Jerzy Dadaczyński

Funkcje pojęcia wielkości w badaniach temporalności matematyki

Studia Philosophiae Christianae 37/2, 119-137

2001

JERZY DADACZYŃSKI
Wydział Filozofii, PAT Kraków

FUNKCJE POJĘCIA WIELKOŚCI W BADANIACH TEMPORALNOŚCI MATEMATYKI

Jednym z ważniejszych problemów dyskutowanych w ramach współczesnej filozofii nauki jest kwestia jej temporalności. Zostało wypracowanych kilka modeli zmienności nauki w czasie. Trzeba jednak mocno podkreślić, że modele te nie zostały skonstruowane dla nauki w ogóle, lecz w istocie dla jednej nauki, mianowicie dla fizyki. Oczywiście interesująca pozostaje nadal kwestia temporalności innych nauk, między innymi matematyki. Problem ten starano się rozwiązać, przenosząc na teren nauk o matematyce gotowe modele wypracowane przede wszystkim dla fizyki. Nie stworzono jednak dotychczas właściwej dla matematyki teorii jej rozwoju.

Rzecz jasna, przenoszenie modeli zbudowanych dla fizyki na teren badań nad rozwojem matematyki nie może być bezdyskusyjne. Klasyczne badania wskazują na zasadniczą odmienność przedmiotową, gnozeologiczną oraz metodologiczną nauk fizykalnych oraz nauk formalnych, do których zaliczana jest matematyka. Tradycyjnie klasyfikuje się matematykę jako formalną ze względu na przedmiot, aprioryczną, ze względu na charakter poznawczy oraz dedukcyjną, ze względu na stosowaną metodę. Natomiast nauki fizykalne, w owym klasycznym ujęciu, byłyby naukami realnymi, aposteriorycznymi oraz indukcyjnymi[1].

Oczywiście, sama taka klasyfikacja nie jest bezdyskusyjna. Przedstawiciele kierunków empirycznych podkreślają raczej aposterioryczny charakter matematyki, zaś w naukach fizycznych stosuje się współcześnie szeroko metodę aksjomatyczną. W kontekście odkrycia naukowego wielu dyscyplin matematycznych, na przykład rachunku całkowego w siedemnastym wieku, można się dopatrzyć stosowania metody indukcyjnej i powolnego uogólniania uzyskanych pojedynczych wyników. Jednak pomimo dyskusyjności klasyfikacji matematyki i fizyki na ogólnym planie nauk, przyjmuje się w niniejszym opracowaniu zasadniczą ich odmienność.

[1] Por. S. Kamiński, *Nauka i metoda. Pojęcie nauki i klasyfikacja nauk*, Lublin 1992[4], 285.

Przeniesienie na grunt badań nad matematyką modeli wypracowanych w badaniach nad rozwojem fizyki, owocuje przeniesieniem odnośnych kontrowersji na płaszczyznę badań nad rozwojem matematyki. I tak dominuje pogląd, iż matematyka rozwija się kumulatywnie[2]. Istnieją jednak również prace, w których podkreśla się niekumulatywny, nieciągły rozwój matematyki. I tak mówi się o rewolucjach w matematyce[3] czy też o zmianach programu badawczego w sensie Lakatosa[4]. Czasem twierdzi się, że rewolucje zachodziły nie tyle w warstwie przedmiotowej, co w filozofii matematyki[5].

Powstaje pytanie, czy w związku z podtrzymywanym przekonaniem o zasadniczej odmienności matematyki i fizyki, dozwolone jest przenoszenie wyników badań nad rozwojem fizyki na teren dociekań nad zmiennością matematyki. Odpowiedź pragmatyczna może brzmieć: skoro nie wypracowano dotychczas modeli właściwych dla rozwoju matematyki, to nie pozostaje nic innego jak stosowna transpozycja.

Wydaje się jednak, że nic nie zwalnia z obowiązku przeprowadzenia stosownych badań, które doprowadziłyby ostatecznie do zbudowania jakichś modeli, właściwych dla opisu rozwoju matematyki. Jest rzeczą oczywistą, że takie, proponowane badania, muszą sięgnąć do historii matematyki i, być może, uda się wówczas wypreparować jakieś kategorie matematyczne, pozwalające zbudować postulowane modele. Wydaje się też, że szczególną uwagę należy poświęcić tym epizodom z dziejów matematyki, w których zmieniała się ona szczególnie „intensywnie", a które czasami nazywa się sy-

---

[2] W ujęciach kumulatywnych podkreśla się, że kolejne (dziejowo) teorie matematyczne powiązane są ze sobą relacją korespondencji. Dwie teorie matematyczne uważa się za związane ze sobą relacją korespondencji, gdy pewna poddziedzina dziedziny przedmiotowej, dla której zbudowana została nowa teoria, jest izomorficzna z dziedziną wcześniejszej teorii matematycznej (por. E. Kałuszyńska, W. Mejbaum, *Uzasadnianie jako dialog*, Studia Filozoficzne 28(1984)7, 30-31).

[3] Por. J. W. Dauben, *Conceptual revolutions and the history of mathematics*, w: *Transformation and tradition in the sciences. Essays in honor of I Bernard Cohen*, ed. E. Mendelsohn, New York 1979, 81-103. Autor uważa, że zastosowane przez niego pojęcie rewolucji naukowych odbiega od znaczenia używanego w opracowaniach Kuhnowskich.

[4] Por. M. Hallett, *Towards a theory of mathematical research programmes*, The British Journal for the Philosophy of Science 30(1979), 1-25; 135-159.

[5] Por. M. J. Crowe, *Ten „laws" concerning patterns of change in the history of mathematics*, Historia Mathematica 2(1975), 161-165.

tuacjami kryzysowymi w matematyce. Wymienia się tutaj szczególnie odkrycie niewymierności, powstanie rachunku całkowego i różniczkowego oraz powstanie teorii mnogości wraz z odkryciem antynomii[6].

W niniejszym artykule proponuje się „wypreparowanie" z dziejów matematyki pewnego pojęcia, które może okazać się płodne w opisie temporalności matematyki. Przy pomocy tego pojęcia przeprowadzi się potem opis zmian zachodzących w matematyce w tych okresach, które uważa się za kryzysowe.

