Kordula Świętorzecka

O pewnych formalnych założeniach semantycznych niektórych sformalizowanych argumentów ontologicznych

Studia Philosophiae Christianae 38/2, 55-86

2002

Studia Philosophiae Christianae
UKSW
38(2002)2

KORDULA ŚWIĘTORZECKA
Wydział Filozofii Chrześcijańskiej, UKSW

O PEWNYCH FORMALNYCH ZAŁOŻENIACH SEMANTYCZNYCH NIEKTÓRYCH SFORMALIZOWANYCH ARGUMENTÓW ONTOLOGICZNYCH

1. WSTĘP

W historii filozofii ontologiczne argumenty na rzecz tezy o istnieniu (lub koniecznym istnieniu) absolutu są tak samo chętnie formułowane, jak i kwestionowane. Poczynając od św. Anzelma[1], zwolennicy tego rodzaju argumentacji konstruowali rozmaite jej wersje różniące się pod względem samego języka oraz budowy dowodu tezy o istnieniu absolutu. Można uznać, że podstawową ideą wszystkich argumentów ontologicznych jest to, że definicja kwalifikacji *bycia absolutem* ma „gwarantować" istnienie (lub konieczne istnienie) przedmiotu o tej kwalifikacji[2]. Krytycy ontologicznych dowodów na istnienie absolutu kwestionują zarówno ową ideę, jak i podnoszą szczegółowe zarzuty, dotyczące definicji absolutu oraz kon-

[1] Św. Anzelm, *Proslogion* (c. I-II).

[2] W zależności od tego, czy *bycie absolutem* jest największą doskonałością w łańcuchu wszystkich doskonałości, czy też doskonałością, która implikuje posiadanie wszystkich innych doskonałości, można mówić odpowiednio o argumentacji anzelmiańskiej lub kartezjańskiej. Por. J. Perzanowski, *Ontological arguments II: cartesian and leibnizian*, w: *Handbook of Methaphysics and Ontology*, red. H. Burkhardt, B. Smith, v. 2, L-2, 1991, 625-633.

strukcji dowodów kluczowej tezy. W efekcie dyskusji o możliwości sformułowania poprawnego argumentu ontologicznego, zaczęto wykorzystywać co raz to precyzyjniejsze narzędzia dla jego wyrażenia. W ten sposób powstały różne dedukcyjne teorie specyficzne, w ramach których argument ontologiczny zyskał przejrzystą postać dowodu sformalizowanego. Sformalizowana argumentacja zazwyczaj stwarza możliwość dokładnej analizy idei w niej zawartych, jednakże taka analiza wymaga doboru odpowiednio precyzyjnych narzędzi. W wypadku analizy semantycznej są nimi narzędzia teoriomodelowe, za pomocą których formułuje się warunki, jakie ma spełniać jakaś struktura semantyczna, aby mogła „nadawać" się na model właściwy danej teorii sformalizowanej (tj. na jej model zamierzony). Dopiero wyznaczenie owych warunków może stanowić punkt wyjścia rzetelnej krytyki branej pod uwagę teorii (i sformułowanej na jej gruncie określonej argumentacji). Interpretacja teoriomodelowa danej teorii specyficznej pozwala najpierw na wyodrębnienie warunków formalnych spełnianych przez jej model właściwy, które przesądzone są przez wybór języka o określonej strukturze oraz logiki, będącej podstawą formalną branej pod uwagę teorii. Aksjomaty specyficzne badanej teorii pozwalają następnie na wskazanie niektórych pozaformalnych warunków dla modeli właściwych (należy zauważyć, że są to jedynie warunki konieczne, ale nie wystarczające).

