangi w zbiorze (rangi ogólne $r_1,\dots,r_t$).

Dodajmy, iż przypisywanie rang w parach może być dokonywane przez respondenta, ale też może być czynione niezależnie[7].

Rangi w parach, przy porównywaniu między sobą wszystkich elementów zbioru A, można przedstawić w postaci tablicy o t wierszach i t kolumnach, oznaczonych zgodnie z wstępną numeracją elementów zbioru A. W tablicy tej na przecięciu i-tego wiersza oraz j-tej kolumny zapisany jest wynik porównania elementu a_i w parze z elementem a_j (tzn. wynik porównania, w którym element a_i jest wyróżniony jako pierwszy, zaś element a_j występuje w drugiej kolejności), natomiast na przecięciu j-tego wiersza oraz i-tej kolumny zanotowany jest wynik porównania elementu a_j w parze z elementem a_i (tzn. wynik porównania, przy którym element a_j występował jako pierwszy, zaś element a_i jako drugi).

W przypadku, gdy stosowany jest pierwszy wariant porównywania parami tablicę taką konstruujemy w następujący sposób:

$$\begin{array}{cc} & \begin{matrix} a_1 & a_2 & \dots & a_{t-1} & a_t \end{matrix} \\ \begin{matrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_{t-1} \\ a_t \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & & 1 & \\ 1 & 0 & & 0 & 0 \\ & & 0 & & \\ 0 & 1 & & 0 & \\ & 1 & & & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

W niektórych polach tablicy wpisano przykładowo rangi w parach. W polach na przekątnej zapisano rangę $r_{ii} = 0$.

W przypadku, gdy używany jest drugi wariant porównywania parami tablicę tego rodzaju budujemy tak oto:

$$\begin{array}{cc} & \begin{matrix} a_1 & a_2 & \dots & a_{t-1} & a_t \end{matrix} \\ \begin{matrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_{t-1} \\ a_t \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 2 & & 1 & 0 \\ 0 & 1 & & 2 & 0 \\ & & 1 & & \\ 1 & 0 & & 1 & \\ 2 & 2 & & & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

[7] R. T. Eckenrode, *op. cit.*, s. 141; P. C. Fishburn, *op. cit.*, s. 41-43; W. Gutjahr, *op. cit.*, s. 71-72; E. P. Rajchman, G. G. Azgaldow, *op. cit.*, s. 100-104.

Niektóre pola tablicy zapełniono przykładowymi rangami w parach. W polach na przekątnej umieszczono rangę $r_{ii} = 1$.

Tablice, które zawierają rangi w parach uzyskane z pomiaru wyników porównywania parami, nazywa się macierzami rang. W przykładowych macierzach wpisywaliśmy rangi zgodnie z przyjętymi wcześniej zasadami reprezentowania określonych relacji przez liczby. Na mocy tych zasad w macierzy opartej na pierwszym wariancie porównywania parami $r_{ij} + r_{ji} = 1$ $(i \neq j)$, zaś w macierzy dla drugiego wariantu porównywania parami $r_{ij} + r_{ji} = 2$ $(i \neq j)$[8].

W postaci macierzy rang przedstawia się też niekiedy rezultaty porządkowania. Dotyczy to w szczególności przypadków, w których nierespektowanie przez respondenta warunku przechodniości uniemożliwia stosowanie prostej metody pomiaru porządkowego. Dzięki macierzowemu ujęciu wyników porządkowania możliwe staje się użycie pewnych bardziej zaawansowanych sposobów i podejść.

ZŁOŻONA METODA POMIARU PORZĄDKOWEGO

Dana jest macierz rang M o wymiarach $t \times t$, w której zapisano rangi w parach dla rezultatów porządkowania lub porównywania parami.

