Anna Lemańska

Uwagi o przedmiocie matematyki

Studia Philosophiae Christianae 36/1, 193-212

2000

ANNA LEMAŃSKA
Wydział Filozofii Chrześcijańskiej, UKSW

UWAGI O PRZEDMIOCIE MATEMATYKI

1. WSTĘP

W jaki sposób istnieje przedmiot matematyki, jak go poznajemy, te pytania były wielokrotnie stawiane i udzielano na nie rozmaitych odpowiedzi. Te kwestie są w dalszym ciągu aktualnym i podstawowym problemem filozofii matematyki. Łatwo jest wymieniać szereg terminów, którymi w przeszłości i współcześnie zajmują się matematycy, na przykład: liczby, figury geometryczne, funkcje, zbiory, przestrzenie geometryczne, struktury algebraiczne, całki, zmienne losowe. Matematyk przyjmuje, że to, co bada, w jakiś sposób jest mu dane, i w gruncie rzeczy taka odpowiedź na postawione pytanie jest dla niego zadowalająca, gdyż umożliwia mu owocne rozwijanie matematyki. Jednak dla filozofa matematyki taki minimalizm poznawczy jest wysoce niewystarczający.

B. Russell określił matematykę „jako naukę, w której nigdy nie wiemy, o czym mówimy i czy to, o czym się tam mówi, jest prawdziwe. Ludzie, którzy łamali sobie głowę nad podstawami matematyki, zapewne znajdą pociechę w tej definicji i prawdopodobnie uznają ją za słuszną"[1]. Wypowiedź Russella trzeba odczytywać w kontekście sytuacji w podstawach matematyki na przełomie wieków XIX i XX. Jego opinia była zapewne przejawem sceptycyzmu, spowodowanego nieudanymi próbami znalezienia dla matematyki niepodważalnych podstaw. Wprawdzie kryzys w podstawach matematyki w minimalnym tylko stopniu zaciążył nad samą matematyką XX wieku, to wypowiedź Russella, jak się wydaje, nie straciła na aktualności.

Ciągle na nowo podejmowane próby stworzenia teorii dotyczących istoty matematyki nie doprowadziły do wypracowania jednego, powszechnie akceptowanego stanowiska. Z reguły propozycje rozwiązań są przedstawiane w postaci jednej wszystko obejmującej formuły, która nie uwzględnia całej złożoności problematyki. Zagadnienie to jest trudne jeszcze z następującego względu, matematyka rozwija się i zmieniają się tym samym pojęcia, którymi zajmują się matematycy.

W artykule przedstawię najczęściej wygłaszane opinie na temat tego, czym zajmuje się matematyk. Zaproponuję również modyfikację ujęć

[1] Cyt. za: W. R. Fuchs, *Matematyka popularna*, Warszawa 1972, 198.

wcześniejszych, która, jak mi się wydaje, lepiej ujmuje cechy charakterystyczne matematyki.

2. ILOŚĆ JAKO PRZEDMIOT MATEMATYKI

W przeszłości najbardziej rozpowszechnionym stanowiskiem był pogląd, w myśl którego matematyka jest nauką o ilości. W starożytności i średniowieczu to przekonanie było dominujące, a również współcześnie można się z nim spotkać. Obecnie wydaje się, że, zwłaszcza w XX wieku, straciło ono swoje uzasadnienie. Warto też dodać, że i w przeszłości stwarzało poważne trudności.

Przekonanie o ilościowym charakterze przedmiotu matematyki w starożytności zostało ugruntowane przez poglądy pitagorejczyków, Platona i Arystotelesa.

W systemie filozoficznym pitagorejczyków problem poszukiwania arche, postawiony wcześniej przez filozofów jońskich, znalazł specyficzne rozwiązanie. Pitagorejczycy uznali mianowicie liczby i związki między liczbami za formalny pierwiastek rzeczy, za istotny element bytu. Wszechświat był przez nich pojmowany jako system liczb. Zaś liczba była czymś niezmiennym i pierwszym w całej naturze[2].

Poglądy pitagorejczyków oddziałały w znacznej mierze na koncepcję Platona. Według Platona przedmioty materialne stanowią tylko niedoskonałe odbicie świata idei, które są wieczne, doskonałe, niezależne od rzeczy i nadają sens wrażeniom uzyskiwanym ze świata przedmiotów fizycznych. W systemie Platona przedmioty matematyczne znajdują się pomiędzy zmysłowo postrzeganymi rzeczami a ideami i istnieją niezależnie od materii i poznającego podmiotu. Co więcej, ich istnienie jest pierwotne w stosunku do obiektów materialnych. Przedmioty fizyczne o kształcie na przykład kuli czy trójkąta są tylko niedoskonałymi odbiciami idealnych kul i trójkątów istniejących odwiecznie. Poznanie tego idealnego świata obiektów matematycznych odbywa się wyłącznie na drodze poznania rozumowego. Poznanie zmysłowe niedoskonałych, istniejących w świecie materialnym odbić idealnych

---

[2] Arystoteles tak streszcza poglądy pitagorejczyków: „pitagorejczycy pierwsi zająwszy się naukami matematycznymi nauki te rozwinęli, a zaprawiwszy się w nich sądzili, że ich zasady są zasadami wszystkich rzeczy. [...] dostrzegli też w liczbach właściwości i proporcje muzyki; skoro więc wszystkie inne rzeczy wzorowane są, jak im się zdawało, w całej naturze na liczbach, a liczby wydają się pierwszymi w całej naturze, sądzili, że elementy liczb są elementami wszystkich rzeczy, a całe niebo jest harmonią i liczbą" (Arystoteles, *Metafizyka* 985 b – 986 a, Warszawa 1983, 17).

obiektów, nie może dostarczyć nam żadnej wartościowej o nich wiedzy.

Warto też dodać, że zarówno w koncepcji pitagorejczyków, jak i Platona występuje przekonanie, iż „zdobycie wiedzy o stosunkach między liczbami pozwoli poznać zależności występujące w rzeczywistości"[3]. Uznaje się więc, że przyroda daje się poznawać przy pomocy matematyki (jako odbicie świata idei). Obiekty fizyczne są powiązane z matematycznymi, gdyż są odbiciem tych ostatnich.

W nurcie tradycji zapoczątkowanej przez pitagorejczyków i Platona można, przykładowo, umieścić poglądy: świętego Augustyna, uznającego świat realny za stworzony przez Boga według idealnych wzorów czy myśli, istniejących w umyśle Bożym; Mikołaja z Kuzy twierdzącego, iż w badaniu świata widzialnego podstawową rolę odgrywa matematyka, dostarczająca nam narzędzi, „dzięki którym możemy sobie uświadomić całą niewspółmierność skończoności świata, w którym żyjemy i nieskończoność rzeczywistości Bożej"[4]; Leonarda da Vinci dla którego matematyka była kluczem, otwierającym wszelkie dziedziny wiedzy, gdyż świat jest skonstruowany wedle tajemnego, geometrycznego szyfru, który można odczytać poprzez doświadczenie[5]; Kartezjusza, dla którego matematyka była metodą, pozwalającą wyjaśnić strukturę świata.

