Anna Lemańska

"Wielkie twierdzenie Fermata", Amir D. Aczel, Warszawa 1998 : [recenzja]

Studia Philosophiae Christianae 34/2, 191-194

1998

Studia Philosophiae Christianae
ATK
34 (1998) 2

RECENZJE

Amir D. Aczel, *Wielkie twierdzenie Fermata. Rozwiązanie zagadki starego matematycznego problemu*, Warszawa 1998, ss.143.

W historii matematyki łatwo wskazać szereg problemów, których rozwiązanie często zajmowało czas wielu pokoleniom matematyków. Kwadratura koła, trysekcja kąta, dowód V postulatu Euklidesa są najsłynniejszymi, postawionymi jeszcze przez matematyków starożytności, zagadnieniami, rozwiązanymi wiele wieków później. W czasach nam znacznie bliższych jednym z najbardziej znanych problemów było tzw. wielkie twierdzenie Fermata, głoszące, że dla $n>2$ równanie $x^n+y^n=z^n$ nie ma rozwiązań naturalnych. Twierdzenie to zostało sformułowane, łącznie z notatką o odkryciu dowodu tego faktu, około 1637 r. przez Pierre'a de Fermata, francuskiego prawnika, zajmującego się w wolnych chwilach matematyką.

A.D. Aczel opisuje historię zmagań matematyków z twierdzeniem aż do 1995 r., gdy Andrew Wiles podał jego pełny dowód. Zagadnienie sformułowane w twierdzeniu Fermata niejako naturalnie wynika z twierdzenia Pitagorasa. Równanie $x^2+y^2=z^2$ (występujące w twierdzeniu Pitagorasa o bokach trójkąta prostokątnego) posiada nieskończenie wiele rozwiązań naturalnych; liczby, które spełniają to równanie nazywają się trójkami pitagorejskimi. Poszukiwaniem takich trójek zajmowali się już matematycy w starożytności. A.D. Aczel historię wielkiego twierdzenia Fermata rozpoczyna zatem od 2000 r. p.n.e. Wtedy to w starożytnym Babilonie na glinianej tabliczce zapisano piętnaście trójek pitagorejskich.

Następnie Aczel wskazuje na rolę, jaką w historii twierdzenia Pitagorasa odegrali Pitagoras i pitagorejczycy. Przypisywali oni liczbom naturalnym mistyczne znaczenie, a liczby o pewnych specyficznych własnościach stanowiły przedmiot ich kultu. Co więcej, z twierdzenia Pitagorasa wynika istnienie liczb niewymiernych. Ich odkrycie spowodowało pierwszy kryzys w matematyce i stało się ciosem dla wierzeń pitagorejczyków.

Autor wspomina o osiągnięciach innych matematyków starożytnej Grecji: Euklidesa, Eudoksosa i Archimedesa. Dwom ostatnim zawdzięczamy początki rachunku nieskończenie małych, który to rachunek miał istotne znaczenie dla rozwiązania problemu Fermata.

Około roku 250 n.e. w Aleksandrii działał Diofantos. Zapoczątkował on badanie szczególnego typu równań (dziś nazywanych równaniami diofantycznymi). Swoje wyniki zawarł w piętnastotomowym dziele *Arithmetica*, z którego ocalało tylko sześć tomów. To właśnie na marginesie łacińskiego tłumaczenia drugiego tomu pracy Diofantosa Fermat umieścił sformułowanie swojego twierdzenia (margines książki okazał się niestety za wąski, by zmieścić na nim dowód).

Aczel następnie prowadzi nas do Bagdadu, który w VIII wieku stał się centrum matematycznym. Tam to w IX w. działa Muhammad ibn Musa al-Chwarizmi. Jego traktat *Hisab al-dżabar wa'l mukabala* jest poświęcony m.in. rozwiązywaniom równań liniowych i kwadratowych. Jest to zarazem pierwszy podręcznik algebry.

Po wielowiekowym okresie zastoju od XIII wieku w średniowiecznej Europie następuje wzrost zainteresowań matematyką. Poszukiwanie trójek pitagorejskich stało się w 1225 r. impulsem do napisania przez Leonarda z Pizy, znanego jako Fibonacci, książki *Liber quadratorum*.

W średniowieczu i renesansie wśród matematyków tworzy się specyficzna rywalizacja w poszukiwaniu rozwiązań równań. W szczególności bada się równania stopnia trzeciego. Na początku XVI wieku Tartaglia znajduje wzory na pierwiastki tego równania. Wiek później zostaje przełożona na łacinę *Arithmetica* Diofantosa i Fermat formułuje swoje twierdzenie.