Macierz rang oparta na pierwszym wariancie porządkowania (w szczególności przy niespełnionym warunku przechodniości) lub porównywania parami (niezależnie od tego, czy warunek przechodniości jest, czy też nie jest spełniony) to macierz:

$$M = [r_{ij}],$$

gdzie

$$r_{ij} = \begin{cases} 1, \text{jeśli } a_i \succ a_j \\ 0, \text{jeśli } a_j \succ a_i, \end{cases}$$

$$i \neq j;\ i, j = 1, \ldots, t,$$

przy czym $r_{ii} = 0$.

Macierz rang oparta na drugim wariancie porządkowania (szczególnie w sytuacji, gdy niespełniony jest warunek przechodniości) lub porównywania parami (bez względu na spełnienie tego warunku) to macierz:

$$M = [r_{ij}],$$

[8] O pewnych innych interesujących kwestiach związanych z zapełnianiem tablic na podstawie porównań parami por. W. S. Torgerson, *Theory and Methods of Scaling*, New York 1967, s. 167; W. Gutjahr, *op. cit.*, s. 71-72; B. G. Mirkin, *op. cit.*, s. 169; F. Sixtl, *Messmethoden der Psychologie*, Weinheim 1967, s. 155 i nast.

gdzie

$$r_{ij} = \begin{cases} 2, \text{jeśli } a_i \succ a_j \\ 1, \text{jeśli } a_i \sim a_j \\ 0, \text{jeśli } a_j \succ a_i, \end{cases}$$
$$i \neq j;\ i, j = 1,...,t$$

przy czym $r_{ii} = 1$.

Każde trzy elementy, dla których spełniony jest warunek przechodniości, nazywa się trójką przechodnią.

Dla trójki przechodniej, w pierwszym wariancie porządkowania lub porównywania parami, rangi w parach są takie, że:

jeśli $r_{ij} = 1$ oraz $r_{jk} = 1$, to $r_{ik} = 1$.

Dla trójki przechodniej, w drugim wariancie porządkowania lub porównywania parami, rangi w parach są tego rodzaju, że:

a) jeśli $r_{ij} = 2$ oraz $r_{jk} = 2$, to $r_{ik} = 2$,
b) jeśli $r_{ij} = 1$ oraz $r_{jk} = 1$, to $r_{ik} = 1$,
c) jeśli $r_{ij} = 2$ oraz $r_{jk} = 1$, to $r_{ik} = 2$.

Macierz rang jest macierzą przechodnią, jeśli dla dowolnych r_{ij}, r_{jk}, r_{ik} spełnione są podane zależności.

Każde trzy elementy dla których warunek przechodniości nie jest spełniony, nazywa się trójką nieprzechodnią (cykliczną).

Dla trójki nieprzechodniej rangi w parach są takie, że podane zależności nie są spełnione.

Macierz rang jest macierzą nieprzechodnią, jeśli istnieją takie r_{ij}, r_{jk}, r_{ik}, które nie spełniają owych zależności.

Opiszemy dwie procedury określania na podstawie macierzy M uporządkowania elementów w zbiorze A pod względem W*. Wzgląd W* jest pewnym korelatem względu W, branego pod uwagę w porządkowaniu lub porównywaniu parami. Można go traktować jako odpowiednik W, uzyskany w wyniku złożonego pomiaru porządkowego.

1. PROCEDURA α

W przypadku rezultatów porządkowania lub porównywania parami w pierwszym wariancie rozpatruje się liczbę elementów, wobec których element a_i w zbiorze A jest oceniany nie niżej pod względem W.

W przypadku rezultatów porządkowania lub porównywania parami w drugim wariancie rozważa się liczbę elementów wyprzedzanych przez a_i lub nieodróżnialnych od a_i w zbiorze A pod względem W.

Procedura ta opiera się na obliczaniu sumy rang r_{ij} dla i-tego elementu w zbiorze A na podstawie macierzy M. Sumę tę oznaczmy następująco:

$$c_i = \sum_{j=1}^{t} r_{ij}$$

Wedle tej sumy określa się dla i-tego elementu jego rangę ogólną przy założeniu:

$$r_i \leqslant r_j, \text{ jeśli } c_i \geqslant c_j,$$

przy czym $r_i = r_j$, jeśli $c_i = c_j$.