W przytoczonych poglądach widać nawiązanie do koncepcji Platona poprzez stwierdzenie, że świat obiektów fizycznych jest zbudowany według schematu, szyfru, bądź idei istniejących uprzednio i dających się poznać dzięki matematyce. Ta tendencja jest widoczna również w platonizmie współczesnym.

Arystoteles twierdził, że samodzielnie mogą bytować tylko jednostkowe rzeczy i nie istnieje żaden świat idei wcześniejszych w stosunku do świata przedmiotów materialnych, a tym samym nie istnieje pierwotnie idealny świat obiektów matematycznych[6]. Uznawał jednak,

---

[3] R. Palacz, *Od wiedzy do nauki. U źródeł nowożytnej filozofii przyrody,* Wrocław 1979, 31.

[4] S. Swieżawski, *Między średniowieczem a czasami nowymi. Sylwetki myślicieli XV wieku,* Warszawa 1983, 181.

[5] Tamże, 230–231.

[6] „Żaden bowiem przedmiot matematyczny nie jest przyczyną w żadnym z wyróżnionych przez nas znaczeń w odniesieniu do pierwszych zasad. [...] Przedmioty matematyczne nie są odłączalne od rzeczy zmysłowych, wbrew temu, co twierdzą niektórzy i nie są pierwszymi zasadami" (Arystoteles, *Metafizyka* 1093 b, Warszawa 1983, 386–387).

podobnie jak większość myślicieli starożytności, ilość za przedmiot matematyki. W przeciwieństwie do Platona przyjmował, że ilość została wyabstrahowana z przedmiotów fizycznych. Ciała fizyczne zawierają mianowicie powierzchnie, punkty, linie, które w specyficzny sposób bada matematyk. Te powierzchnie, linie, punkty są przez matematyka rozpatrywane w oderwaniu od swych fizycznych odpowiedników. Matematyk bada długość fizyczną, ale nie jako fizyczną, tylko oddzieloną poprzez akt abstrakcji od swego fizycznego odpowiednika. Ilość wyrażona w liczbie, rozciągłości i kształcie może być rozpatrywana w oderwaniu od innych fizycznych właściwości ciał materialnych, mimo że nie istnieje oddzielnie od nich. Umysł, gdy myśli o obiektach matematyki, „myśli o nich, jak gdyby były oderwane od ciała, chociaż w rzeczywistości nie są one od niego oderwane"[7]. Zatem przedmiotem matematyki jest realna ilość badana we właściwy dla matematyki sposób. Warte podkreślenia jest to, że w matematycznym pojęciu ilości mamy odniesienie do świata materialnego i do czynności umysłu, jaką jest abstrahowanie.

Do poglądów Arystotelesa o ilościowym charakterze przedmiotu matematyki nawiązują m. in.: Awicenna, który stwierdza, że matematyka bada konkretnie istniejące stosunki ilościowe i relacje; Hugon od Św. Wiktora, który uważa, że przedmiotem matematyki są *intelligibilia* obejmujące różnego rodzaju ilości i stosunki ilościowe; Albert Wielki (z Bollstädt), który przyjmuje, że przedmiotem matematyki są przypadłościowe dane ilościowe tkwiące w danych zmysłowych, ale już w oderwaniu od zmienności i stawania się.

Św. Tomasz z Akwinu przejmuje od Arystotelesa trójstopniowy podział abstrakcji, toteż na drugim jej stopniu umieszcza matematykę. Według niego abstrakcja matematyczna pomija materię zmysłową i dotyczy materii inteligibilnej, którą można traktować jako substrat metafizyczny dla ilości lub jako continuum, które jest materią dla form geometrycznych. Materia ta jest dostępna tylko dla poznania umysłowego i nie jest spostrzegalna przez zmysły zewnętrzne. Przedmiotem matematyki są różne rodzaje ilości, a mianowicie: figury geometryczne, liczby, relacje między nimi. Matematyka jest nauką realną, mówiącą o ilościowych aspektach świata materialnego.

Pogląd św. Tomasza o ilościowy charakterze matematyki przejmują neotomiści. W szczególności, A. G. Melsen uważa, iż przedmiotem

[7] Arystoteles, *O duszy,* 431 b, Warszawa 1972, 100.

matematyki jest ilość, którą dzieli na ciągłą (*quantitas continua*) i rozczłonkowaną (*quantitas discreta*). Pierwsza forma ilości jest związana z rozciągłością w czasie i przestrzeni rzeczy materialnych, druga z występowaniem wielu jednostek tego samego gatunku. Ilość ciągła jest przedmiotem geometrii, a rozczłonkowana – arytmetyki. Według Melsena nawet najbardziej abstrakcyjne gałęzie matematyki współczesnej również badają ilość z tym, że to pojęcie trzeba rozumieć bardzo szeroko, a nie ograniczać się do tego, co można zmierzyć lub liczyć[8].

Z polskich neotomistów stanowisko głoszące, że matematyka jest nauką o ilości, przyjmuje m. in. M. A. Krąpiec. Według niego byt matematyczny uzyskujemy na drodze abstrahowania z bytów jednej tylko ich właściwości, a mianowicie ilości, która jest przedmiotem miary[9]. „Intelekt zwraca uwagę właśnie na tę ilość, jako na pewną doskonałość materialnego bytu, i poznawczo odrywa ją od konkretu, a nawet od pewnych pojęć ogólnych"[10]. W ten sposób intelekt tworzy byt matematyczny, będący przedmiotem matematyki, który „nie będąc bytem realnym, jest bytem myślnym, mającym swe podstawy w rzeczy (z rzeczy bowiem został wyabstrahowany i do pomiaru rzeczy może być zastosowany)"[11].

W wieku XX stanowisko, że ilość jest przedmiotem matematyki, zajmują autorzy marksistowscy. W tym względzie przejmują oni pogląd F. Engelsa, który określając istotę matematyki, stwierdza, że „przedmiotem czystej matematyki są formy przestrzenne i stosunki ilościowe rzeczywistego świata, a więc materiał bardzo realny"[12]. Za Engelsem to określenie powtarzają w XX wieku wszyscy autorzy marksistowscy zajmujący się filozofią matematyki, jednak w różnoraki sposób je modyfikują, próbując dostosować do matematyki współczesnej[13].

Wprawdzie pogląd, że przedmiotem matematyki jest ilość, prawie powszechnie był akceptowany, to rozmaicie rozumiano istotę i sposób istnienia ilości. W starożytności można wyróżnić przynajmniej dwie koncepcje na ten temat: uważanie ilości za byt idealny i uznanie ilości

[8] A. G. van Melsen, *Filozofia przyrody*, Warszawa 1968, 193–199.
[9] M. A. Krąpiec, *Metafizyka. Zarys teorii bytu*, Lublin 1985, 345.
[10] Tamże, 345.
[11] Tamże, 346.
[12] F. Engels, *Anty-Dühring*, w: K. Marks, F. Engels, *Dzieła* t. 20, Warszawa 1972, 40.
[13] Zob. A. Lemańska, *Przedmiot matematyki w materializmie dialektycznym*, w: *Z zagadnień filozofii przyrodoznawstwa i filozofii przyrody*, t.VII, red. M. Lubański, S. W. Ślaga, Warszawa 1985, 23–53.

za abstrakcję mającą podstawę w rzeczy. Ilość za byt idealny uznawali Pitagorejczycy oraz Platon. Zwolennikiem drugiego podejścia był Arystoteles.