Proponowane pojęcie to pojęcie wielkości. Pojawiło się ono już u początków matematyki, w starożytnej Grecji. Należy je traktować jako pojęcie pierwotne, które w pewnym momencie rozwoju starożytnej matematyki otrzymało swoją uwikłaną definicję aksjomatyczną. Nie zostanie ona podana już w tym momencie, ponieważ ważne zmiany w matematyce starożytnej zaszły w czasach, kiedy nie posługiwano się jeszcze taką *explicite* sformułowaną aksjomatyką. Ważne jest, że do wielkości, w związku z rozwojem arytmetyki i geometrii, w okresie pitagorejskim zaliczano: liczby (naturalne), stosunki liczb naturalnych (liczby wymierne), jak i wielkości ciągłe, odcinki, pola, objętości. Dla starożytnych Greków – a także długo jeszcze po okresie greckim – matematyka była nauką o wielkościach.

Oczywiście można oponować przeciw traktowaniu pojęcia wielkości jako pewnego kryterium zmienności matematyki. Dzisiaj raczej nie ma zgody co do tego, że matematyka jest nauką o wielkościach. Jest raczej pojmowana – jeśli przyjmie się poprawność redukcji matematyki do teorii mnogości, proponowaną przez N. Bourbakiego – jako nauka o jakichkolwiek zbiorach i określonych na nich funkcjach (relacjach).

Przeciwko stanowisku odrzucającemu przydatność pojęcia wielkości w badaniu temporalności matematyki można sformułować dwa istotne argumenty. Po pierwsze ten, że, jak to już zaznaczono, przez wiele wieków rozwoju matematyki, praktycznie do dziewiętnastego wieku, traktowano ją jako naukę o wielkościach. Dlatego w badaniach zmienności matematyki w czasie takie pojęcie nie tylko może, ale i powinno być uwzględniane. Po wtóre,

---

[6] Por. J. Perzanowski, *Podstawy matematyki*, w: *Mała Encyklopedia Logiki*, Wrocław 1988², 142.

prawdą jest, że matematykę współcześnie traktuje się jako sprowadzalną do teorii mnogości – a więc jako naukę o jakichkolwiek zbiorach. Jednak z pojęciem zbioru bardzo blisko związane jest pojęcie pewnej wielkości, mianowicie liczby kardynalnej, mocy wyznaczanej przez dany zbiór. Każdy zbiór zatem posiada, czy też przynajmniej określa, pewną wielkość.

W trakcie rozwoju matematyki wyróżniono różne typy wielkości: wymierne, niewymierne, skończone, nieskończenie wielkie, nieskończenie małe. Nie zawsze wszystkie akceptowano na danym etapie rozwoju matematyki. Wydaje się, że można przedstawić model zmienności matematyki jako dzieje odkrywania i akceptowania, względnie odrzucania (z heterogennych względów) poszczególnych typów wielkości. Zmiany w akceptacji poszczególnych typów wielkości byłyby tu traktowane jako pewne zmiany nieciągłe w rozwoju matematyki.

Pierwszy okres w dziejach matematyki, ze względu na podejście do zagadnienia wielkości, to okres pitagorejski. Pitagorejczycy, aczkolwiek byli twórcami systemu geometrycznego[7], to główny nacisk kładli na zbudowaną przez siebie arytmetykę. Stworzyli oni arytmetykę liczb naturalnych oraz arytmetykę liczb wymiernych, które definiowali jako stosunki (pary uporządkowane) liczb naturalnych. Tych ostatnich nie nazywali liczbami, ponieważ głosili pogląd, iż liczby to wielości jednostek.

Pitagorejczycy byli początkowo przekonani, iż przy pomocy stosunku dwu liczb naturalnych – a zatem przy pomocy liczb wymiernych – można wyrazić stosunki dwu dowolnych, należących do tej samej „kategorii" wielkości geometrycznych, a więc stosunki dwu odcinków lub pól dwu figur płaskich. Zatem – i to jest istotne dla prowadzonych badań – wielkości geometryczne ciągłe, takie jak odcinki, pola, były wielkościami wymiernymi, wyrażalnymi przy pomocy stosunków liczb naturalnych. To prowadziło pitagorejczyków do przekonania, iż arytmetyka liczb wymiernych i w konsekwencji arytmetyka liczb naturalnych są dyscyplinami bardziej „podstawowymi" od geometrii. Do arytmetyki liczb naturalnych można było sprowadzić arytmetykę

[7] Historycy matematyki zastanawiają się nie tylko nad tym, czy system ten był systemem dedukcyjnym, ale nawet nad tym, czy był on również systemem aksjomatycznym.

liczb wymiernych i – według pierwotnej koncepcji pitagorejczyków – pośrednio geometrię[8].

Odkrycie niewymierności przez samych pitagorejczyków zmieniło ich pogląd na możliwość arytmetyzacji całej matematyki. Przede wszystkim jednak zmiana dotyczyła tego, że trzeba było uznać istnienie w matematyce wielkości niewymiernych, których nie daje się wyrazić przy pomocy stosunku dwu liczb naturalnych. Takie wielkości zawierała przede wszystkim geometria.

Już sami matematycy pitagorejscy zaczęli szukać dróg wyjścia z powstałego kryzysu. Teoretycznie istniały trzy sposoby wyjścia z sytuacji kryzysowej:

1. rozszerzyć pojęcie liczby tak, aby możliwym stało się – przy pomocy nowej klasy liczb – ujęcie stosunków wszystkich odcinków;
2. nie próbować arytmetyzować geometrii, ale jako dyscyplinę podstawową matematyki wybrać geometrię i geometryzować arytmetykę liczb wymiernych (a zatem i pośrednio arytmetykę liczb naturalnych). Za próbą geometryzacji arytmetyki liczb wymiernych przemawiało to, geometria okazała się być „bogatsza" (o wielkości niewymierne) od dziedziny liczb wymiernych;
3. posługiwać się w sposób nieścisły niewymiernościami, rezygnując z wypracowanego w szkole pitagorejskiej ideału dedukcyjnego budowania matematyki.