Od tej chwili zaczyna się pasjonująca historia poszukiwania dowodu twierdzenia. Postęp był osiągany bardzo powoli. Fermat umiał udowodnić swoje twierdzenie na pewno dla wykładników potęg 3 i 4. Niezależnie od Fermata twierdzenie dla tych wykładników udowodnił L. Euler. W 1828 r. Dirichlet wykazał prawdziwość twierdzenia dla n=5. H. Lebesgue poprawił błędy G. Lama w dowodzie z 1840 r. twierdzenia dla n=7. Zatem po upływie dwustu lat twierdzenie Fermata było udowodnione tylko dla wykładników 3, 4, 5, 7 i ich wielokrotności.

Znaczny wkład do dowodu twierdzenia wniosła na przełomie XVIII i XIX wieków Sophie Germain. Opierając się na jej wynikach można rozróżnić dwa przypadki wielkiego twierdzenia Fermata: pierwszy, gdy zakładamy, że żadna z liczb x, y, z nie dzieli się przez wykładnik potęgi n i drugi, gdy n dzieli którąś z liczb x, y, z. Korzystając z rozumowania Germain łatwo pokazać, że twierdzenie Fermata dla wykładników pierwszych mniejszych od 100 może być fałszywe tylko w drugim przypadku.

Równolegle do poszukiwań dowodu twierdzenia dla coraz to wyższych wykładników są tworzone nowe narzędzia matematyczne, które posłużą do znalezienia pełnego dowodu. Rozwija się topologia, zapoczątkowana przez zagadnienie Eulera o siedmiu mostach w Królewcu, analiza zespolona, do której znaczny wkład wniosły prace Gaussa, algebra, w której istotna dla twierdzenia Fermata okazała się teoria E. Galois. J. Fourier tworzy teorię funkcji okresowych, a E.E. Kummer teorię liczb idealnych. Powstają geometrie nieuklidesowe. Gauss bada funkcje eliptyczne. Abel pokazuje, że równania stopnia piątego nie można rozwiązać przez pierwiastniki. Dedekind rozwija teorię ideałów. H. Poicaré bada funkcje, które nazywa formami automorficznymi.

W miarę rozwoju wiedzy matematycznej pojawiają się nieoczekiwane powiązania. Jedno z nich jest konsekwencją hipotezy postawionej przez L.J. Mordella w 1922 r. Hipoteza ta została udowodniona w 1983 r. przez G.

Faltingsa. Wynika z niej, że jeżeli istnieją trójki liczb spełniających równanie Fermata, to jest ich tylko skończenie wiele. Granville i Heath-Brown, wykorzystując wynik Faltingsa pokazali, że twierdzenie Fermata jest „prawie zawsze" prawdziwe.

W połowie lat pięćdziesiątych Taniyama i Shimura formułują hipotezę dotyczącą własności krzywych eliptycznych (ogólna postać równania krzywej eliptycznej: $y^2=ax^3+bx^2+c$, gdzie a, b, c są wymierne), a w 1984 r. G. Frey wysuwa przypuszczenie, że z hipotezy Taniyamy-Shimury wynika wielkie twierdzenie Fermata. Przypuszczenie to udowodnił rok później K. Ribet. Wreszcie w 1993 r. A. Wiles dowodzi prawdziwości hipotezy Taniyamy-Shimury. Niestety w jego dowodzie znajduje się luka, którą jednak po dwóch latach pracy udaje się usunąć. Kończy się historia wielkiego twierdzenia Fermata.

Aczel na zakończenie stawia pytanie, czy rzeczywiście Fermat mógł znać pełny dowód swego twierdzenia. Wydaje się, że na pewno nie mógł znać dowodu Wilesa. Dowód ten jest bowiem, jak zauważa Autor, „osiągnięciem sporej grupy matematyków XX wieku, a także ich poprzedników" (s. 136). Czy Fermat mógł znaleźć znacznie prostszy dowód, korzystający tylko z wyników znanych już w jego czasach? Na to pytanie nie ma obecnie odpowiedzi.

Ta niewielka książeczka w atrakcyjny sposób ukazuje codzienną pracę matematyków. Przedstawia, często niełatwe, ich życie, zawody, które ich spotykały, zawiść lub niezrozumienie im współczesnych. Autor przytacza wiele anegdot, dzięki którym widzimy żywych ludzi w ich zmaganiu się z często oporną materią rzeczywistości matematycznej. Z tego względu książka Aczela może stać się pasjonującą lekturą dla wszystkich interesujących się historią nauki.