Oba powyższe ujęcia przedmiotu matematyki przewijały się przez całą historię filozofii aż do naszych czasów. Współcześnie, mimo odejścia od poglądu, że przedmiotem matematyki jest ilość, w filozofii matematyki dają się zauważyć nawiązania do ujęć Platona i Arystotelesa. Należy podkreślić, że koncepcje odnośnie przedmiotu matematyki bardzo często łączy się ściśle ze stanowiskami zajmowanymi w tzw. sporze o uniwersalia. Szczególnego znaczenia ten spór nabrał w kontekście pytania, jak istnieją zbiory. Najczęściej wyróżnia się trzy koncepcje na temat sposobu istnienia zbioru: platonizm (realizm skrajny), konceptualizm (konstruktywizm, intuicjonizm) i nominalizm[14].

Jak z dzisiejszej perspektywy można oceniać stanowiska, głoszące, że przedmiotem matematyki jest ilość? W starożytności i średniowieczu matematyka to była przede wszystkim geometria. Arytmetyka ograniczała się w zasadzie do umiejętności wykonywania działań arytmetycznych. Co więcej, teorię liczb rzeczywistych zredukowano do geometrii: teoria liczb to teoria proporcji Eudoksosa, w której liczbę utożsamiano z odcinkiem. Badane w geometrii elementarnej bryły i figury są continuami[15], stąd konieczność wyróżnienia dwóch rodzajów ilości: dyskretnej, będącej domeną arytmetyki liczb naturalnych i ciągłej, będącej domeną geometrii.

Pogląd, że przedmiotem matematyki jest ilość, ujmował pewne istotne cechy matematyki starożytności i średniowiecza. Wprawdzie z dzisiejszej perspektywy w geometrii obok własności ilościowych, związanych z możliwościami pomiaru objętości, powierzchni pól, długości, istotne znaczenie mają również własności jakościowe badanych zbiorów, to w powyższe widzenie przedmiotu geometrii jest, być może, uwikłane to, że Arystoteles rozciągłość potraktował jako podstawową własność ilościową bytów materialnych, która stanowi „podłoże" dla innych własności. Trzeba również pamiętać, że pogląd o ilościowym charakterze przedmiotu matematyki sprawił, iż za dyscypliny matematyczne uważano nie tylko geometrię i arytmetykę, lecz również astro-

[14] Zob. np. J. Słupecki, L. Borkowski, *Elementy logiki matematycznej i teorii mnogości*, Warszawa 1984, 279–283.

[15] *Continuum* jest to zbiór zwarty i spójny. Intuicyjnie oznacza to, że stanowi jeden, ciągły kawałek przestrzeni lub płaszczyzny.

nomię i muzykę (czy precyzyjniej – teorię muzyki), a także mechanikę i optykę.

Sytuacja w matematyce zmienia się jednak radykalnie z chwilą powstania pojęcia funkcji. Pojęcie to zaczęło kształtować się począwszy od wieku XIV między innymi w pracach Bradwardine'a, a także Mikołaja z Oresme, a do matematyki wchodzi na stałe w wieku XVII. Funkcję, podobnie zresztą jak relację, trudno uważać za pojęcie czysto ilościowe, gdyż funkcja informuje nas o zależności między elementami jednego wyróżnionego zbioru (dziedziny) a elementami innego zbioru (przeciwdziedziny). I chociaż w matematyce elementarnej spotykamy się z funkcjami zmiennej rzeczywistej o wartościach rzeczywistych, a początkowo przy pomocy wykresów–rozkładów intensywności cechy w zależności od miejsca – czyli tzw. form – próbowano uchwycić właśnie ilościowo zmiany w natężeniu cech jakościowych, to w ogólnym przypadku elementy dziedziny i przeciwdziedziny mogą być czymkolwiek. W wiekach XVIII i XIX to właśnie funkcja jest uważana za podstawowe obok liczby pojęcie matematyczne, a w matematyce króluje analiza matematyczna, której zadaniem jest badanie funkcji.

Warto jeszcze zatrzymać się nad miejscem geometrii i arytmetyki w matematyce współczesnej. Elementarna geometria euklidesowa jest obecnie w zasadzie teorią „zamkniętą". W XX wieku zostały zbadane jej podstawy, ujęto ją w system formalny. Obecnie trudno znaleźć w niej interesujące nierozwiązane problemy. Oczywiście z geometrii elementarnej wyrosło wiele ważnych działów matematyki współczesnej: geometrie nieeuklidesowe, geometria analityczna, topologia, lecz odeszły one bardzo daleko od badania figur geometrycznych i, zwłaszcza w topologii, trudno doszukiwać się w nich aspektów ilościowych.

Trochę inaczej ma się sprawa z arytmetyką, czy lepiej powiedzieć teorią liczb naturalnych. W arytmetyce, która stanowi obszar intensywnych dociekań, ciągle jeszcze pojawiają się ciekawe nierozwiązane, a jednocześnie często bardzo proste do sformułowania problemy. Badania w tym zakresie koncentrują się na dwóch różnych grupach tematycznych. Jedna z nich dotyczy własności samych liczb naturalnych i relacji między nimi, druga odnosi się do właściwości teorii aksjomatycznych liczb naturalnych i modeli dla nich. Zagadnienia dotyczące własności liczb naturalnych, które przykuwają uwagę matematyków, z reguły stanowią osobne zagadnienia, których próby rozwiązania doprowadzają do rozwoju wielu ważnych teorii. Często w dowodach twierdzeń z tego zakresu wykorzystuje się rozmaite działy matematyki współczesnej[16]. Stąd trudno zagadnienia pojawiające się w teorii liczb traktować jako problemy dotyczące wyłącznie ilości. Również badania w zakresie podstaw arytmetyki stanowią źródło ważnych problemów, ukazujących często nieoczekiwane własności systemów aksjomatycznych i modeli dla arytmetyki Peano (twierdzenia Gödla). Badania te jednak w naturalny sposób wykraczają poza aspekty ilościowe.

Elementarna geometria i arytmetyka liczb naturalnych stanowią obecnie tylko niewielki fragment matematyki. Współcześnie zaś rozwijają się takie działy matematyki, w których trudno jest dostrzec aspekty ilościowe. Co więcej, również w geometrii i arytmetyce istotne znaczenie odgrywają analizy jakościowe.