Pierwsza i trzecia z wymienionych dróg były w starożytnej Grecji nierealizowalne, z różnych zresztą powodów. Jeśli chodzi o trzecie z możliwych rozwiązań, to było ono dla starożytnych nie do zaakceptowania z powodu przyjętych zasad metanaukowych. Nie chcieli oni bowiem odstąpić od ideału metody dedukcyjnej. O ile trzecia droga była przez Greków nie do przyjęcia ze względów metanauko-

[8] Pitagorejczycy dokonali pewnego spostrzeżenia z zakresu akustyki, które pozwalało znaleźć arytmetyczną podstawę wysokości dźwięków. Rozszerzyli oni to spostrzeżenie na inne dziedziny świata fizycznego i twierdzili, że wszelkie prawidłowości świata można wyrazić przy pomocy liczb naturalnych i ich stosunków. To z kolei dało im podstawy do stwierdzenia, iż liczba jest poszukiwanym przez greckich filozofów *arché*. Możliwe są dwie interpretacje tego filozoficznego stanowiska pitagorejczyków: albo traktowali oni liczby jako materie świata zjawiskowego, albo traktowali oni liczby jako formę materii. Oczywiście pitagorejczycy nie posługiwali się jeszcze arystotelesowskimi terminami „materia" i „forma". Sam Arystoteles, relacjonujący poglądy pitagorejczyków, wahał się pomiędzy jedną a drugą interpretacją ich filozofii. Odkrycie niewymierności falsyfikowało przekonania ontologiczne pitagorejczyków. Od tego odkrycia datuje się upadek filozoficznego kierunku w ramach szkoły pitagorejskiej.

wych, to rozwiązanie pierwsze było nierealizowalne z powodów przedmiotowych. Matematyka była jeszcze w zbyt wczesnym stadium rozwoju, aby podołać postawionemu zadaniu[9].

Pozostała zatem tylko jedna droga dalszego rozwoju matematyki, mianowicie geometryzacja arytmetyki i algebry. W starożytności rozwiązywano wiele problemów algebraicznych przy pomocy aparatury geometrycznej.

Dla prowadzonych tutaj analiz istotne pozostaje to, że odkrycie niewymierności przez pitagorejczyków doprowadziło do zaakceptowania wielkości niewymiernych na gruncie matematyki. Stanowiło to również kres tej matematyki pitagorejskiej, która nie przewidywała miejsca dla wielkości niewymiernych w matematyce. Ważne jest jeszcze pytanie: jakie przyczyny doprowadziły do powstania nowego typu matematyki? Czy były to tylko przesłanki „wewnątrzmatematyczne", czy też powody zewnętrzne w stosunku do matematyki?

Pozornie mogłoby się wydawać, że przyczyny wprowadzenia niewymierności leżały wyłącznie w obrębie samej matematyki. Przeprowadzono po prostu dowód, który wykazał istnienie wielkości niewymiernych. Najprawdopodobniej dowód samych pitagorejczyków zachował się w pracach Arystotelesa. Trzeba jednak zwrócić uwagę, że jest to dowód nie wprost. Opiera się na zaakceptowanej przez pitagorejczyków logice. Odwołano się w nim do zasady sprzeczności podanej po raz pierwszy – tyle, że w wersji ontologicznej – przez Parmenidesa. Pitagorejczycy byli pod względem akceptowanej logiki pod niewątpliwym wpływem Parmenidesa, który jak oni sami, działał na terenie Wielkiej Grecji.

Należy zatem stwierdzić, że przełom w matematyce, zaakceptowanie wielkości niewymiernych, dokonało się również ze względów zewnętrznych w stosunku do matematyki, z powodów logicznych i pośrednio ontologicznych. W ten sposób powstała nowa matematyka, odmienna od pitagorejskiego wzorca.

---

[9] Eudoksos w czwartym wieku przed Chrystusem zbudował ścisłą teorię niewymierności, przypominającą teorię przekrojów R. Dedekinda. Teoria niewymierności Eudoksosa nie była jednak oparta wyłącznie na pojęciu liczb wymiernych. Matematyk ten posłużył się wielkościami niewymiernymi „wziętymi" z geometrii. Tak więc praca Eudoksosa nie przyniosła pełnej arytmetyzacji niewymierności. Stało się to dopiero możliwe w dziewiętnastym wieku, dzięki pracom K. Weierstrassa, G. Cantora oraz R. Dedekinda.

Bardzo ważnym osiągnięciem nowego etapu w rozwoju matematyki greckiej było aksjomatyczne opisanie pojęcia wielkości. Dokonał tego Eudoksos, a jego aksjomaty zostały powtórzone w *Elementach* Euklidesa. Aksjomaty zawierające uwikłaną definicję pojęcia wielkości (które jest w tej aksjomatyce pojęciem domyślnym) są następujące:

1. równe temu samemu są równe między sobą;
2. jeśli do równych doda się równe, to w sumie będą równe;
3. jeśli od równych odejmie się równe, to reszty będą równe;
4. pokrywające się wzajemnie są sobie równe;
5. całość jest większa od części.

Aksjomaty te, jak się okazuje, pozwalały na eliminowanie pewnych typów wielkości z matematyki czasów Eudoksosa. Uwaga ta dotyczy wielkości aktualnie nieskończenie wielkich.

Już w matematyce okresu pitagorejskiego można się było spotkać z pewnymi formami nieskończoności. Były to na przykład nieskończone procesy w geometrii. Odkrycie niewymierności też miało swoje odniesienie w zakresie nieskończoności. Nieskończonym było na przykład dziesiętne rozwinięcie pierwiastka z 2. Ale tak naprawdę myśl antyczna musiała podjąć zagadnienie nieskończoności w związku z aporiami Zenona. Paradoksy te mają swój oczywisty aspekt filozoficzny i fizykalny. Ale posiadają one również istotny aspekt matematyczny. Właśnie refleksja nad matematycznym znaczeniem aporii Zenona kazała wyeliminować starożytnym pojęcie wielkości aktualnie nieskończenie wielkich z matematyki.

To, dlaczego eliminowano wielkości aktualnie nieskończenie wielkie z matematyki, można pokazać na podstawie dyskusji aporii żółwia. Z aporii tej wynika, że Achilles, który w mitologii greckiej uchodził za szybkobiegacza, nigdy nie dogoni żółwia, który jest uosobieniem powolności. Niech bowiem Achilles znajdzie się w odległości a za żółwiem i niech biegnie od niego k razy szybciej. W momencie, kiedy Achilles dojdzie do punktu, z którego wychodził żółw, a zatem przejdzie odcinek a, żółw, który jest k razy wolniejszy przejdzie odcinek a/k. Następnie kiedy Achilles przejdzie odcinek a/k, wówczas żółw zdąży już pokonać odcinek a/k^2, itd. Zawsze pomiędzy Achillesem a żółwiem pozostanie różnica większa od zera.