Niniejsza praca dotyczy pierwszego rodzaju rozstrzygnięć semantycznych związanych z wybranymi modalnymi formalizacjami, zainspirowanymi rękopisem Kurta Gödla z 10 lutego 1970 roku pt. *Ontologischer Beweis*[3]. Przedmiotem zainteresowania będzie wskazanie niektórych formalnych ograniczeń dotyczących sposobu rozumienia w owych teoriach podstawowych dla argumentu ontologicznego pojęć: konieczność, istnienie, doskonałość (własność pozytywna). Prowadzone analizy semantyczne wymagają syntaktycznej charakterystyki języka, w którym można wyrazić brane pod uwagę teorie oraz ich podstawy formalnej (2). W (2) przedstawimy również najbardziej znaną z branych pod uwagę formalizacji, będących uzupełnieniem

[3] Idea *summum bonum* i sposób konstrukcji argumentacji autorstwa Gödla są uważane za na tyle oryginalne, że we współczesnej literaturze dotyczącej sformalizowanej teodycei, bardzo często nawiązuje się do nich a kolejne formalizacje są zazwyczaj efektem różnych interpretacji fragmentarycznej notatki Gödla.

fragmentarycznej notatki Gödla – teorię własności pozytywnych autorstwa D. Scotta[4]. Rozważania teoriomodelowe w (3) będą jednak dotyczyły także uzupełnień szkicu argumentu Gödla dokonanych przez: J. D. Atlasa[5], W. K. Esslera[6], J. Czermaka[7], P. Hajka[8], F. Orilię[9]. W ramach modalnej teorii modeli wyznaczymy klasę dopuszczalnych interpretacji wymienionych teorii ze względu na niektóre elementy budowy ich języka oraz zakładaną podstawę formalną.

2. SYNTAKTYCZNA CHARAKTERYSTYKA PODSTAW FORMALNYCH WYBRANYCH FORMALIZACJI ARGUMENTU ONTOLOGICZNEGO

W branych pod uwagę formalizacjach używa się języka, w którym występują modalne spójniki konieczności lub możliwości. W celu ujednolicenia notacji zdefiniujemy język MJ, w którym można sformułować rozważane teorie (2.1). Jak wskazuje na to dostępna literatura, argument Gödla jest formalizowany na gruncie różnych systemów logicznych (klasycznego rachunku predykatów drugiego rzędu, niektórych rozszerzeń modalnych logik zdaniowych: K5, B oraz S5) [10]. Przedmiotem prowadzonych analiz będą jednak wyłącznie formalizacje oparte na standardowym modalnym rachunku predykatów drugiego rzędu nadbudowanym na zdaniowej logice S5 – $QS5_{MJ}$ (2.2). Język MJ oraz rachunek $QS5_{MJ}$ umożliwiają konstrukcję różnych wersji argumentu Gödla, z których najpopularniejszą (i uważaną za najbliższą intencjom Gödla) jest formalizm Scotta (*TG*). W (2.3) podamy syntaktyczną charakterystykę teorii *TG*.

---

[4] Por. M. R. Adams, *Introductory note to *1970*, w: *Kurt Gödel. Collected Works. Unpublished Essays and Lectures*, red. S. Feferman, v. III, Oxford 1995, 389-404; 429-433.

[5] J. D. Atlas, *Gödel ontological argument*, maszynopis referatu przedstawionego w Joint Mathematics-Phiolosophy Colloquium, Amherst, Massachusetts, 16.04.1984.

[6] W. K. Essler, *Gödels Gottesbeweis*, w: *Grundzüge der Logik II. Klassen, Relationen, Zahlen*, red. W. K. Essler, E. Brendel, R. F. V. Martinez, Frankfurt am Main 1987, 309-319.

[7] J. Czermak, *Gödels ontologischer Gottesbeweis*, maszynopis odczytu w ATK, 5.05.1988. Tenże, *Abriss des ontologischen Argumentes*, maszynopis odczytu w ATK, 1992.

[8] P. Hajek, *The Mathematician and the Question of the Existence of God (Concerning Gödel's Ontological Proof)*, maszynopis, brw.

[9] F. Orilia, *A note on Gödel's ontological argument*, maszynopis, brw.