3. STANOWISKO FORMALISTYCZNE W KWESTII PRZEDMIOTU MATEMATYKI

Na początku XX wieku D. Hilbert sformułował program formalizacji matematyki. Wprawdzie cele, które stawiał przed sobą, okazały się być niemożliwe do zrealizowania, to osiągnięte wyniki (m. in. przez D. Hilberta, P. Bernaysa, J. von Neumanna, W. Ackermanna, G. Gentzena) dały podstawy dla przyjęcia poglądu, w myśl którego matematyka jest szeregiem teorii formalnych[17]. W tym ujęciu pytanie o przedmiot matematyki traci swój sens, gdyż dla teorii formalnej nie ma znaczenia jej przedmiotowe odniesienie, a tylko wynikanie logiczne z przyjętych (w zasadzie zupełnie dowolnie) aksjomatów. W tym sensie można również rozumieć przytoczoną wypowiedź Russella. W formalistycznym ujęciu teorie matematyczne są tylko niezinterpretowanymi rachunkami aksjomatyczno–formalnymi. Tym samym matematyka jest pozbawiona przedmiotu i jest uważana za grę symbolami, za język, ewentualnie za użyteczne narzędzie, wykorzystywane w innych naukach.

Zwolennikiem powyższego widzenia istoty matematyki jest H. B. Curry. Uważał on matematykę za naukę o systemach formalnych. Twierdził, że nie ma tylko jednego systemu, który obejmowałby całą

[16] Na przykład dowód Wilesa z 1995 r. wielkiego twierdzenia Fermata wykorzystuje teorię funkcji eliptycznych, zob. A. D. Aczel, *Wielkie twierdzenie Fermata. Rozwiązanie zagadki starego matematycznego problemu*, Warszawa 1998.

[17] Z twierdzeń Gödla, jak wiadomo, wynika, że całej matematyki nie można zawrzeć w jednym, zupełnym i niesprzecznym systemie formalnym. W stanowisku formalistycznym zatem przyjmuje się, że w matematyce mamy do czynienia z wieloma teoriami formalnymi.

matematykę (tak jak sądził Hilbert), ale mamy poszczególne równorzędne teorie[18].

Formalizm wywarł istotny wpływ na precyzację metody matematyki, jej języka, struktury teorii[19]. Rozwinęła się cała bogata dyscyplina matematyczna poświęcona badaniom teorii sformalizowanych – metamatematyka.

Formalizacja teorii matematycznej pozwala na przedstawienie wiedzy matematycznej w przejrzystej postaci. Jeżeli mamy do czynienia z teorią aksjomatyczną czy formalną, to stosunkowo łatwo sprawdzić, czy nie ma w niej sprzeczności, luk lub błędnych kół w rozumowaniach. Formalizacja zapewnia matematyce ścisłość, jasność, precyzję w wyrażaniu jej twierdzeń. Nic jednak nie dzieje się za darmo. Twierdzenia limitacyjne ukazują nam szereg ograniczeń, którym podlega ta metoda. Mianowicie, w niesprzecznej teorii formalnej nie wszystkie ważne pojęcia dają się zdefiniować, można też wskazywać zdania od niej niezależne.

Aksjomatyzacja i formalizacja jakiejś teorii matematycznej jest z reguły zakończeniem pewnego procesu kształtowania się teorii nieformalnej, która w swej początkowej fazie często jest daleka od ściśle formalnego wzorca. Wydaje się, że dla matematyki charakterystyczne jest raczej posługiwanie się wyłącznie rozumowaniami dedukcyjnymi, a nie formalizacja. Matematyka bowiem przede wszystkim interesuje treść dowodzonych twierdzeń. Często nie jest dla niego ważne to, w jakiej teorii aksjomatyczno-dedukcyjnej pracuje, lecz uzyskanie konkretnego wyniku. Matematyk stawia problem, a następnie poszukuje jego rozwiązania, wykorzystując w tym celu wszystkie dozwolone przez paradygmat uprawiania matematyki metody. Stąd często poszukuje pewnych własności obiektów matematycznych poza ramami teorii ściśle odnoszącej się do danego problemu. Na przykład w teorii liczb pierwszych interesujące wyniki uzyskano posługując się rachunkiem prawdopodobieństwa.

I. Lakatos podaje przykłady takich dowodów, których nie daje się umieścić w systemie formalnym. Szczególnie interesujący z tego punktu widzenia jest dowód Cauchy'ego twierdzenia Eulera o wielościanach[20]. R. Murawski zwraca uwagę na to, że dla matematyka tak naprawdę

---

[18] H. B. Curry, *Outlines of a Formalist Philosophy of Mathematics*, Amsterdam 1951.

[19] Co więcej, formalizacja jako narzędzie ściślejszego wyrażania teorii znalazła zastosowanie poza matematyką. Warto wymienić tu próby formalizacji rozumowań w filozofii.

[20] I. Lakatos, *Proofs and refutation. The logic of mathematical discovery*, ed. J. Worrall, E. Zahar, Cambridge University Press 1976.

ważna jest prawdziwość a nie niesprzeczność w ramach danego systemu formalnego[21]. Jeśli nawet prawdziwość jakiegoś zdania matematycznego zależy od systemu aksjomatycznego (na przykład prawdziwość hipotezy continuum), to matematyka z reguły interesuje prawdziwość w konkretnych modelach danej teorii.

Ograniczenia teorii formalnych I rzędu, wynikające z twierdzeń limitacyjnych, a także wymienione powyżej argumenty (natury już praktycznej), powodują, że podejmowane są próby wyjścia poza ograniczenia narzucane przez logikę I rzędu poprzez stosowanie metod infinitystycznych lub procedur nierozstrzygalnych. Wykorzystuje się też języki wyższych rzędów. Można zatem stwierdzić, że formalizacja jest wprawdzie bardzo użytecznym narzędziem w pracy matematyka, lecz jest to tylko narzędzie, które nie może przesądzać o istocie matematyki.

4. UJĘCIE STRUKTURALISTYCZNE PRZEDMIOTU MATEMATYKI

W wieku XX podstawowym pojęciem matematycznym stało się pojęcie zbioru. Wiele rozmaitych badanych przez matematyków pojęć definiuje się jako zbiory o pewnych szczególnych własnościach[22]. Z reguły matematyków interesują nie tylko same zbiory jakichś obiektów, lecz również relacje między tymi obiektami. Stąd w matematyce współczesnej wielką rolę przypisuje się pojęciu struktury matematycznej. Pojęcie to występuje w wielu różnych działach matematyki, przede wszystkim algebrze, topologii, teorii modeli. Patrzenie na matematykę przez pryzmat pojęcia struktury matematycznej stało się w filozofii matematyki bardzo popularne i leżało u podstaw prac zespołu bourbakistów, którzy przy pomocy dwóch kluczowych pojęć dla matematyki XX wieku: zbioru i struktury matematycznej – próbowali wyrazić wszystkie pozostałe pojęcia matematyczne.

Matematyka jest zatem określana jako nauka o strukturach matematycznych. Należy podkreślić, że w tym ujęciu przedmiotu matematyki struktura jest widziana całościowo: istotne są relacje między elementami, a nie same te elementy. Zatem nie jest ważne, czym są elementy dziedziny struktury, a istotne stają się same relacje. To relacje nadają

---

[21] R. Murawski, *Funkcje rekurencyjne i elementy metamatematyki. Problemy zupełności, rozstrzygalności, twierdzenia Gödla*, Poznań 1990, 158–159.