Niech jednak będzie tak, jak w rzeczywistości zjawiskowej: w pewnej chwili t Achilles dogania żółwia. Drogi przebyte przez Achillesa oraz przez żółwia można zapisać następująco:

$S_A = a + a/k + a/k^2 + \dots$

$S_Ż = a/k + a/k^2 + a/k^3 + \dots$

Łatwo zauważyć pewną paradoksalną własność obydwu zbiorów odcinków. Z jednej strony Achilles powinien przebiec do momentu spotkania żółwia dokładnie tyle samo odcinków co ten drugi, bowiem każdemu odcinkowi o długości a/k^n przebytemu przez Achillesa odpowiada odcinek a/k^{n+1} drogi żółwia. Natomiast z drugiej strony istnieje funkcja wzajemnie jednoznaczna przyporządkowująca każdemu odcinkowi przebytemu przez żółwia równy co do długości odcinek drogi, który musi przebiec Achilles. Zawsze n-temu odcinkowi drogi żółwia odpowiada równy co do długości $n+1$ odcinek drogi Achillesa. Pierwsza część drogi Achillesa, ta o długości a, nie jest w tym przyporządkowaniu wzięta pod uwagę. Zatem do momentu spotkania, Achilles musi przebyć o jeden odcinek drogi więcej niż żółw. Jest to odcinek pierwszy, ten o długości a.

Jeśli teraz oznaczy się liczbę odcinków pokonanych przez żółwia literą β i pamięta się o tym, że według pierwszego sposobu obliczania liczba odcinków przebytych przez Achillesa wynosiła β, zaś według drugiego $1+\beta$, to otrzyma się równość:

$\beta = 1 + \beta$

Równość ta stanowi pogwałcenie piątego aksjomatu opisującego własności wielkości. Aksjomat ten stwierdza, że „całość jest większa od części". Natomiast równość wynikająca z analizy aporii Achilesa i żółwia prowadzi do wniosku, że w niektórych wypadkach całość nie musi być większa od części.

Starożytni myśliciele analizowali przyczyny tej paradoksalnej własności zbioru odcinków przebytych przez żółwia. Oczywistym jest, że liczba β jest liczbą nieskończoną. Stąd konkluzja, że to właśnie wielkości nieskończone „zachowują" się odmiennie od wielkości skończonych i inaczej niż wskazują to aksjomaty opisujące własności wielkości. Wniosek był następujący: należy wielkości nieskończone eliminować z matematyki. Generują one bowiem paradoksy, takie jak te, które zawierają w sobie aporie Zenona.

Rzecz jasna, eliminacja wielkości nieskończonych z matematyki starożytnej była pewnym procesem. W związku z trudnościami ujawnionymi przez paradoksy Zenona, toczyły się zaciekłe dyskusje nie tylko matematyków, ale i filozofów. Zagadnienie nieskończoności zaliczano bowiem również do tematyki filozoficznej. Ostatecznie to filozof Arystoteles sformułował stanowisko starożytnych wobec nieskończoności. Odrzucił on istnienie nieskończoności aktualnej. Dopuścił natomiast istnienie nieskończoności potencjalnej. Można ją sobie wyobrazić, jako stale rosnącą wielkość, która jednak w każdej chwili pozostaje skończona.

Można zatem stwierdzić, że zasadniczo odrzucenie wielkości aktualnie nieskończenie wielkich zostało spowodowane przyczynami „wewnątrzmatematycznymi". Akceptacja piątego aksjomatu Eudoksosa nie pozwalała na dopuszczenie w matematyce wspomnianych wielkości. Zarazem rozstrzygnięciu tej kwestii towarzyszyły również zażarte dyskusje filozoficzne.

Matematyka starożytna dysponowała jeszcze innym narzędziem, które pozwalało nie tylko zidentyfikować, ale i wyeliminować niepożądane wielkości. Narzędzie to stworzone zostało również przez Eudoksosa. Chodzi o aksjomat, który został później nazwany imieniem Archimedesa. Aksjomat ten orzeka, że jeśli dane są dwie wielkości a i b, to muszą istnieć liczby całkowite m oraz n, takie, że $ma > b$ i $nb > a$.

W istocie aksjomat Archimedesa może służyć do określania wielkości aktualnie nieskończenie wielkich oraz aktualnie nieskończenie małych. Niech będzie dana jakakolwiek liczba naturalna, na przykład 1. Jeśli dla wielkości ϕ nie istnieje liczba naturalna n, taka, że $n1 > \phi$, wówczas ϕ jest wielkością aktualnie nieskończenie wielką. Natomiast, jeśli dla wielkości η nie istnieje liczba naturalna m, taka, że $m\eta > 1$, wówczas η jest wielkością aktualnie nieskończenie małą. Wielkości, które nie spełniają aksjomatu Archimedesa, nazywa się wielkościami niearchimedesowymi. Pozostałe wielkości to wielkości archimedesowe, skończone. Matematyka starożytna zajmowała się tylko i wyłącznie wielkościami archimedesowymi.

Jak łatwo zauważyć, aksjomat Archimedesa eliminował z matematyki starożytnej wielkości zarówno aktualnie nieskończenie wielkie, jak i małe. Z nieskończenie wielkimi matematyka starożytna zetknęła się przede wszystkim w aporiach Zenona. Ale również wielkości aktualnie nieskończenie małe były matematykom greckim znane. Zaliczały się do nich kąty rogokształtne. Przykład może stanowić chociażby kąt zawarty pomiędzy łukiem okręgu oraz styczną do okręgu. Kąt taki, powiększany dowolną ilość razy, nie będzie większy od kąta pomiędzy styczną do okręgu, a dowolną prostą przecinającą styczną w punkcie styczności. Starożytni matematycy dotknęli również zagadnienia wielkości nieskończenie małych, wypracowując zalążkowe metody analizy matematycznej. Właśnie w pracach Eudoksosa i Archimedesa opracowane zostały pierwsze metody analityczne. I właśnie ci uczeni, formułując aksjomat Archimedesa, wyeliminowali wielkości aktualnie nieskończenie małe z matematyki starożytnej. Wydaje się, że o wyeliminowaniu wielkości aktualnie nieskończenie małych zadecydował „lęk przed nieskończonością", który zapanował w środowisku matematyków i filozofów starożytnych w związku z ujawnieniem paradoksów nieskończoności w aporiach Zenona.