[10] Chodzi tu np. o interpretacje: F. Kutschery (*Gödels Gottesbeweis*, w: *Vernunft und Glaube*, Berlin – New York 1991, 332-335), J. Perzanowskiego (art. cyt.), E. Nieznańskiego (*Dowód Gödla na istnienie summum bonum*, Studia Philosophiae Christianae 25 (1989) 2, 89-102), J. H. Sobela (*Gödel's ontological proof*, w: *On Being and Saying. Essays for Richard Cartwight*, red. J. J. Thomson, Cambridge MA – London 1987, 241-261).

2.1. MODALNY JĘZYK MJ

Minimalny język, w którym można przedstawić brane pod uwagę formalizacje jest scharakteryzowany przez słownik, do którego należą:

(a) zmienne indywiduowe (Zm_{MJ}): x, y, z,...; (b) zmienne predykatowe jednoargumentowe pierwszego rzędu (ZM_{MJ}): X, Y, Z,...; (c) stała predykatowa jednoargumentowa drugiego rzędu: P, którą zgodnie z intencjami Gödla można czytać: „(własność).... jest pozytywna"; (d) drugiego rzędu stała predykatowa identyczności: =; (e) funktory prawdziwościowe: $\sim$, $\rightarrow$; (f) logiczny funktor modalny: $\Box$; (g) kwantyfikatory ogólne i szczegółowe wiążące zmienne indywiduowe oraz zmienne predykatowe: $\forall$, $\exists$; (h) operator abstrakcji: $\hat{}$; (i) nawiasy: (,).

Do zbioru termów zerowego rzędu języka MJ (τ_{0MJ}) należą zmienne indywiduowe: x, y, z,.... Termami pierwszego rzędu języka MJ (τ_{1MJ}) są zmienne predykatowe: X, Y, Z,....

Do zbioru formuł języka MJ (FOR_{MJ}) należą:

(a) wyrażenia postaci: τ (α), gdzie $\tau \in \tau_{1MJ}$ i $\alpha \in Zm_{MJ}$; (b) wyrażenia postaci: P (τ), gdzie $\tau \in \tau_{1MJ}$; (c) wyrażenia postaci: $\tau = \upsilon$, gdzie τ, $\upsilon \in \tau_{1MJ}$; (d) jeżeli A, B $\in FOR_{MJ}$, $\alpha \in Zm_{MJ}$, $\varphi \in ZM_{MJ}$, to formułami są także: $\sim$A, A$\rightarrow$B, $\forall\alpha$A, $\exists\alpha$A, $\forall\varphi$A, $\exists\varphi$A; (e) jeżeli A $\in FOR_{MJ}$, to $\Box$A $\in FOR_{MJ}$.

Ponadto, jeżeli $\alpha \in \tau_{0MJ}$ oraz A $\in FOR_{MJ}$, to $\hat{}\alpha$ (A) $\in \tau_{1MJ}$.

2.2. PODSTAWA FORMALNA WYBRANYCH MODALNYCH FORMALIZACJI

Zgodnie z tym, co zostało powiedziane we *Wstępie*, będzie się brać pod uwagę jedynie te formalizacje argumentacji Gödla, których podstawą formalną jest standardowy modalny rachunek predykatów drugiego rzędu $QS5_{MJ}$, wyznaczony przez następującą definicję:

Def. 1. Standardowym modalnym rachunkiem kwantyfikatorów drugiego rzędu S5 wyrażonym w języku MJ jest dwójka: $QS5_{MJ}$= (AS5, **R**), gdzie AS5 jest zbiorem wszystkich formuł o następujących postaciach:

AP1. A$\rightarrow$ (B$\rightarrow$A),

AP2. (A$\rightarrow$ (B$\rightarrow$C)) $\rightarrow$ ((A$\rightarrow$B) $\rightarrow$ (A$\rightarrow$C)),