Uporządkowanie elementów w zbiorze A określa się tu, jak z tego wynika, na podstawie sum rang, jakie uzyskują one przy porównaniach z innymi elementami zbioru A pod względem W. Procedurę tę określić można jako „metodę sumy punktów", o ile przyjąć nomenklaturę turniejową. Jest to procedura, dzięki której w zbiorze A określa się uporządkowanie nie bezpośrednio pod względem W, lecz pod względem W*. W definicji względu W* bierze się pod uwagę wzgląd W oraz założenie przedstawionej procedury pomiaru. Zdając sobie sprawę z dokonywanego uproszczenia, można jednak w dalszym ciągu mówić, iż uporządkowanie określa się pod względem W, rolę założeń procedury pomiaru przyjmując milcząco. Dzięki temu w toku analiz można mówić cały czas, np. o uporządkowaniach pod względem prestiżu, jakkolwiek z formalnego punktu widzenia nie jest to dość ścisłe.

Rozpatrzymy zastosowanie procedury α w sytuacji, gdy macierz M jest nieprzechodnia.

P r z y p a d e k 1. Na podstawie porządkowania lub porównywania parami w pierwszym wariancie uzyskuje się dla pięcioelementowego zbioru A rezultaty, którym odpowiada macierz rang:

$$M_{11} = \begin{array}{c} \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \qquad \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Aby przekonać się, że jest to macierz nieprzechodnia, wystarczy odnaleźć jedną trójkę nieprzechodnią. Taką trójką jest, np. układ $<a_1, a_2, a_3>$. Z macierzy możemy odczytać, iż element a_1 oceniony został nie niżej niż element a_2, zaś element a_2 oceniony został nie niżej niż element a_3, lecz przy tym element a_3 oceniony został nie niżej niż element a_1. Można to zapisać tak:

$$a_1 \succcurlyeq a_2 \succcurlyeq a_3 \text{ oraz } a_3 \succcurlyeq a_1.$$

Wyobraźmy sobie, że sytuacja ta odnosi się do oceniania zawodów pod względem prestiżu. Respondent daje tu następujące oceny: zawód lekarza ocenia pod względem prestiżu nie niżej niż zawód inżyniera, ten zaś nie niżej niż zawód nauczyciela, przy czym zawodowi nauczyciela przypisuje prestiż nie niższy od zawodu lekarza.

Zastosujmy procedurę α do danych z tej macierzy. Uzyskujemy wektor sum rang c_i, zapisany w postaci kolumnowej po prawej stronie macierzy. Okazuje się, że w tym przypadku $c_1 = 2, c_2 = 2, c_3 = 2, c_4 = 2, c_5 = 2$. Wynika z tego, że procedura α prowadzi tutaj do określenia w zbiorze A szczególnego typu uporządkowania pod względem W*. Jest to taki skrajny przypadek uporządkowania, w którym wszystkie elementy zbioru są między sobą nieodróżnialne. Stosownie do tego ich rangi ogólne są równe: $r_1 = r_2 = r_3 = r_4 = r_5$.

Z takim samym skutkiem stosuje się procedurę α do nieprzechodniej macierzy rang, odpowiadającej rezultatom porządkowania lub porównywania parami w drugim wariancie dla pięcioelementowego zbioru A:

$$M_{12} = \begin{array}{c} \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \qquad \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \\ 5 \\ 5 \\ 5 \end{bmatrix}$$

W tym przypadku trójką nieprzechodnią jest, np. układ $\langle a_1, a_2, a_3 \rangle$, ponieważ $a_1 \succ a_2 \sim a_3$ oraz $a_3 \succ a_1$.
Mamy tu $c_1 = 5, c_2 = 5, c_3 = 5, c_4 = 5, c_5 = 5$ i wobec tego $r_1 = r_2 = r_3 = r_4 = r_5$.