[22] Na redukcję matematyki do teorii mnogości można patrzeć jak na współczesną wersję logicyzmu. W przeciwieństwie do prób zredukowania matematyki do logiki wyrażenie pojęć matematycznych w terminach teoriomnogościowych zostało uwieńczone powodzeniem.

kształt strukturze, za elementy (za kresy relacji) możemy zaś podstawiać cokolwiek. Dla identyfikacji struktury nie ma to żadnego znaczenia. Zatem uprawnione jest stwierdzenie, że liczba naturalna jest określona poprzez relacje w pewnej szczególnej strukturze (czy dokładniej w klasie wszystkich struktur izomorficznych między sobą). W takim sensie bycie liczbą naturalną jest własnością czysto relacyjną.

Czym jest struktura matematyczna, jaki jest jej sposób istnienia stanowią ważne zagadnienia filozoficzne. Najczęściej traktuje się strukturę jako byt idealny, a więc przyjmuje się jakąś formę platonizmu[23]. W taki sposób strukturę widzą S. Shapiro i M. Resnik. Odrzucają istnienie jakichś obiektów matematycznych, które traktują tylko jako miejsca w strukturze, wyznaczone przez relacje.

S. Shapiro traktuje strukturę jak powszechnik, którego własności są niezależne od matematyka. Dany system obiektów powiązanych relacjami jest tylko ukonkretnionym przykładem. Co więcej, według S. Shapiro, pewne struktury są egzemplifikowane w dziedzinie rzeczywistości fizycznej. Dlatego związek matematyki z naukami przyrodniczymi polega na odczytywaniu struktur matematycznych, leżących u podstaw niematematycznego uniwersum. Różnica między strukturami matematycznymi a innego typu strukturami polega tylko na innej metodzie ich prezentacji i badania – w matematyce jest to metoda aksjomatyczno–dedukcyjna. Tym samym strukturą matematyczną staje się każda struktura badana przez matematyka[24].

Dla M. Resnika struktura (wzór – *pattern*) jest niematerialnym, niementalnym obiektem, istniejącym poza czasem i przestrzenią. Struktury poznajemy poprzez szereg doświadczeń, które M. Resnik określa „doświadczaniem czegoś jako wzoru". Potraktowanie matematyki jako nauki o strukturach może, zdaniem M. Resnika, wyeliminować trudności platonizmu obiektowego, które wiążą się z istnieniem różnych redukcji teorii matematycznych, a także z wynikami uzyskanymi w twierdzeniach limitacyjnych[25].

---

[23] Można wyróżnić klasyczny platonizm (platonizm obiektowy), w którym przyjmuje się realne istnienie obiektów matematycznych takich jak, na przykład, liczby naturalne, i platonizm strukturalistyczny, w którym utrzymuje się, że realnie istnieją struktury widziane całościowo.

[24] S. Shapiro, *Mathematics and Reality,* Philosophy of Science 50(1983)4, 534–542.

[25] M. D. Resnik, *Mathematics as a Science of Patterns: Ontology and Reference,* Noûs 15(1981), 529–530; tenże, *Mathematics as a Science of Patterns: Epistemology,* Noûs 16(1982), 95–99.

Patrzenie na matematykę jako na naukę o strukturach matematycznych zawęża przedmiot jej badań. Dzieje się tak dlatego, że po pierwsze, nie wszystko, co bada matematyk da się potraktować jak strukturę matematyczną. W szczególności, przedmioty badań metamatematyki, teorii zbiorów fraktalnych, dynamiki chaotycznej, grup skończonych (zwłaszcza ich klasyfikacja) składają się z obiektów jednostkowych, w pewnym sensie unikalnych, niepowtarzalnych. Matematyka w tych przypadkach interesuje przede wszystkim konkretny przedmiot matematyczny, a nie cała struktura, której często w ogóle nie widać[26]. Po drugie, dla matematyka ważne są nie tylko same relacje, ale również w pewnych sytuacjach istotne są elementy, między którymi te relacje zachodzą, gdyż często to „natura" obiektów wyznacza możliwe relacje między nimi. Oczywiście w wielu przypadkach istotne stają się ogólne własności działań (zwłaszcza w algebrze), funkcji (w topologii), relacji (na przykład w teorii struktur porządkowych), to często równie ważne są same obiekty, które niejako mogą narzucać „kształt" strukturze. Na przykład, na liczby rzeczywiste można patrzeć oczywiście poprzez pryzmat pewnej struktury – ciała uporządkowanego. Historycznie jednak to najpierw matematycy mieli do czynienia z konkretnymi liczbami rzeczywistymi i działaniami na nich; utożsamiali je z punktami na prostej. Dopiero niedawno zostały wybrane pewne ich charakterystyczne własności, które określają struktury izomorficzne ze zbiorem liczb rzeczywistych.

Matematyk zajmuje się niewątpliwie strukturami matematycznymi, poszukuje tych struktur. Ich znalezienie w jakimś obszarze badań porządkuje sytuację, może upraszczać badane zagadnienie, pozwala nam wyniki uzyskane w pewnym obszarze przenosić do innego, gdy tylko rozpoznamy, że mamy do czynienia z podobnymi strukturami. Same struktury w badaniach matematycznych to jednak nie wszystko, równie istotne są konkretne obiekty i ich własności. W szczególności, jeszcze w starożytności wyszukiwano liczby naturalne o interesujących z jakiegoś punktu widzenia własnościach, liczbom tym nadawano nawet nazwy, na przykład, liczby doskonałe, pierwsze, trójkątne. Obecnie „modne" są badania zbiorów fraktalnych. W tym przypadku również matematyka

[26] Omówienie przykładów takich obiektów matematycznych, które są interesujące dla matematyka „same w sobie", a nie poprzez ich strukturalne własności, jest w: K. Wójtowicz, *Realizm mnogościowy. W obronie realistycznej interpretacji matematyki*, Warszawa 1999, 144–148.

interesują konkretne zbiory, na przykład, własności zbioru Cantora czy Mandelbrota. W analizie matematycznej poszukuje się przykładów funkcji o szczególnych własnościach, na przykład, funkcji przekształcającej odcinek na kwadrat, funkcji ciągłej nigdzie nieróżniczkowalnej. W geometrii bada się poszczególne figury geometryczne, na przykład, trójkąty prostokątne, których boki są liczbami naturalnymi. Wydaje się zatem, że przy tworzeniu teorii przedmiotu matematyki nie uciekniemy przed problemem obiektów matematycznych.