AP3. ($\sim$A$\rightarrow\sim$B) $\rightarrow$ (B$\rightarrow$A),

AM1. $\Box$A$\rightarrow$A,

AM2. $\Box(A\rightarrow B) \rightarrow (\Box A\rightarrow\Box B)$,
AM3. $\Diamond A\rightarrow\Box\Diamond A$,
Ak1. $\forall\alpha A\rightarrow A\ (\alpha/t)$, gdzie $t\epsilon\tau_{0MJ}$,
Ak2. $\forall\alpha\ (A\rightarrow B) \rightarrow (A\rightarrow\forall\alpha B)$, o ile α nie jest wolne w A,
AK1. $\forall\varphi A\rightarrow A\ (\varphi/\tau)$, gdzie $\tau\epsilon\tau_{1MJ}$,
AK2. $\forall\varphi\ (A\rightarrow B) \rightarrow (A\rightarrow\forall\varphi B)$, o ile φ nie jest wolne w A,
AA'. $^\wedge\alpha_1 \ldots {}^\wedge\alpha_n (A)\ (\beta_1, \ldots, \beta_n) \leftrightarrow A\ (\alpha_1/\beta_1, \ldots, \alpha_n/\beta_n)$.

Do zbioru **R** należą pierwotne reguły inferencji: *modus ponens* (*ro*), reguła wprowadzania konieczności (*rnec*) zdefiniowana tak, że:
Def*rnec*. $(A, B) \epsilon\ rnec \Leftrightarrow B = \Box A$
oraz reguły generalizacji pierwszego i drugiego rzędu:
Def*rgen*. $(A, B) \epsilon\ rgen \Leftrightarrow B = \forall\alpha A$,
Def*rGen*. $(A, B) \epsilon\ rGen \Leftrightarrow B = \forall\varphi A$.[11]

W metasystemie rachunku $QS5_{MJ}$ przyjmuje się standardowe definicje koniunkcji, alternatywy, równoważności oraz funktora możliwości:
Def$\Diamond$. $\Diamond A \Leftrightarrow \sim\Box\sim A$.

Kwantyfikatory szczegółowe obu rzędów scharakteryzowane są tak, że:
Def$\exists\alpha$. $\exists\alpha A \Leftrightarrow \sim\forall\alpha\sim A$,
Def$\exists\varphi$. $\exists\varphi A \Leftrightarrow \sim\forall\varphi\sim A$.[12]

Definicje metasystemowe mogą być wprowadzane do przedstawianej logiki za pomocą metareguły *RWD* o schemacie:
Jeżeli $A \Leftrightarrow B$ oraz $Z(A) \epsilon\ C(R,AL)$, to $Z(A/B) \epsilon\ C(R,AL)$, gdzie C jest operacją konsekwencji związaną z logiką L= (AL, R).

Logika $QS5_{MJ}$ jest rozszerzeniem klasycznego rachunku predykatów drugiego rzędu wyrażonego w MJ (KL_{MJ}) takiego, że:

Def. 2. KL_{MJ}= (AKL, $\underline{R}$), gdzie AKL jest zbiorem wszystkich formuł o postaciach: AP1–AP3 i Ak1, Ak2, AK1, AK2, AA', zaś do zbioru $\underline{R}$ należą reguły: *ro*, *rgen*, *rGen* (por. Def. 1.).

---

[11] Niekiedy do zakładanej podstawy formalnej rozważanych teorii dołącza się także (Aeks) $\forall\alpha\ (\varphi(\alpha) \leftrightarrow \gamma(\alpha)) \rightarrow \varphi=\gamma$ i regułę *RWP*: $(\exists!\varphi\ ((\varphi = {}^\wedge\alpha\ (A)) \wedge \Delta(\varphi)),\ \vartheta)$ $\epsilon\ RWP \Leftrightarrow \vartheta = \Delta(\varphi/\lambda)$, gdzie λ jest stałą predykatową pierwszego rzędu, zaś wyrażenie postaci: $\exists!\varphi\ ((\varphi = {}^\wedge\alpha\ (A)) \wedge \Delta(\varphi))$ jest tezą logiczną.