Generalnie można stwierdzić, że ostatecznie w czwartym wieku przed Chrystusem ukształtował się nowy, inny od pitagorejskiego, wzorzec uprawiania matematyki. Zadecydował o tym odmienny niż w czasach pitagorejskich stosunek do niektórych typów wielkości. Przede wszystkim w tym okresie, w ramach aksjomatyki Eudoksosa, opisano podstawowe własności wielkości. Obok wielkości wymiernych zaakceptowano w matematyce istnienie wielkości niewymiernych. Aksjomat Archimedesa pozwolił na wyodrębnienie wielkości aktualnie nieskończenie wielkich oraz aktualnie nieskończenie małych. Obydwa te typy wielkości ze względu na przyczyny, które ujawniono powyżej, eliminowano z matematyki. Okazuje się też, że akceptacja względnie odrzucenie poszczególnych typów wielkości, miały zarówno swoje przyczyny w obrębie samej matematyki, jak również przyczyny pozamatematyczne, które posiadały charakter logiczny względnie ontologiczny.

Nowy wzorzec matematyki, który ukształtował się w czwartym wieku przed Chrystusem przetrwał aż do siedemnastego wieku n. e. W tym okresie intensywnie rozwijała się matematyka arabska, znane też są osiągnięcia matematyki europejskiej, średniowiecznej. Zasadniczo jednak rozwijano w średniowieczu nadal te tematy, które sformułowano już w matematyce greckiej, popitagorejskiej. Dla prowadzonych w niniejszym opracowaniu badań istotne jest jednak to, że w zakresie akceptacji, względnie negacji poszczególnych typów wielkości, począwszy od czwartego wieku przed Chrystusem nic się nie zmieniało. Nadal akceptowano, obok wielkości wymiernych, wielkości niewymierne, a także odrzucano wszelkie formy wielkości aktualnie nieskończonych. Wydaje się, że ten okres w dziejach matematyki, ten typ jej uprawiania, można nazwać matematyką Eudoksosa. To właśnie Eudoksos przyczynił się do opisu aksjomatycznego wielkości oraz do wyodrębnienia niektórych typów wielkości, a sformułowany przez niego aksjomat Archimedesa służył do eliminacji wielkości aktualnie nieskończenie wielkich i nieskończenie małych. Matematyka Eudoksosa panowała do początku siedemnastego wieku.

Dopiero wiek siedemnasty przyniósł istotny przełom związany ze sposobem uprawiania matematyki. Jak się okazuje, ten istotny przełom był nieodłącznie związany ze zmianą postawy uprawiających matematykę wobec jednego z typów wielkości. Po raz kolejny zatem pojęcie wielkości funkcjonuje jako dobre narzędzie w opisie temporalności matematyki.

W wieku siedemnastym, dzięki pracom kilkunastu uczonych, powstawał stosunkowo szybko rachunek różniczkowy i całkowy. Rozwój tego rachunku był między innymi spowodowany potrzebami zastosowań matematyki w fizyce, przede wszystkim w mechanice. Ta ostatnia rozwijała się szczególnie burzliwie, w związku z postulatami Galileusza, który zerwał z jakościową fizyką Arystotelesa i postulował matematyzację fizyki. Rachunek różniczkowy i całkowy do tego stopnia związany był z mechaniką, że badania w ramach analizy były często prowadzone przy pomocy języka mechaniki.

Należy uświadomić sobie, że matematycy w siedemnastym i osiemnastym wieku nie posługiwali się jeszcze definicjami granic, które ujmowane byłyby przy pomocy liczb rzeczywistych. Nie zarytmetyzowano jeszcze wówczas także teorii liczb rzeczywistych. Dlatego też w określaniu podstawowych pojęć analitycznych w wieku siedemnastym i osiemnastym trzeba się było odwoływać do pojęcia wielkości nieskończenie małych. Z góry należy zaznaczyć, że w okresie tym panowało ogromne zamieszanie w określeniu podstaw rachunku różniczkowego. Istota sporów dotyczyła tego, czy rachunek różniczkowy i całkowy oparty jest na wielkościach potencjalnie czy też aktualnie nieskończenie małych. W pierwszym wypadku posługiwano by się w matematyce jeszcze wielkościami archimedesowymi, choć nieustannie malejącymi. Natomiast w drugim przypadku akceptowano by już jako podstawę centralnej dyscypliny matematycznej w siedemnastym i osiemnastym wieku wielkości niearchimedesowe. Zatem zaakceptowano by w tej matematyce te wielkości, które były usuwane z matematyki Eudoksosa.

Warto w tym miejscu wskazać na niektóre szczegóły dyskusji, dotyczące tych wielkości, na których opierała się analiza w siedemnastym i osiemnastym wieku. I tak I. Newton, analizując pojęcie pierwszej pochodnej, mówił o nim jako o stosunku, w którym „znikają" niektóre wielkości. Powstaje pytanie, czym były dla angielskiego filozofa, fizyka i matematyka owe „znikające" wielkości. I. Newton twierdził, że są one wyobrażalne jako nieograniczenie malejące przez cały czas. Może powstać podejrzenie, że chodzi w tym miejscu o nieskończenie małą wielkość zmienną, w rozumieniu współczesnej matematyki. Być może chodziło I. Newtonowi o zaakcentowanie, że w określeniu pojęcia pochodnej pojawiają się wielkości potencjalnie nieskończenie małe, a więc że ma się w tym wypadku cały czas do czynienia z wielkościami archimedesowymi.

Natomiast inni twórcy analizy stali raczej na stanowisku, że analiza ufundowana jest na wielkościach niearchimedesowych, wielkościach aktualnie nieskończenie małych. Głównym propagatorem takiego stanowiska był G. de l'Hospital. Używał on takich sformułowań, z których wynikało, iż jest przekonany o realności wielkości aktualnie nieskończenie małych, którymi, jego zdaniem, posługiwano się w rachunku różniczkowym i całkowym[10].

Ostatecznie zwyciężyło w siedemnastym i osiemnastym wieku przekonanie prezentowane przez G. de l'Hospitala. Większość matematyków tego okresu głosiła opinię, że u podstaw rachunku całkowego i różniczkowego leżą wielkości niearchimedesowe, aktualnie nieskończenie małe. Te opinie pozwalają zasadnie wyodrębnić matematykę siedemnastego i osiemnastego wieku jako odrębny okres w dziejach matematyki. Matematyka wspomnianego okresu jest inną matematyką niż ta, której podstawy tworzył Eudoksos. Zaś, co istotne dla prowadzonych w niniejszym opracowaniu badań, kryterium pozwalającym wyróżnić nowy okres w dziejach matematyki jest właśnie akceptacja na gruncie ówczesnych prac wielkości niearchimedesowych, aktualnie nieskończenie małych. Tych, które w okresie poprzednim były odrzucane na podstawie aksjomatu Archimedesa.