Dla filozofa matematyki historia wielkiego twierdzenia Fermata jest jednakże pouczająca przede wszystkim z następującego powodu. W książce wyraźnie jest ukazane powiązanie różnych działów matematyki. W dowodzie twierdzenia korzysta się bowiem z: teorii liczb, analizy rzeczywistej i zespolonej, topologii, algebry. Problem ściśle teorioliczbowy, dotyczący własności liczb naturalnych do swego rozwiązania wymagał zaangażowania potężnego aparatu matematycznego. W tym kontekście warto postawić następujące pytanie, czy dowód wykorzystujący teorię funkcji eliptycznych można uznać za klasyczny dowód twierdzenia bądź co bądź arytmetycznego? Dowód opiera się bowiem nie tylko na aksjomatach samej arytmetyki liczb naturalnych, lecz również na wynikach uzyskanych w różnych działach matematyki. Wydaje się, że dowód ten trudno byłoby umieścić w ściśle określonym systemie aksjomatyczno-dedukcyjnym, choć jest to dowód dedukcyjny, w którym wykorzystywane są tylko wcześniej już udowodnione twierdzenia.

Powyższa sytuacja jest typowa. Wiele ważnych wyników matematycznych uzyskano czerpiąc fakty z różnych, często wydawałoby się odległych, obszarów matematyki. Dowodząc twierdzeń, matematycy rzadko kłopoczą się o to, w jakim systemie aksjomatyczno-dedukcyjnym aktualnie pracują. W matematyce można wyróżniać poszczególne działy czy teorie, jednakże często jest to podział do pewnego stopnia arbitralny. Matematykę należałoby raczej widzieć globalnie. Takie jednak potraktowanie wiedzy matematycznej powoduje, że nie jest możliwe zamknięcie jej w jednym systemie aksjomatyczno-dedukcyjnym (wynika to z twierdzeń limitacyjnych).

Historia wielkiego twierdzenia Fermata rzuca nowe światło na istotę wiedzy matematycznej. Metoda aksjomatyczno-dedukcyjna jest uważana powszechnie za najwłaściwszą metodę wykładu teorii matematycznej. Jednak nie daje się odizolować od siebie poszczególnych teorii matematycznych. Z reguły interesujące wyniki matematyczne są uzyskiwane przy wykorzystywaniu wielu różnych teorii matematycznych. Matematyka musi być widziana całościowo, jako jedna integralna nauka.

Anna Lemańska

Johannes Michael Schnarrer, *Arbeit und Wertewandel im postmodernen Deutschland. Eine historische, ethisch-systematische Studie zum Berufs- und Arbeitsethos*, Verlag Dr. Kovač, Hamburg 1996, ss. 324.

Problemem, którego rozwiązania na łamach swej książki poszukiwał J.M. Schnarrer, jest kwestia przemian społecznych, jakie zachodzą w następstwie upadku komunistycznych totalitaryzmów. W momencie obalania marksistowskich systemów polityczno-ekonomicznych panowało dość powszechne przekonanie, że wydarzenia w środkowo-wschodniej Europie nie będą oddziaływały na stosunki społeczne w krajach o utrwalonej gospodarce rynkowej. Dopuszczano najwyżej możliwość marginalnych wpływów. Rzeczywistość jednak nie potwierdziła optymistycznych prognoz, zwłaszcza w odniesieniu do Niemiec. Ujawniło się przede wszystkim jak słabo jest zakorzeniona w ludzkich postawach zasada solidarności, która wydawała się być nadrzędnym kryterium wyborów poszczególnych osób i całych społeczności.

Swoje badania autor zawężył jedynie do Niemiec. Zachodzące bowiem tam przemiany, zdaniem wielu badaczy współczesnych procesów społecznych, ujawniają w sposób najbardziej jaskrawy zjawiska, które mają miejsce w całej Europie. Przedmiotem zaś swych badań uczynił on kwestię przeobrażeń w zakresie rynku pracy i dominujących na nim wartości. Zmiany tam zachodzące są wręcz symptomatyczne dla procesów obejmujących całość zjawisk społecznych.

Praca J.M. Schnarrera dzieli się na trzy rozdziały. Pierwszy z nich ma charakter historyczny. Autor w syntetycznej formie przedstawił zagadnienie pracy w myśli filozoficznej od starożytności po czasy współczesne.

W rozdziale drugim natomiast podjął się on zadania analizy fenomenu współczesnych zmian w dziedzinie pracy. Jego rozważania w tym rozdziale koncentrowały się wokół kwestii rozumienia prawa do pracy w kontekście aktualnego stanu bezrobocia i stref ubóstwa materialnego. W trakcie tych