[12] Niech χ będzie zmienną indywiduową lub predykatową. Należy odnotować, że tezami systemu $QS5_{MJ}$ są m.in. formuły o następujących schematach:

(FB) $\forall\chi\ \Box A\rightarrow\Box\forall\chi\ A$ (tzw. schemat Barcan), (KFB) $\Box\forall\chi\ A\rightarrow\forall\chi\ \Box A$ (konwers tzw. schematu Barcan),

(FBU) $\Diamond\forall\chi\ A\rightarrow\forall\chi\ \Diamond A$ (tzw. schemat Buridana), (KFBU) $\forall\chi\ \Diamond A\rightarrow\Diamond\forall\chi\ A$ (konwers tzw. schematu Buridana).

Metasystemowe standardowe definicje pozostałych klasycznych spójników oraz kwantyfikatorów szczegółowych obu rzędów (por. Def∃α, Def∃φ) wprowadza się tak, jak w $QS5_{MJ}$ (za pomocą metareguły *RWD*).

2.3. D. SCOTTA TEORIA WŁASNOŚCI POZYTYWNYCH

Jak już powiedziano, formalizacją uważaną za najbliższą intencjom samego Gödla jest teoria własności pozytywnych autorstwa Scotta (*TG*).

Def. 3. *TG* jest teorią własności pozytywnych powstałą przez rozszerzenie standardowego modalnego rachunku kwantyfikatorów drugiego rzędu $QS5_{MJ}$ (por. Def. 1) tak, że: $TG = (AS5 \cup AS, \mathbf{R})$, gdzie AS jest zbiorem wyznaczonym przez następujące aksjomaty specyficzne:

A1. $P(\neg X) \leftrightarrow \sim P(X)$[13] (Dla dowolnej własności *X* jej dopełnienie jest pozytywne wtw, gdy nieprawdą jest, że pozytywna jest własność *X*),

A2. $P(X) \wedge \Box\forall x\, (X(x) \rightarrow Y(x)) \rightarrow P(Y)$ (Jeżeli własność *X* jest pozytywna i konieczne jest, że każdy obiekt *x* o własności *X* posiada własność *Y*, to własność *Y* jest pozytywna),

A3. $P(G)$ (Własność *bycia absolutem* jest pozytywna),

A4. $P(X) \rightarrow \Box P(X)$ (Jeżeli dowolna własność *X* jest pozytywna, to konieczne jest, że jest ona pozytywna),

A5. $P(NE)$ (Własność *koniecznego istnienia* jest pozytywna),

oraz definicje własności: *bycia absolutem*, *bycia własnością istotną* i własności *koniecznego istnienia*:

DefG. $G(x) \leftrightarrow \forall X\, (P(X) \rightarrow X(x))$ (Dowolny obiekt *x* jest absolutem wtw, gdy *x* posiada wszystkie własności pozytywne);

DefNE. $NE(x) \leftrightarrow \forall X\, (XEssx \rightarrow \Box\exists y\, X(y))$ (Dowolny obiekt *x* jest koniecznie istniejący wtw, gdy dla każdej własności istotnej *x*–a konieczne jest, że jest ona niepusta), gdzie:

DefEss. $XEssx \leftrightarrow X(x) \wedge \forall Y\, (Y(x) \rightarrow \Box\forall y\, (X(y) \rightarrow Y(y)))$ (*X* jest własnością istotną obiektu *x* wtw, gdy *x* posiada własność *X* i gdy dla dowolnej własności *Y* tego obiektu konieczne jest, że cokolwiek posiada własność *X*, posiada też własność *Y*).

W dowodzie tezy o koniecznym istnieniu absolutu wykorzystuje się następujące tezy i lematy teorii *TG*:

---

[13] Przy czym: $\neg X = {}^\wedge x\, (\sim X(x))$.