5. PROBLEM OBIEKTÓW MATEMATYCZNYCH

Powyżej przedstawiłam trzy odmienne poglądy na temat przedmiotu matematyki. Konieczne jest podkreślenie, że przejście od traktowania przedmiotu matematyki jako ilości do ujęć formalistycznego bądź strukturalistycznego dokonywało się pod wpływem rozwoju samej matematyki. Wyrosła z geometrii i elementarnej arytmetyki matematyka zwłaszcza w ostatnich dwóch wiekach przeszła gruntowną metamorfozę. Jej przedmiot stawał się coraz bardziej abstrakcyjny i coraz mniej związany z naocznym doświadczeniem oraz intuicją geometryczną i arytmetyczną. Wraz z tym zmieniały się również koncepcje filozoficzne dotyczące istoty matematyki.

Nieadekwatność w odniesieniu do matematyki współczesnej stanowiska głoszącego, że przedmiotem matematyki jest ilość, a jednocześnie trudności z określeniem istoty obiektów matematycznych doprowadziły do powstania koncepcji formalistycznej i strukturalistycznej. W tych stanowiskach pomija się obiekty matematyczne takie jak, na przykład, konkretne liczby, konkretne funkcje, figury geometryczne czy zbiory, a ujmuje się pewne globalne cechy teorii matematycznych: tylko stronę formalną teorii (w formalizmie) lub aspekty czysto relacyjne (w strukturalizmie). Trzeba jednak podkreślić, że aksjomatyzację i formalizację należy uznać za narzędzia pracy matematyka, narzędzia wprawdzie bardzo użyteczne, ale tylko narzędzia. Z kolei ujęcie strukturalistyczne, jak to już podkreślałam, nie może być zastosowane do wszystkich sytuacji, które stają się przedmiotem badania matematyka. Konieczne zatem staje jeszcze raz postawienie pytania o przedmiot matematyki, a w tym kontekście poruszenie zagadnienia, czym są obiekty matematyczne?

Problem obiektów matematycznych jest najtrudniejszym zagadnieniem w filozofii matematyki. Stąd być może próby poszukiwania takich teorii, które ten problem omijają – teoria formalna, czy struktura matematyczna są bardziej „uchwytne" niż obiekt matematyczny. Problem przedmiotu niesie bowiem ze sobą pytania ontologiczne: przede wszystkim o sposób istnienia tych obiektów, a także o ich istotę. Obiekty matematyczne na pewno nie są materialne, nie są związane z czasem lub przestrzenią, są, jak mówimy, abstrakcyjne. Czym więc są, jaka jest ich natura, gdzie istnieją?

Powyższe zagadnienia są obecnie rozważane w filozofii matematyki w związku z dyskusją między stanowiskiem realistycznym a nominalistycznym. Jednym ze zwolenników poglądu, w myśl którego obiekty matematyczne są realne jest W. V. O. Quine. Jest on autorem tzw. argumentu z niezbędności. Quine stwierdza, że teorie matematyczne stanowią integralną część teorii fizycznych. Skoro zatem fizyk, akceptując, że teoria fizyczna opisuje jakiś fragment rzeczywistości, uznaje istnienie pojęć teoretycznych, to nie może jednocześnie odrzucać istnienia obiektów matematycznych, które również w tej teorii występują. Matematyka jest niezbędnym składnikiem teorii fizycznych. Nie widać również żadnego kryterium, które pozwoliłoby oddzielić pojęcia odnoszące się bezpośrednio do rzeczywistości od tych, które są wyłącznie naszymi konstruktami. Zatem realistyczna interpretacja teorii fizycznych niejako zmusza do przyjęcia, że istnieją również obiekty matematyczne[27]. Warto jednak dodać, iż Quine nie chcąc wchodzić w spór o sposób istnienia obiektów matematycznych, programowo nie wypowiada się w tej kwestii.

Przeciwko poglądom Quine'a wysunięto szereg zastrzeżeń. Istotne pochodzą od zwolenników stanowiska nominalistycznego. Próbują oni wykazać, że aparat matematyczny tylko upraszcza rozumowania, natomiast nie wnosi niczego istotnie nowego do teorii fizycznej. Teorie fizyczne nie muszą opierać się na teoriach matematycznych. Czynione są nawet próby przeformułowania teorii fizyki zgodnie z powyższym poglądem[28].

Nie chcąc wchodzić w spór między ujęciami zbliżonymi do poglądów Quine'a a stanowiskiem nominalistycznym[29], zauważmy tylko, że argument z niezbędności nie wnosi w zasadzie niczego nowego, jeśli

---

[27] W. V. Quine, *Granice wiedzy i inne eseje filozoficzne*, Warszawa 1986, 43–47.

[28] Najbardziej znane są próby: H. Field, *Science without numbers*, Oxford 1980; tenże, *Realism, mathematics and modality*, Oxford–Cambridge 1989; M. Balaguer, *Towards a nominalisation of quantum mechanics*, Mind 105(1996)418, 209–226. W Polsce taką próbę podjął T. Bigaj, *Jakościowe teorie czasoprzestrzeni*, Filozofia Nauki (1995)4, 33–52.

[29] Spór ten referuje K. Wójtowicz, *dz.cyt.* Autor jednocześnie podaje własne argumenty na korzyść stanowiska Quine'a.

chodzi o kwestię istoty i sposobu istnienia obiektów matematycznych. Stanowisko nominalistyczne w filozofii matematyki wydaje się być trudne do obrony. Przeciwko niemu sformułowano szereg zarzutów opierających się na analizie samej matematyki[30] i nie widać potrzeby wychodzenia poza tę dyscyplinę i sięgania do jej zastosowań. Argument z niezbędności poprzez swój minimalizm ontologiczny stanowi tylko jeszcze jedną próbę wykazania, że nominalistyczne wersje matematyki są skazane na niepowodzenie, natomiast nie może pomóc przy rozwiązywaniu zagadnień ontologicznych.

Jak się wydaje, przeniesienie sporu o przedmiot matematyki na zastosowania tej dyscypliny nie może doprowadzić do uzyskania istotnych rozstrzygnięć w kwestii sposobu istnienia pojęć matematyki. Problemy wynikające z zastosowań (niezwykle skutecznych) matematyki w naukach przyrodniczych, ekonomicznych, społecznych tylko w niewielkim stopniu mogą rozjaśnić te kwestie. Konieczna staje się analiza samych pojęć matematycznych, ich tworzenia, roli, jaką odgrywają w teoriach matematycznych, a także jak dane pojęcie jest powiązane z innymi.

Podstawową metodą tworzenia nowych pojęć matematycznych jest metoda abstrakcji i idealizacji. Poprzez proces idealizacji i abstrakcji powstały podstawowe pojęcia geometrii elementarnej. Niedoskonałe linie i kształty spotykane w przyrodzie i otaczające nas na co dzień zostały udoskonalone, a następnie oderwane od swoich fizycznych odpowiedników. Również pojęcia poszczególnych liczb naturalnych zostały utworzone poprzez abstrakcję. Liczbę 5 możemy z tego punktu widzenia potraktować jako wspólną własność wszystkich układów złożonych z pięciu elementów. Podobnie tworzymy inne pojęcia matematyczne, na przykład, pierścienia, wydzielając wspólne własności działań. Warto zauważyć, że z reguły matematyk, aby utworzyć jakieś pojęcie, nie musi dysponować zbyt dużą klasą podobnych do siebie obiektów, by przypisać im wspólną nazwę. Należy podkreślić, że podobnie tworzymy pojęcia w języku naturalnym, abstrahując wspólne cechy pewnych przedmiotów i zaliczając je do jednego rodzaju. W ten sposób powstały, na przykład nazwy ogólne: pies, człowiek, stół.