---

[10] „Zwyczajna analiza zajmuje się tylko wielkościami skończonymi; ta niniejsza sięga tak daleko jak sama nieskończoność. Porównuje ona nieskończenie małe różnice wielkości skończonych, odkrywa relacje pomiędzy tymi różnicami. W ten sposób ujawnia stosunki pomiędzy wielkościami skończonymi, które są jak gdyby nieskończone w porównaniu z nieskończenie małymi wielkościami. Można by nawet powiedzieć, że ta analiza wychodzi poza nieskończoność: bowiem nie ogranicza się ona do nieskończenie małych różnic, lecz odkrywa relacje między różnicami tych różnic". G. de l'Hospital, *Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes*, Przedmowa, Paris 1696.

Warto jeszcze w tym miejscu uwypuklić przyczyny zmian, które zaszły w matematyce siedemnastego wieku. Akceptacja wielkości niearchimedesowych miała niewątpliwie swoje podstawy „wewnątrzmatematyczne". W tym właśnie okresie podjęto wątki analityczne prac starożytnych, przede wszystkim Eudoksosa i Archimedesa. Ze względów przedmiotowych – braku ściśle arytmetycznych podstaw teorii liczb rzeczywistych – konieczne było posłużenie się, przynajmniej w opinii większości ówczesnych badaczy, wielkościami niearchimedesowymi w rozwijającej się analizie. Jednak sama analiza, rachunek różniczkowy i całkowy powstały, jak to już wspomniano, nie tylko ze względów „wewnątrzmatematycznych". Nowe, ilościowe, a nie jakościowe podejście do zagadnień przyrodoznawstwa, miało również ogromny wpływ na rozwój tej gałęzi matematyki, w której – przynajmniej zdaniem ówczesnych naukowców – pojawiły się wielkości niearchimedesowe. Matematykę tego okresu można by nazwać matematyką Leibniza i Newtona. Ci bowiem uczeni najbardziej przyczynili się do rozwoju analizy. Ze względu jednak na stosunek do wielkości niearchimedesowych najbardziej reprezentatywny wydaje się być G. de l'Hospital. Dlatego można roboczo ów okres matematyki nazwać matematyką de l'Hospitala.

Kolejny etap w rozwoju matematyki można również wyodrębnić, przyjmując jako kryterium zmianę w zakresie akceptacji niektórych typów wielkości. To okres matematyki dziewiętnastego wieku. Charakteryzował się on, w przeciwieństwie do poprzedniego, wyeliminowaniem wielkości aktualnie nieskończenie małych z podstaw rachunku różniczkowego i całkowego i akceptacją na gruncie matematyki wielkości aktualnie nieskończenie wielkich.

To właśnie w dziewiętnastym wieku, głównie dzięki pracom B. Bolzano, A. Cauchy'ego oraz K. Weierstrassa, udało się przede wszystkim oprzeć analizę matematyczną na pojęciu granicy i na pojęciu zbieżności. Co istotne dla prowadzonych tutaj dociekań, udało się zdefiniować te podstawowe pojęcia analizy w kategoriach liczb rzeczywistych. Był to pierwszy z dwu etapów procesu arytmetyzacji analizy w dziewiętnastym wieku.

Drugi etap polegał przede wszystkim na zbudowaniu modelu liczb rzeczywistych w dziedzinie liczb wymiernych. Pracę te wykonali równolegle K. Weierstrass, G. Cantor i R. Dedekind. Dwaj pierwsi posłużyli się zbliżoną do siebie metodą nieskończonych ciągów zbieżnych liczb wymiernych, przy pomocy których definiowali liczby rzeczywiste. Natomiast R. Dedekind do zdefiniowania liczb rzeczywistych użył tzw. przekrojów liczb wymiernych, które nazwane zostały jego imieniem. Metoda ta przypominała sposób określenia niewymierności Eudoksosa, nie odwoływała się jednak do niewymiernych wielkości geometrycznych.

Wcześniej udało się w szkole K. Weierstrassa zdefiniować liczby całkowite przy pomocy liczb naturalnych i liczby wymierne przy pomocy liczb całkowitych. Zatem w wyniku procesu arytmetyzacji można było w dziewiętnastym wieku sprowadzić całą analizę – poprzez pojęcia granicy i zbieżności – do arytmetyki liczb rzeczywistych, te zaś do arytmetyki liczb naturalnych. Tym samym można było zasadnie twierdzić, że analiza matematyczna oparta jest na arytmetyce liczb rzeczywistych, a pośrednio, na arytmetyce liczb naturalnych.

Istotne dla prowadzonych tutaj badań jest to, że wyeliminowano w dziewiętnastym wieku z podstaw rachunku różniczkowego i całkowego pojęcie wielkości niearchimedesowych, aktualnie nieskończenie małych. Pojęcie to okazało się być zbędne dla ufundowania tak istotnego działu matematyki, jakim jest analiza.

Co więcej, niektórzy uczeni, przede wszystkim G. Cantor, zaczęli twierdzić, że wielkości aktualnie nieskończenie małe są nie tylko niepotrzebne dla ufundowania podstaw rachunku różniczkowego i całkowego, ale że po prostu takie wielkości nie istnieją. G. Cantor usiłował nawet konstruować dowody nieistnienia wielkości aktualnie nieskończenie małych. Tym samym starał się on wyeliminować wielkości niearchimedesowe, aktualnie nieskończenie małe, nie tylko z podstaw rachunku różniczkowego i całkowego, ale i z całej matematyki[11].

W każdym razie matematyka dziewiętnastego wieku pozbyła się wielkości aktualnie nieskończenie małych z podstaw rachunku różniczkowego i całkowego. Niektórzy zaś matematycy – jak G. Cantor – negowali w ogóle istnienie wielkości aktualnie nieskończenie małych.

W matematyce dziewiętnastego wieku dokonała się jeszcze jedna zmiana orientacji w zakresie akceptacji pewnego typu wielkości.

---

[11] Por. G. Cantor, *Mitteilungen zur Lehre vom Transfiniten*, 407-409, w: G. Cantor, *Gesammelte Abhandlungen mathematischen und Philosophischen Inhalts*, Hrsg. E. Zermelo, Berlin 1932.

Zaakceptowano mianowicie istnienie innych wielkości niearchimedesowych, mianowicie wielkości aktualnie nieskończenie wielkich. Owa akceptacja wiążę się z powstaniem teorii mnogości.