T1. $P(X) \rightarrow \Diamond\exists x\ X(x)$[14] (Jeżeli własność *X* jest pozytywna, to możliwe, że istnieje obiekt *x* posiadający własność *X*);

L1. $\Diamond\exists x\ G(x)$ (Możliwe, że istnieje obiekt *x* będący absolutem);

L2. $G(x) \rightarrow (X(x) \rightarrow P(X))$ (Jeżeli obiekt *x* jest absolutem, to jeżeli posiada on własność *X*, to własność *X* jest pozytywna);

L3. $P(X) \rightarrow \Box\forall y\ (G(y) \rightarrow X(y))$ (Jeżeli własność *X* jest pozytywna, to konieczne, że każdy obiekt *y* będący absolutem, posiada własność *X*);

T2. $G(x) \rightarrow GEssx$ (Jeżeli obiekt *x* jest absolutem, to własność *bycia absolutem* jest istotą obiektu *x*);

L4. $G(x) \rightarrow \Box\exists y\ G(y)$ (Jeżeli obiekt *x* jest absolutem, to konieczne jest, że własność *bycia absolutem* jest niepusta);

L5. $\Diamond\exists x\ G(x) \rightarrow \Box\exists y\ G(y)$ (Jeżeli możliwe, że własność *bycia absolutem* jest niepusta, to konieczne, że jest ona niepusta)

Kluczowa teza o koniecznym istnieniu absolutu posiada postać:

T3. $\Box\exists x\ G(x)$ (Konieczne, że istnieje obiekt *x* będący absolutem)

Inferencyjną zależność między tezą T3 a wcześniej sformułowanym tezami i lematami teorii *TG* można przedstawić za pomocą wykresu. Zapis „$\rightarrow$" oznacza relację inferencji zachodzącą między zbiorami, do których należą odpowiednie aksjomaty specyficzne, tezy i lematy a ich konsekwencjami otrzymanymi na podstawie aksjomatów i reguł logiki $QS5_{MJ}$.

Rys. 1.

$$\begin{tikzcd}
 & & & \{A1\} \arrow[dr] & & \{A4\} \arrow[dl] \\
 & & & & \{\overline{L2}, \overline{L3}\} \arrow[d] & \\
\{A1, A2\} \arrow[d] & & & & \{A5, \overline{T2}\} \arrow[d] & \\
\{\overline{T1}, A3\} \arrow[drr] & & & & \{\overline{L4}\} \arrow[dll] & \\
 & & \{\overline{L1}, \overline{L5}\} \arrow[d] & & & \\
 & & \overline{T3} & & &
\end{tikzcd}$$

[14] Dowody wszystkich przytoczonych tez teorii *TG* podane są w *Dodatku*.

Aksjomatyka autorstwa Scotta (niekiedy wzbogacona o następne aksjomaty specyficzne) stanowi także rozszerzenie innych modalnych systemów logicznych przyjmowanych jako podstawy formalne różnych formalizacji branego pod uwagę argumentu.

Charakterystyka syntaktyczna języka MJ, logiki $QS5_{MJ}$ i teorii *TG* pozwala zauważyć, że filozoficzne pojęcia: *koniecznego istnienia* oraz *absolutu* odnotowuje się za pomocą definicyjnie wprowadzonych predykatów pierwszego rzędu: NE oraz G, pojęcie *perfekcji* (*doskonałości*) – za pomocą pierwotnego predykatu drugiego rzędu: P, natomiast istnienie przedmiotu będącego absolutem jest wyrażone kwantyfikatorem szczegółowym: $\exists$. Używając języka filozofii klasycznej, można by także powiedzieć, że definicja DefNE pokazuje zależność między koniecznością *de re* (którą wyraża predykat: NE) a koniecznością *de dicto* (symbolizowaną przez spójnik modalny: $\Box$). Definicja DefNE pozwala wyeliminować w każdym kontekście modalny predykat koniecznego istnienia: NE tak, że w wyniku eliminacji otrzymuje się formułę z modalnym spójnikiem: $\Box$, którego argumentem jest zdanie egzystencjalne. Zgodnie z DefG, znaczenie predykatu: G zależne jest natomiast od znaczenia wyrażenia pierwotnego P. Analiza wyznaczająca formalne ograniczenia co do rozumienia wyrażeń: $\Box$, $\exists$, P jest przedmiotem rozważań w (3).