Proces powstawania pojęć w matematyce charakteryzuje się jednak pewną szczególną własnością, a mianowicie tworzeniem pojęć od in-

[30] Podejmowane próby przeformułowania matematyki tak, aby wyeliminować z niej pojęcia ogólne, nie powiodły się.

nych pojęć, czyli abstrakcjami wielostopniowymi[31]. Łatwo bowiem zauważyć, nawet przy pobieżnej analizie pojęć matematycznych, że mamy do czynienia z pojęciami na różnych poziomach abstrakcji. Na przykład, liczba naturalna 5 jest na niższym poziomie abstrakcji niż pojęcie zbioru liczb naturalnych, pojęcie funkcji liniowej na niższym niż pojęcie stycznego pola tensorowego na przestrzeni różniczkowej.

Z tego punktu widzenia warto przyjrzeć się bliżej sposobom tworzenia i funkcjonowania na przykład pojęć algebraicznych[32]. Najważniejsze pojęcia algebry abstrakcyjnej to: struktura algebraiczna, dziedzina struktury, działanie, relacja, homomorfizm, kategoria. Wśród struktur algebraicznych można wyróżniać rozmaite ich rodzaje, na przykład: półgrupa, ciało, przestrzeń liniowa.

Już nawet pobieżna analiza tego, czym się zajmuje algebraik, pozwala dostrzec, że mamy do czynienia z pojęciami na różnych poziomach abstrakcji. Najniższy poziom tworzą konkretne elementy dziedziny danej struktury algebraicznej. Następnie mamy zbiór tych elementów, tworzący dziedzinę konkretnej struktury. W dalszej kolejności są konkretne działania (na przykład, dodawania liczb całkowitych) i relacje (na przykład, mniejszości wśród liczb rzeczywistych). Następnie konkretne struktury algebraiczne (na przykład, pierścień liczb całkowitych, grupa symetrii kwadratu, permutacje zbioru złożonego z elementów $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$). Jeszcze wyższe piętro stanowią pojęcia: półgrupa, grupa, pierścień, przestrzeń liniowa, moduł.

Na konkretnych strukturach można wykonywać operacje (na przykład tworzyć sumę prostą, strukturę ilorazową). Bada się również własności przekształceń jednej struktury w inną. Mamy zatem do czynienia z konkretnymi homomorfizmami (na przykład z logarytmem naturalnym przekształcającym grupę multyplikatywną liczb rzeczywistych dodatnich na grupę addytywną liczb rzeczywistych) i z pojęciem homomorfizmu.

Wydaje się, że wśród pojęć matematycznych można wyróżnić przynajmniej trzy różne rodzaje. Jednym z nich są te pojęcia, które można

---

[31] Analizie abstrakcji wielostopniowych w matematyce jest poświęcony artykuł M. Lubańskiego, *Zagadnienie abstrakcji wielostopniowych,* w: *Z zagadnień filozofii przyrodoznawstwa i filozofii przyrody,* t. VI, red. M. Lubański, S. W. Ślaga, Warszawa 1984, 121–132.

[32] Szczegółowa analiza pojęć algebraicznych została przeprowadzona w: A. Lemańska, *Zagadnienie istnienia obiektów matematycznych,* Studia Philosophiae Christianae 35(1999)2, 21–32.

potraktować jak konkretne obiekty, elementy zbioru lub dziedziny struktury matematycznej. Drugi rodzaj stanowią zbiory obiektów bądź konkretne struktury. Trzeci zaś pojęcia ogólne takie jak, na przykład: pierścień, struktura, przestrzeń liniowa, pole wektorowe.

To pojęcie matematyczne, które może stać się elementem jakiegoś zbioru, jednocześnie można uznać za konkretny obiekt matematyczny. Co więcej, ponieważ zbiory również mogą stać się elementami nowego zbioru, nie widać więc powodu, by i zbiory nie mogły zostać potraktowane jak obiekty. Na zbiorach, czy strukturach matematycznych można również wykonywać pewne działania, stąd zbiory, struktury, czy inne tego typu pojęcia trzeba potraktować tak jak konkretne przedmioty.

Podsumujmy, w matematyce współczesnej daje się wyszczególnić wiele poziomów abstrakcji: można wskazywać całe szeregi pojęć od bardziej konkretnych do ogólniejszych: od poszczególnych liczb do struktur algebraicznych, od poszczególnych figur geometrycznych do przestrzeni topologicznych itp. Co więcej, w matematyce ważne są zarówno pojęcia na najniższych poziomach abstrakcji, które możemy potraktować jak konkretne obiekty, jak i relacje między tymi przedmiotami. Z kolei te relacje z nowego punktu widzenia mogą być potraktowane jak nowe obiekty. Rozpatrując pojęcia matematyczne w kontekście procesu abstrahowania, wydaje się konieczne, potraktowanie przynajmniej części z nich jak przedmiotów, które mogą stać się punktem wyjścia dla dokonywania abstrakcji. Czy można zatem mówić o takim samym sposobie istnienia odnośnie do wszystkich pojęć matematycznych, być może konieczne staje się wyróżnienie różnych klas pojęć i różnych ich sposobów istnienia. Rozważeniu tego zagadnienia będzie poświęcony następny paragraf.

6. ISTNIENIE POJĘĆ MATEMATYCZNYCH

Różnica w stopniu abstrakcyjności pojęć matematycznych powoduje to, że pewne pojęcia są bardziej konkretne od innych. Wydaje się, że niektóre z nich można niejako „wziąć do ręki", na przykład: liczbę 5, funkcję $y=3x^2$, relację mniejszości wśród liczb naturalnych, pierścień liczb całkowitych. Natomiast pojęcia: liczba naturalna, funkcja, relacja, pierścień, przestrzeń liniowa, wyróżniają całe klasy obiektów o tych samych, z jakiegoś punktu widzenia, interesujących nas własnościach.

Wydaje się zatem, że pojęcia w matematyce można podzielić przynajmniej na dwie wyraźnie różniące się grupy. Takie pojęcia, które można uznać za konkretne obiekty i takie, na które można patrzeć jak na pojęcia ogólne.

W pierwszej grupie znajdują się takie pojęcia jak: konkretne liczby (na przykład liczba 5 czy π), konkretne działania (na przykład dodawanie liczb naturalnych), konkretne funkcje (na przykład funkcja $y=3x^2$), konkretne struktury algebraiczne (na przykład pierścień liczb całkowitych, ciało liczb zespolonych). Do drugiej grupy należy zaliczyć na przykład pojęcia: liczba naturalna, funkcja, grupa, pierścień, ciało algebraicznie domknięte, działanie, homomorfizm. Spełniają one w matematyce rolę nazw ogólnych podobną jak pojęcia: kot, zwierzę, człowiek, stół w języku potocznym. W tym kontekście pojęcia z grupy pierwszej można potraktować analogicznie do nazw własnych z języka potocznego.