Geneza teorii zbiorów nieskończonych, czyli teorii mnogości, związana była z rozwiązaniem przez G. Cantora pewnego szczegółowego problemu z zakresu analizy. Niemiecki matematyk zajął się pytaniem, kiedy dana funkcja jest rozwijalna w sposób jednoznaczny w szereg trygonometryczny. Udowodniono, że jest tak w przypadku, kiedy funkcja taka jest ciągła w całej dziedzinie. G. Cantor badał, czy takie jednoznaczne rozwinięcie jest możliwe, gdy w dziedzinie funkcji istnieją „punkty wyjątkowe", czyli takie, w których funkcja nie jest ciągła. Uogólnił wyjściowe twierdzenie na sytuacje, kiedy takich punktów jest skończona, a potem nieskończona ilość. Postawił pytanie, czy punktów wyjątkowych jest więcej niż liczb naturalnych. Z zagadnienia ściśle analitycznego wyodrębnił się problem porównywania mocy zbiorów, które były nieskończone. G. Cantor przyjął istnienie zbiorów aktualnie nieskończonych i stwierdził, że istnieją zbiory nieskończone o różnej mocy. Podał definicję zbioru nieskończonego jako takiego, w którym podzbiór właściwy jest równoliczny ze zbiorem. Tym samym podważył aksjomat Eudoksosa, stwierdzający, że „całość jest większa od części". Niemiecki matematyk twierdził, że zbiory o takich własnościach należy wprowadzić do matematyki. Udało mu się przy pomocy pojęcia zbioru zbiorów zdefiniować liczby naturalne oraz pozaskończone: kardynalne i porządkowe. Tym samym wielkości niearchimedesowe, aktualnie nieskończenie wielkie, znalazły się w matematyce. Zaś sama teoria mnogości stała się częścią matematyki, bowiem jak twierdził G. Cantor, arytmetyka liczb naturalnych, a więc i w konsekwencji cała matematyka dziewiętnastego wieku, była redukowalna do teorii mnogości.

Z przedstawionego przeglądu wynika, że zaakceptowanie zbiorów aktualnie nieskończonych, i w konsekwencji wielkości aktualnie nieskończenie wielkich, w matematyce końca dziewiętnastego wieku nastąpiło z powodów „wewnątrzmatematycznych". Doprowadziły do tego badania szczegółowego problemu z zakresu analizy. Oczywiście taka akceptacja nie była bezproblemowa. Towarzyszyła jej zacięta dyskusja filozoficzna na temat nieskończoności aktualnej, prowadzona przede wszystkim przez G. Cantora i jego przeciwnika, L. Kroneckera. Jednak to przede wszystkim względy

„wewnątrzmatematyczne", przedmiotowe, zadecydowały o akceptacji w owym okresie wielkości aktualnie nieskończenie wielkich.

Tym samym, ze względu na nowe podejście do zagadnienia wielkości, powstał w dziewiętnastym wieku nowy typ uprawiania matematyki. Zbędne dla ufundowania podstaw rachunku różniczkowego i całkowego okazały się wielkości aktualnie nieskończenie małe. Zaakceptowano natomiast wielkości aktualnie nieskończenie wielkie. Matematykę wspomnianego okresu można by zasadnie określić matematyką Cauchy'ego-Weierstrassa-Cantora.

Należy jeszcze wspomnieć, że na przełomie dziewiętnastego i dwudziestego wieku nastąpił w matematyce, a w zasadzie w podstawach matematyki, krótkotrwały kryzys. Wiązał on się z odkryciem antynomii w przedaksjomatycznej teorii mnogości. Kryzys ten jednak został bardzo szybko opanowany. Przyczynił się do tego E. Zermelo, aksjomatyzując teorię mnogości, oraz B. Russell i A. N. Whitehead, którzy zbudowali teorię typów, traktowaną współcześnie jako teorię obejmującą (przynajmniej) fragment teorii mnogości.

Okazuje się, że również dla opisania krótkotrwałego kryzysu przydatne może być to narzędzie, jakiego dostarcza pojęcie wielkości. Istnieje powszechna zgoda co do tego, że powodem antynomii generowanych przez przedaksjomatyczną teorię mnogości było dopuszczenie w niej zbiorów – a więc i związanych z nimi mocy, liczb kardynalnych, czyli wielkości – zbyt dużych. Eliminacja antynomii polegała w istocie na ograniczeniu mocy, czyli wielkości zbiorów. Zbiory zbyt duże – i w konsekwencji – wielkości zbyt duże, zostały z teorii mnogości i z ufundowanej na niej matematyki wyeliminowane.

Dotychczasowy przegląd zmienności matematyki w czasie sugeruje, że w poszczególnych okresach opowiadano się za jednym, określonym typem matematyki. Zasadniczo po okresach kryzysowych i okresach dyskusji zgadzano się na to, jakie wielkości mogą być w matematyce akceptowane, a jakie nie. Natomiast koniec wieku dziewiętnastego i początek wieku dwudziestego przyniósł zmianę tej sytuacji. Różnice poglądów na temat podstaw matematyki doprowadziły w tym czasie do powstania odmiennych w istocie matematyk. Jedna to matematyka klasyczna, stosująca logikę klasyczną, akceptująca teorię mnogości tradycji cantorowskiej i zermelowskiej. Natomiast druga matematyka, intuicjonistyczna, nie akceptuje logiki klasycznej, odrzuca między innymi zasadę wyłączonego środka, nie akceptuje też tradycyjnej teorii mnogości. Wydaje się, że te dwa typy matematyki wyróżnia się właśnie ze względu na takie kryteria, jak stosowana logika i teoria mnogości. Jeśli jednak przyjrzeć się dyskusji G. Cantora z L. Kroneckerem, w czasie której ten drugi ujawnił poglądy praintuicjonistyczne, to okazuje się, że można obydwa wspomniane typy matematyki wyodrębnić również przy pomocy tego kryterium, jakie stanowi stosowane w tej pracy pojęcie wielkości.

Przede wszystkim praintuicjonizm, i potem intuicjonizm, nie zgadza się na dopuszczenie do matematyki wielkości aktualnie nieskończenie wielkich. Czasami jedynie czyni się wyjątek dla liczby kardynalnej $\aleph_0$. L. Kronecker miał też zdecydowane opory co do wielkości skończonych niewymiernych. To również wiązało się z odrzucaniem przez niego zbiorów aktualnie nieskończenie wielkich. L. Kronecker zauważył, że K. Weierstrass i G. Cantor w swoich definicjach liczb rzeczywistych posługiwali się nieskończonymi ciągami podstawowymi liczb wymiernych. Jakaś forma nieskończoności okazała się być niezbędna dla określenia liczb rzeczywistych. Skoro negowało się nieskończone zbiory, należało też konsekwentnie zanegować istnienie liczb niewymiernych, co też L. Kronecker często czynił.