Ogólnie stwierdzić możemy, iż w pewnych przypadkach procedura daje w wyniku $c_1 = ... = c_t$ oraz $r_1 = ... = r_t$.

P r z y p a d e k 2. Na podstawie porządkowania lub porównywania parami w pierwszym wariancie otrzymuje się dla pięcioelementowego zbioru A rezulatаty, którym odpowiada macierz rang:

$$M_{21} = \begin{array}{c} \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \qquad \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

W celu ustalenia, iż jest to macierz nieprzechodnia odnajdziemy jakąś nieprzechodnią trójkę. Taką trójką jest, np. układ $\langle a_3, a_1, a_4 \rangle$. Na podstawie macierzy stwierdzamy, iż element a_3 jest oceniany nie niżej niż element a_1, a ten nie niżej niż element a_4, natomiast element a_4 oceniony został nie niżej niż element a_3. Zapiszemy to w następujący sposób: $a_3 \succcurlyeq a_1 \succcurlyeq a_4$ oraz $a_4 \succcurlyeq a_3$.

Jeśli przyjmiemy, iż sytuacja ta dotyczy oceniania zawodów pod względem prestiżu, to respondent może dawać takie oto oceny: zawód nauczyciela ocenia pod tym względem nie niżej niż zawód lekarza, ten ostatni nie niżej niż zawód prawnika, z kolei jednak o zawodzie prawnika stwierdza, iż ma on prestiż nie niższy od zawodu nauczyciela.

Procedura α zastosowana do danych z tej macierzy daje wektor sum rang c_i, zapisany w postaci kolumnowej z prawej strony macierzy. Widzimy, że $c_1 = 3$, $c_2 = 3$, $c_3 = 1$, $c_4 = 1$, $c_5 = 2$, a zatem uporządkowanie określone w zbiorze A pod względem W* jest tego typu, że pewne elementy posiadają wyższe, a pewne inne niższe rangi, ponadto zaś istnieją elementy o rangach równych. Odpowiednio bowiem ustala się $r_1 = 1{,}5$, $r_2 = 1{,}5$, $r_3 = 4{,}5$, $r_4 = 4{,}5$, $r_5 = 3$.

Z podobnym skutkiem stosowana jest procedura α do nieprzechodniej macierzy rang, odpowiadającej rezultatom porządkowania lub porównywania parami w drugim wariancie dla pięcioelementowego zbioru A:

$$M_{22} = \begin{array}{c} \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \qquad \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ 6 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Trójką nieprzechodnią jest tu, np. układ $\langle a_3, a_5, a_4 \rangle$, skoro $a_3 \succ a_5 \succ a_4$ oraz $a_4 \sim a_3$. Mamy $c_1 = 3$, $c_2 = 7$, $c_3 = 6$, $c_4 = 4$, $c_5 = 5$ i w związku z tym $r_1 = 5$, $r_2 = 1$, $r_3 = 2$, $r_4 = 4$, $r_5 = 3$.

Możemy ogólnie zauważyć, iż w pewnych przypadkach zastosowania procedury α występują $c_i \neq c_j$ oraz $r_i \neq r_j$.

2. PROCEDURA β

W przypadku rezultatów porządkowania lub porównywania parami w pierwszym wariancie bierze się pod uwagę nie tylko liczbę elementów, wobec których element a_i w zbiorze A jest oceniany nie niżej pod względem W, lecz również „względną ważność" tych elementów, mierzoną liczbą elementów, od których one z kolei są oceniane nie niżej pod tym względem w zbiorze A, a więc sumą zdobytych przez nie punktów.

W przypadku rezultatów porządkowania lub porównywania parami w drugim wariancie bierze się w rachubę liczbę elementów wyprzedzanych przez a_i lub nieodróżnialnych od a_i w zbiorze A pod względem W, ale ponadto także „względną ważność" tych elementów, wyrażaną liczbą elementów przez nie z kolei wyprzedzanych lub nieodróżnialnych od nich pod tym względem w zbiorze A, a zatem sumą zdobytych przez nie punktów.