3. NIEKTÓRE FORMALNE WŁASNOŚCI MODELI WYBRANYCH FORMALIZACJI

Każda interpretacja teoriomodelowa branych pod uwagę formalizacji zakłada pewne rozstrzygnięcia semantyczne, dotyczące struktur nadających się na interpretację języka MJ. Struktury te wraz z odpowiednimi przyporządkowaniami semantycznymi są tzw. *semimodelami* języka MJ. Semimodele wyznaczone na gruncie dwu różnych modalnych teorii modeli umożliwiają konstrukcję różnego rodzaju modeli formuł języka MJ – takich obiektów semantycznych, w których te formuły są prawdziwe. Warunki wyznaczające semimodele języka MJ oraz modele dowolnych jego formuł, które opiszemy w (3.1), składają się na formalne założenia dopuszczalnych interpretacji języka MJ. W (3.2) wskażemy na niektóre formalne własności tych struktur teoriomodelowych, które są modelami rachunku $QS5_{MJ}$.

3.1. FORMALNE ZAŁOŻENIA DOPUSZCZALNYCH INTERPRETACJI JĘZYKA MJ

3.1.1. Semimodele języka MJ

Do interpretacji języka MJ można wykorzystać dwa różne rodzaje systemów teoriomodelowych. W ramach systemu pierwszego rodzaju (KTM) operuje się pojęciami będącymi pewnymi „modyfikacjami" tych, które są używane w semantyce klasycznych systemów kwantyfikatorowych. W odróżnieniu od koncepcji sformułowanej w standardowej teorii STM należącej do drugiego rodzaju, na gruncie teorii KTM każdy świat możliwy jest jednoznacznie wyznaczony przez dwa niepuste zbiory: zbiór indywiduów oraz zbiór własności tych indywiduów. System STM powstaje przez pewne rozszerzenie teorii semantycznej budowanej dla modalnych logik zdaniowych. Na gruncie teorii STM przyjmuje się dwa pojęcia pierwotne: *świat możliwy* oraz *indywiduum*. W teorii tej świat możliwy nie jest jednoznacznie wyznaczony przez zbiory obiektów stanowiących jego uniwersum indywiduów oraz uniwersum własności. O tym, jakie uniwersa posiada dany świat możliwy, decyduje tu wybór konkretnych funkcji przyporządkowywujących temu światu możliwemu zbiór indywiduów i zbiór własności.

Aby wyznaczyć klasę struktur opisywanych przez język MJ na gruncie KTM, przyjmiemy, że: D jest niepustym zbiorem indywiduów; przez $\{D_i\}_{i\in I}$ oznaczamy zbiór wszystkich niepustych podzbiorów zbioru D, czyli takich zbiorów D_i, że:

$\forall_{i\in I}$ ($D_i \subset D$ i $D_i \neq \varnothing$), gdzie $I = 2^D - 1$.

Niech Φ_i będzie zbiorem tzw. własności pozytywnych: $\Phi_i \subset 2^{D_i}$.

Def. 4. Światem możliwym o dziedzinie D_i jest każda uporządkowana trójka postaci:

$m_i = (D_i, (2^{D_i}, -, \cap, \{\varnothing, 1\}), \Phi_i)$, gdzie, $(2^{D_i}, -, \cap\ \{\varnothing, 1\})$ jest algebrą Boole'a o uniwersum 2^{D_i}.