Bliższa analiza pojęć z powyższych dwóch grup pozwala stwierdzić, że mamy do czynienia z dwoma wyraźnie różnymi sposobami ich określania i funkcjonowania. Pojęcia z pierwszej grupy są określane przy pomocy definicji bądź wskazujących dane obiekty, bądź podających ich konstrukcję. Z kolei pojęcia z drugiej grupy z reguły określane są przy pomocy definicji aksjomatycznych, podających szereg warunków, które powinien spełniać konkretny obiekt, aby być na przykład funkcją, grupą, ciałem uporządkowanym, homomorfizmem. Może też być podany schemat konstrukcji, prowadzący do utworzenia nowego obiektu określanego daną nazwą.

Różne są też sposoby funkcjonowania. Obiekty z pierwszej grupy mogą zostać elementami pewnego zbioru, należeć do dziedziny funkcji, można na nich wykonywać określone operacje. Tych własności nie posiadają pojęcia z grupy drugiej. Na przykład, konkretne liczby naturalne mogą utworzyć zbiór liczb naturalnych, konkretne funkcje zmiennej rzeczywistej mogą utworzyć zbiór funkcji zmiennej rzeczywistej, konkretne pierścienie mogą utworzyć zbiór pierścieni, czy kategorię pierścieni. Natomiast samo pojęcie funkcji, pierścienia czy liczby nie może zostać elementem jakiegoś zbioru. Zatem w przeciwieństwie do pojęć z poprzedniej grupy nie mogą być one traktowane jako konkretne obiekty. Pojęcia z grupy pierwszej natomiast stają się przykładami konkretnych obiektów, którym można przypisać ogólną nazwę, na przykład, pierścień wielomianów o współczynnikach całkowitych jest przykładem pierścienia, przestrzeń kartezjańska R^7, przykładem przestrzeni topologicznej bądź metrycznej, zbiór Mandelbrota, zbiór Cantora są przykładami fraktali.

Zatem to, co może być elementem jakiegoś zbioru można uważać za konkretny obiekt matematyczny, natomiast to, co jest tylko nazwą dla pewnej klasy przedmiotów o wspólnych własnościach, stanowi pojęcie na najwyższym poziomie abstrakcji i odgrywa zupełnie inną rolę w matematyce.

Kryterium uznania danego pojęcia za konkretny obiekt jest sprawdzenie, czy jest możliwe potraktowanie tego pojęcia jako elementu pewnego zbioru, wykonanie na nim jakichś operacji czy manipulacji. Jeśli tego nie jesteśmy w stanie uczynić, to pojęcie takie trzeba uznać za nazwę ogólną analogiczną do pojęcia ogólnego w języku potocznym. Takimi pojęciami są: liczba naturalna, funkcja, relacja, ciało, działanie, przestrzeń metryczna. Na tych pojęciach nie możemy wykonywać manipulacji. Chociaż konkret może być na bardzo wysokim poziomie abstrakcji (już same pojęcia poszczególnych liczb naturalnych, czy konkretnego trójkąta są pojęciami abstrakcyjnymi), to tym różni się od pojęcia–nazwy ogólnej, że może stać się elementem zbioru.

Wyróżnienie dwóch kategorii pojęć matematycznych sugeruje, że w odniesieniu do sposobów ich istnienia nie można stosować tej samej formuły. Wydaje się konieczne osobne potraktowanie obiektów matematycznych znajdujących się w tych różnych klasach i przypisanie im odmiennych sposobów istnienia.

Metody określania oraz sposoby funkcjonowania pojęć z pierwszej grupy wydają się prowadzić do wniosku, że najwłaściwsze jest przypisanie im istnienia obiektywnego, niezależnego od matematyka. Matematyk bowiem, badając te pojęcia, odnosi wrażenie, że istnieją one uprzednio, zanim ktokolwiek o nich pomyślał, czy zaczął je badać. Ponieważ jednocześnie znaczna część tych pojęć nie jest powiązana z przedmiotami materialnymi, więc i ich istnienie musi być niezależne od świata fizycznego. W odniesieniu zatem do tych pojęć matematycznych, które są przez matematyków traktowane jak konkretne obiekty, opowiadam się za realizmem skrajnym, za platonizmem.

Pojęcia z grupy drugiej natomiast, wydają się, być tworem matematyka. To matematyk wydziela pewne wspólne własności przedmiotów matematycznych, łącząc je w jedną klasę i nadając im wspólną nazwę. To matematyk układa aksjomaty, określające cechy, które pozwalają utworzyć dane pojęcie. To matematyk dokonuje abstrakcji i idealizacji, z tym, że mamy tu do czynienia z procesem, którego punktem wyjścia nię są przedmioty materialne (jak miało to miejsce w przypadku tworzenia pierwszych pojęć matematycznych), lecz obiekty matematyczne. W związku z tym pojęciom z grupy drugiej należy przypisać istnienie związane z umysłem matematyka. W pojęciach tych bowiem wyraźnie widać rolę matematyka w ich tworzeniu. Opowiadam się zatem w tym przypadku za realizmem umiarkowanym[33], czy nawet konceptualizmem[34]. Oczywiście w odniesieniu do tych pojęć mamy do czynienia również ze swego rodzaju wyemancypowaniem się, z ich obiektywizacją. Widać jednak tu istotną rolę, jaką odegrał matematyk uogólniając i znajdując wspólne własności pewnych klas konkretnych obiektów[35].

Reasumując, proponuję w odniesieniu do tych pojęć matematycznych, które funkcjonują w matematyce jak konkretne obiekty, przyjąć platonizm (realizm skrajny), natomiast odnośnie do pojęć, które odgrywają tylko rolę nazw ogólnych, przyjąć realizm umiarkowany lub konceptualizm.

---

[33] W kontekście występowania abstrakcji wielostopniowych realizm umiarkowany należy rozumieć jako istnienie związane z obiektami matematycznymi, wtórne w stosunku do istnienia przedmiotów matematycznych, które posłużyły za punkt wyjścia procesu abstrakcji.

[34] Obecnie trudno byłoby rozstrzygać między tymi dwoma stanowiskami.

[35] R. Penrose dzieli struktury matematyczne na „dzieła Boże" (*God given*) i „dzieła ludzkie" (*human made*). Te pierwsze mają o wiele bogatszą strukturę i dają znacznie więcej wyników niż wydawało się tkwić w założeniach wyjściowych. Natomiast „dzieła ludzkie" nie wykazują takich właściwości. Są wprowadzane, na przykład, w dowodach twierdzeń, by uzyskać konkretny cel (R. Penrose, *Nowy umysł cesarza. O komputerach, umyśle i prawach fizyki*, Warszawa 1995, 118). Rozróżnienie Penrose'a opiera się na odmiennych podstawach niż zaproponowane przeze mnie w niniejszym artykule.