Procedura ta jest uogólnieniem „metody sumy punktów". Uporządkowanie elementów w zbiorze A uzyskuje się tutaj w wyniku pewnego postępowania sekwencyjnego, czyli w kolejnych krokach.

Macierzą M zadaje się mianowicie pewne przekształcenie, którego punktem wyjścia jest wektor:

$$C^0 = \begin{bmatrix} 1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 1 \end{bmatrix}$$

Zakłada się więc, że początkowa względna ważność i-tego elementu c_i^0 jest równa 1.

W pierwszym kroku przekształcenie to daje względną ważność c_i^1, która jest równa c_i, tzn. wektor C^1 pokrywa się z wektorem sum punktów

$$\begin{bmatrix} c_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ c_t \end{bmatrix}.$$

W drugim kroku otrzymuje się wektor C^2, w którym względną ważność i-tego elementu ustala się dodając do c_i^1:

a) w wariancie pierwszym: określone wektorem C^1 sumy punktów, tj. względną ważność tych elementów, w porównaniu z którymi uzyskał on rangę $r_{ij}=1$, a więc tych elementów, od których jest oceniany nie niżej,

b) w wariancie drugim: określone wektorem C^1 sumy punktów, tj. względną ważność tych elementów, w porównaniu z którymi uzyskał on rangę $r_{ij} = 1$, a zatem tych elementów, z którymi jest stawiany na równi, oraz podwojone sumy punktów, tj. względną ważność tych elementów, w porównaniu z którymi ma on rangę $r_{ij} = 2$, czyli tych elementów, od których jest oceniany wyżej.

W trzecim kroku postępuje się analogicznie: komponenty wektora C^3 oblicza się uwzględniając w podobny sposób względną ważność elementów określoną wektorem C^2 itd.

Przekształcenie to można zastosować, ponieważ macierz M jest macierzą nieujemną. Dana macierz jest nieujemna, jeśli wszystkie jej elementy są nieujemne. Z kolei, by odpowiedzieć na pytanie, jak długo należy to przekształcenie powtarzać, wprowadza się pojęcie macierzy rozkładalnej i nierozkładalnej. Macierz M nazywa się macierzą rozkładalną, jeśli zbiór indeksów L = 1,...,t można rozdzielić na dwa niepuste podzbiory L_1 oraz L_2 w ten sposób, że $r_{ij} = 0$ dla wszystkich i należących do L_1 oraz j należących do L_2. W przeciwnym razie macierz M jest macierzą nierozkładalną.

Jeśli macierz M jest nieujemną macierzą nierozkładalną, to powtarzanie przekształcenia można przerwać spostrzegłszy, że na dwóch kolejnych wektorach uporządkowanie elementów stabilizuje się. Załóżmy więc, iż począwszy od kroku p uzyskuje się takie właśnie wektory. Oznaczmy przez c_i^s względną ważność i-tego elementu w tym kroku. Przyjmijmy następnie:

$$r_i \leqslant r_j, \text{ jeśli } c_i^s \geqslant c_j^s,$$

przy czym $r_i = r_j$, jeśli $c_i^s = c_j^s$. Przy zmieniających się w kolejnych krokach wartościach c_i ranga r_i nie ulega zmianie[9].

Jak widać, uporządkowanie elementów w zbiorze A określa się w tej procedurze na podstawie przekształcenia, które można określić jako „metodę względnej ważności" w turnieju. Jest to procedura, dzięki której w zbiorze A określa się uporządkowanie nie bezpośrednio pod względem W, lecz pod względem W*. W definicji względu W* bierze się pod uwagę wzgląd W oraz założenia omówionej procedury pomiaru. Licząc się z dokonywanym uproszczeniem można jednak w dalszym ciągu mówić, iż uporządkowanie określa się pod względem W, rolę założeń procedury przyjmując milcząco. Dzięki temu w trakcie analiz można mówić stale, np. o uporządkowaniach pod względem prestiżu, chociaż z formalnego punktu widzenia nie jest to dostatecznie ścisłe.