Okazuje się więc, że matematykę intuicjonistyczną daje się określić nie tylko ze względu na stosowana przez nią logikę czy teorię mnogości. Można ją również wyodrębnić ze względu na akceptowane w niej wielkości. Rygorystyczny intuicjonizm nie dopuszcza wielkości aktualnie nieskończenie wielkich ani też wielkości niewymiernych.

Stosunek do różnego typu wielkości pozwala też wyróżnić ostatni etap rozwoju matematyki, który można by określić matematyką hilbertowską. Zazwyczaj, gdy mówi się o programie D. Hilberta, podkreśla się zawarty w tym programie postulat stworzenia metamatematyki. Aby jednak zbudowanie metamatematyki było możliwe, konieczne było wpierw zaksjomatyzowanie teorii matematycznych i „przełożenie" ich na język formalny. Te punkty zawierał również program D. Hilberta. Program formalizmu dopuszczał zajmowanie się jakimikolwiek przedmiotami, byle ich podstawowe własności były podane przy pomocy niesprzecznej aksjomatyki. W istocie zatem program ten *implicite* pozwalał na posługiwanie się w matematyce jakimikolwiek wielkościami. Matematyka hilbertowska dopuszcza, podobnie jak matematyka Cauchy'ego-Weierstrassa-Cantora, wielkości skończone, niewymierne i aktualnie nieskończenie wielkie. Ale zaakceptowane w niej zostały także – ze względów przedstawionych powyżej – wielkości aktualnie nieskończenie małe w budowaniu podstaw rachunku różniczkowego i całkowego. Stało się tak wtedy, gdy A. Robinson zbudował – oczywiście przy pomocy stosownej aksjomatyki – analizę niestandardową. Analiza ta posługuje się wielkościami aktualnie nieskończenie małymi.

Wydaje się, że akceptacja w tym typie matematyki wszystkich typów wielkości dokonana została ze względów metamatematycznych. Dopuszcza się w niej po prostu wszelkie pojęcia, których podstawowe własności daje się opisać przy pomocy stosownych aksjomatów.

W celu zbudowania właściwego dla matematyki modelu temporalności odwołano się w niniejszym opracowaniu do wprowadzonego w starożytności matematycznego pojęcia wielkości. Pokazano, że już w czasach starożytnych pojęcie wielkości opisywano przy pomocy stosownej aksjomatyki i wyróżniono wówczas różne typy wielkości. Zauważono też, że – przynajmniej do dziewiętnastego wieku – matematykę pojmowano jako naukę o wielkościach. Zaś przy pewnych dodatkowych założeniach można by i współczesną matematykę traktować jako naukę o wielkościach.

Następnie zdefiniowano pojęcie nieciągłości w rozwoju matematyki. Przyjęto, że zmienia się ona w sposób nieciągły wówczas, kiedy zmienia się zakres akceptowanych w niej typów wielkości. Dalszy ciąg badań miał na celu wykazanie, że wprowadzone pojęcie nieciągłości rozwoju matematyki pokrywa się z wieloma wydarzeniami w dziejach tej nauki, które tradycyjnie uważa się za momenty kryzysowe. Można tu wyliczyć: odkrycie niewymierności, powstanie rachunku całkowego i różniczkowego oraz powstanie teorii mnogości wraz z odkryciem antynomii. W zasadzie tylko kryzysu związanego z powstaniem geometrii nieeuklidesowych nie daje się opisać przy pomocy zaproponowanego modelu.

Okresy pomiędzy nieciągłościami w rozwoju matematyki można by nazwać „epokami" w rozwoju matematyki. Wyróżniono przy pomocy zastosowanego kryterium następujące epoki: pitagorejczyków, Eudoksosa, de l'Hospitala, Cauchy'ego-Weierstrassa-Cantora oraz Hilberta. Oczywiście narzuca się w tym miejscu nazewnictwo proponowane przez T. Kuhna, a więc by poszczególne epoki nazwać paradygmatami matematyki. To jednak sugerowałoby w sposób bezzasadny, że pomiędzy poszczególnymi epokami zachodziły rewolucje w sensie Kuhnowskim. Takiego uzasadnienia niniejsze opracowanie nie zawiera.

Można oczywiście dyskutować nad słusznością otrzymanej w ten sposób periodyzacji matematyki. I tak na przykład, czasami twierdzi się, że wyodrębniony tutaj jako osobna epoka, okres matematyki de l'Hospitala był tylko czasem permanentnego kryzysu, który prowadził do właściwego „ustabilizowanego" okresu matematyki Cauchy'ego-Weierstrassa. Wówczas jednak cały rozwój matematyki - od odkrycia niewymierności do zdefiniowania liczb rzeczywistych przez niemieckich matematyków w dziewiętnastym wieku - można by uważać za okres permanentnego kryzysu, wewnątrz którego nie dokonywało by się żadnej periodyzacji.

Określenie nieciągłości w rozwoju matematyki jako zmiany w zakresie akceptacji poszczególnych wielkości pozwala też odpowiedzieć na pytanie, dlaczego matematyka się zmienia. Przyczynami przemian są - przy przyjęciu takiego modelu - powody zmian w zakresie akceptacji poszczególnych typów wielkości. W niniejszym artykule pokazano, że zmiany te są wynikiem splotu heterogennych czynników. Najczęściej dokonują się one ze względów „wewnątrzmatematycznych", ale bywają też powody natury logicznej, ontologicznej, metamatematycznej, a także takie, które wynikają z potrzeb matematyki stosowanej.

Prezentowany model nie pozwala stwierdzić, że matematyka rozwijała się zawsze w sposób kumulatywny, odkrywając i dołączając do zakresu swoich badań nowe typy wielkości. W starożytności znano już bowiem wszystkie podstawowe typy wielkości, ale ze względu na „lęk przed nieskończonością" celowo ograniczono badania matematyki do wielkości archimedesowych. Rezygnowano również w niektórych okresach z pewnych wielkości, które wcześniej wydawały się być „dobrze zadomowione w matematyce". Tak było z niearchimedesowymi wielkościami aktualnie nieskończenie małymi, które wyeliminowano z podstaw rachunku różniczkowego w dziewiętnastym wieku, dzięki skonstruowaniu definicji granicy.