Przedstawimy zastosowanie procedury β w sytuacji, gdy macierz M jest nieprzechodnia.

P r z y p a d e k 1. Rozważmy macierze M_{11} oraz M_{12}. Są to macierze nieujemne i – co można sprawdzić – nierozkładalne. Łatwo ustalić, że na podstawie procedury β uzyskuje się dla nich uporządkowanie izomorficzne z tym, do jakiego doprowadziła procedura α.

Ogólnie, procedura β nie zmienia rezultatów procedury α dla przypadków, w których $c_1 = ... = c_t$ oraz $r_1 = ... = r_t$.

P r z y p a d e k 2. Rozważmy macierze M_{21} oraz M_{22}. Są to macierze nieujemne i – podobnie – nierozkładalne. Jak się okaże, opierając się na procedurze β uzyskuje się dla nich uporządkowania różne od tych, jakie dawała procedura α.

Ogólnie, procedura β może zmieniać rezultaty procedury α dla przypadków, w których występuje $c_i \neq c_j$ oraz $r_i \neq r_j$.

Zastosujemy procedurę β do danych z macierzy M_{21} (dla uproszczenia zapisu wektory podawać będziemy w postaci wierszowej).

Zakładamy:

$$C^0=[1,...,1].$$

W pierwszym kroku mamy wektor:

$$C^1=[3,3,1,1,2]$$

[9] Ścisły i pełny matematyczny opis tego przekształcenia oraz wyjaśnienie, dlaczego uporządkowanie elementów od pewnego kroku zostaje ostatecznie ustalone, podają m.in.: C. B e r g e, *Théorie des graphes et ses applications*, Paris 1958, wyd. ros.: K. B i e r ż, *Tierorija grafow i jejo primienienija*, Moskwa 1962; B. G. M i r k i n, *op. cit.*, s. 168-171; D. S. S z m e r l i n g, S. A. D u b r o w s k i j, T. D. A r ż a n o w a, A. A. F r e n k i e l, *Ekspertnyje ocenki. Metody i primienienije (Obzor)*, [w:] *Statisticzeskije metody analiza ekspertnych ocenok*, J. N. Tjurin, A. A. Frenkiel, (red.), Moskwa 1977, s. 331-332.

W drugim kroku, jako komponenty wektora C^2, uzyskujemy:

$$c_1^2 = 3 + 3 + 1 + 2 = 9$$
$$c_2^2 = 3 + 1 + 1 + 2 = 7$$
$$c_3^2 = 1 + 3 = 4$$
$$c_4^2 = 1 + 1 = 2$$
$$c_5^2 = 2 + 1 + 1 = 4$$

Przeprowadzając analogiczne obliczenia otrzymujemy w kroku trzecim wektor:

$$C^3 = [22, 17, 13, 6, 10],$$

zaś w kroku czwartym wektor:

$$C^4 = [55, 46, 35, 19, 29].$$

Stwierdzamy, iż wektory C^3 oraz C^4 to pierwsze wektory stablizujące uporządkowanie elementów zbioru A: ponieważ $c_1 > c_2 > c_3 > c_5 > c_4$, wobec tego $r_1 = 1, r_2 = 2, r_3 = 3, r_4 = 5, r_5 = 4$.

Warto podkreślić, iż uporządkowanie, jakie ustaliliśmy za pomocą procedury β różni się od uporządkowania, jakie dla macierzy M_{21} określiliśmy posługując się procedurą α.

Użyjmy procedury β do danych z macierzy M_{22} (tu również dla uproszczenia zapisu wektory podawać będziemy w postaci wierszowej).

Zakładamy:

$$C^0 = [1,...,1].$$

W pierwszym kroku mamy wektor:

$$C^1 = [3, 7, 6, 4, 5].$$

W drugim kroku, jako komponenty wektora C^2, dostajemy:

$$c_1^2 = 3 + 2 \times 7 = 17$$
$$c_2^2 = 7 + 2\,(6 + 4 + 5) = 37$$
$$c_3^2 = 6 + 4 + 2\,(3 + 5) = 26$$
$$c_4^2 = 4 + 6 + 2 \times 3 = 16$$
$$c_5^2 = 5 + 2\,(3 + 4) = 19$$

W wyniku podobnych obliczeń uzyskujemy w kroku trzecim wektor:

$$C^3 = [91, 159, 114, 76, 85],$$

w kroku czwartym wektor:

$$C^4 = [409, 709, 542, 372, 419],$$

zaś w kroku piątym:

$$C^5 = [1827, 3375, 2198, 1732, 1981].$$

Spostrzegamy, iż wektory C^4 oraz C^5 są pierwszymi wektorami stabilizującymi uporządkowanie elementów zbioru A: ponieważ $c_2 > c_3 > c_5 > c_1 > c_4$, wobec tego $r_1 = 4, r_2 = 1, r_3 = 2, r_4 = 5, r_5 = 3$.

Nadmieńmy jeszcze, że przy użyciu procedury β ustaliliśmy dla macierzy M_{22} uporządkowanie różniące się od tego, jakie określiliśmy posiłkując się procedurą α.

Załóżmy, iż macierze M_{21} oraz M_{22} przedstawiają oceny pod względem prestiżu przypisane przez respondentów pewnym zawodom: a_1 = lekarz, a_2 = inżynier, a_3 = nauczyciel, a_4 = prawnik, a_5 = dziennikarz.

Okazuje się, że jeśli uporządkowanie tych zawodów pod względem prestiżu określamy dla macierzy M_{21} za pomocą procedury α, to rangi zawodu lekarza i zawodu inżyniera są równe między sobą i wyższe od rang innych zawodów. Niższą rangę od nich ma zawód dziennikarza. On z kolei pod względem prestiżu jest oceniany wyżej niż zawody nauczyciela i prawnika, które są oceniane między sobą tak samo. Znacznie zmienione uporządkowanie pod względem prestiżu uzyskuje się za pomocą procedury β. Zawód lekarza nie dzieli już z zawodem inżyniera najwyższej pozycji, na trzecie miejsce wysunął się zawód nauczyciela, czwartą zamiast trzeciej rangi ma teraz zawód dziennikarza, natomiast zawód prawnika zajmuje ostatnie miejsce na skali prestiżu.

Spróbujmy wytłumaczyć sobie te zmiany posługując się terminologią turniejową. Zawód lekarza uzyskał co prawda tyle samo „surowych punktów" co zawód inżyniera, lecz zdobył je w porównaniach z zawodami, które same zdobyły więcej takich punktów. Zawód dziennikarza ma dwa „surowe punkty", lecz zdobyte w porównaniach z nisko ocenianymi zawodami nauczyciela i prawnika, natomiast zawód nauczyciela, sam wprawdzie uzyskał tylko jeden punkt, lecz w porównaniu z zawodem lekarza, a więc w porównaniu z jednym z dwóch najwyżej ocenianych zawodów.

Widzimy także, że jeśli uporządkowanie tych samych zawodów pod względem prestiżu określamy dla macierzy M_{22} za pomocą procedury α, to najwyższą rangę uzyskuje zawód inżyniera, druga ranga przypada zawodowi nauczyciela, trzecia zawodowi dziennikarza, czwartą rangę dostaje zawód prawnika, a najniższa, piąta ranga przypisana jest zawodowi lekarza. Częściowo odmienne uporządkowanie pod względem prestiżu daje procedura β. Pierwsze trzy rangi przypisane są tym samym zawodom, przedostatnią rangę otrzymuje teraz zawód lekarza, natomiast zawód prawnika spada na ostatnie miejsce na skali prestiżu.

Pokuśmy się o wyjaśnienie tych zmian, używając terminologii turniejowej. Zawód lekarza zdobył mniej „surowych punktów" niż zawód prawnika. Zawód lekarza uzyskał jednak punkty za „zwycięstwo" nad najwyżej ocenianym zawodem inżyniera. Okazało się, iż są one więcej warte niż punkty, jakie zawód prawnika zdobył za „zwycięstwo" właśnie nad zawodem lekarza, najniżej ocenianym, oraz za „remis" z zawodem nauczyciela.

Przykłady, do jakich się tu odwołaliśmy, uświadamiają nam dokładnie, w jaki sposób procedura β bierze w rachubę „względny prestiż" zawodów w danym ich zbiorze. Tym właśnie, że bierze ów „względny prestiż" pod uwagę, różni się ona od procedury α.

Rozpatrywaliśmy zastosowania procedury α oraz procedury β w sytuacji, gdy macierz M jest nieprzechodnia. Pominęliśmy ich zastosowania w takiej sytuacji, kiedy macierz M jest macierzą przechodnią. Analiza ta nie wniosłaby nic więcej poza ogólnym wnioskiem, iż użycie tych procedur daje tu uporządkowanie pod względem W* izomorficzne wobec uporządkowania pod względem W. To ostatnie daje się wszakże określić bez ich pomocy.

W sensie matematycznym procedura β jest – jak wspominaliśmy – pewnym uogólnieniem procedury α. Procedura α jest uboższa, lecz nie wymaga skomplikowanych obliczeń. Daje się więc przeprowadzić łatwo i w bardzo krótkim czasie. Procedura β jest bogatsza, ale trzeba w niej dokonywać dość skomplikowanych obliczeń. Jak wykazuje praktyka, zwykle jednak wystarczy tylko kilka kroków do jej zakończenia.

ZAKOŃCZENIE

W rozważaniach tych podjęliśmy próbę możliwie systematycznego przedstawienia pomiaru danych pochodzących z porządkowania lub porównywania parami zawodów pod względem prestiżu. Zajmowaliśmy się pomiarem danych, których dostarcza jednokrotne porządkowanie lub porównywanie parami, przeprowadzane przez poszczególnych, z osobna branych, respondentów. Zajmowaliśmy się więc matematycznym opisem lub ustalaniem jednostkowych uporządkowań (hierarchii lub gradacji) zawodów pod względem prestiżu[10]. Nie był przedmiotem tych rozważań pomiar danych, które się otrzymuje z wielokrotnego porządkowania lub porównywania parami, przeprowadzanego przez jednego respondenta, bądź też z porządkowania lub porównywania parami, którego dokonuje wielu respondentów. Nie interesował nas wobec tego matematyczny opis lub ustalanie generalizujących uporządkowań (hierarchii lub gradacji) zawodów pod względem prestiżu. Zagadnienie to, rozległe i bogate, wymagałoby odrębnego rozpatrzenia.

✡ ✡
✡

Autor wyraża podziękowanie Panu Docentowi Grzegorzowi Malinowskiemu, który w pierwotnej wersji tego artykułu ujawnił kilka istotnych formalnych niejasności i podpowiedział, jak je usunąć. Jego uwagi pobudziły autora do pewnych nowych własnych przemyśleń, dzięki którym – taką autor ma nadzieję – tekst został pozbawiony szeregu dalszych niejasności, a nawet błędów. Ponadto, z myślą o tym, by tekst uczynić bardziej przystępnym, autor odstąpił od pełniejszego i ściślejszego przedstawiania w artykule niektórych zagadnień matematycznych.

[10] Z matematycznego punktu widzenia rozważaliśmy przypadki stosunkowo proste. Na przykład zadanie rangowania elementów na podstawie macierzy nieprzechodnich przedstawialiśmy tylko w jednej z możliwych odmian, por. D. S. Szmerling, S. A. Dubrowskij, T. D. Arżanowa, A. A. Frenkiel, *op. cit.*, s. 332 i nast.