Def. 5. Zbiorem wszystkich światów możliwych o dziedzinie D_i jest:

$\mathfrak{M} = \{ (D_i, (2^{D_i}, -, \cap, \{\varnothing, 1\}), \Phi_i): D_i \in 2^D$ i $D_i \neq \varnothing$ i $\Phi_i \subset 2^{D_i} \}$.

Def. 6. Strukturą nadającą się na interpretację języka MJ jest dowolna dwójka postaci:

$S\mathfrak{M} = (\mathfrak{M}, r)$, gdzie r jest relacją *dostępności światów możliwych*: $r \subset \mathfrak{M} \times \mathfrak{M}$.

Zgodnie z powyższą charakterystyką, świat możliwy jest zdefiniowany jako trójka uporządkowana, której pierwszym elementem jest pewien niepusty podzbiór zbioru D, drugim – boolowska algebra własności, zaś trzecim – rodzina tych własności obiektów należących do D_i, które to własności są pozytywne.

Konsekwencją koncepcji świata możliwego na gruncie KTM jest także przyjęcie określonych przyporządkowań semantycznych między językiem MJ a strukturami typu $\mathfrak{M}$. Wydawać by się mogło, że pytanie o wartość logiczną formuły A w świecie możliwym m_i rozumianym jako trójka uporządkowana postaci: $(D_i, (2^{D_i}, -, \cap, \{\emptyset, 1\}), \Phi_i)$ (por. Def. 4), gdy formuła A zawiera zmienne wolne, jest o tyle sensowne o ile wartościowanie owych zmiennych występujących w formule A przyporządkowuje tym zmiennym obiekty należące do uniwersów tej trójki uporządkowanej. W wypadku formuł zawierających funktory modalne, ustalenie ich wartości logicznej zależeć jednak powinno również od tego, co „dzieje się" w innych możliwych światach dostępnych ze świata, w którym chce się wyznaczać ową wartość. Zgodnie z opisanymi intuicjami, przyjmiemy, że funkcje wartościowania zmiennych indywiduowych oraz predykatowych są określone tak, że:

v_i: $Zm_{MJ} \to D_i$,

V_i: $ZM_{MJ} \to 2^{D_i}$.

Wartość logiczna w świecie możliwym m_i formuły nie zawierającej funktorów modalnych będzie zależała od wartościowań v_i i V_i zmiennych wolnych występujących w tej formule. To, jaką wartość logiczną w świecie możliwym m_i przy wartościowaniach v_i i V_i ma formuła poprzedzona funktorem modalnym, powinno zależeć od tego, jaką wartość ma ta formuła w innym (dostępnym z m_i) świecie m_j przy wcześniej ustalonych wartościowaniach v_j i V_j. Wyznaczanie wartości logicznej tego rodzaju wyrażeń będzie wymagało operowania „ciągami" wartościowań zmiennych w różnych możliwych światach: v oraz V (gdzie przy ustalonych w każdym świecie $m_i \in M$ wartościowaniach danej zmiennej indywiduowej: $v=(v_i)_{i\in I}$, zaś dla danej zmiennej predykatowej o ustalonych wartościowaniach w każdym możliwym świecie $m_i \in M$: $V=(V_i)_{i\in I}$).

W ramach teorii KTM należy przyjąć następujące charakterystyki intepretacji stałych predykatowych P oraz =:

$(Int_i 1)$ $Int_i(P) = \Phi_i$,

($Int_i 2$) $\mathrm{Int}_i(=) = \{(\phi, \phi'): \phi \subset D_i$ i $\phi' \subset D_i$ i $\forall_{d \in D_i}(d \in \phi \Leftrightarrow d \in \phi')\}$.

Def. 7. Odwzorowaniem formuły A przy danych ciągach wartościowań v, V w świecie możliwym m_i w dwuelementową algebrę A_B, jest funkcja h ($h^{v,V}(A, m_i)$) spełniająca następujące warunki:[15]

($h_i 1$) $h^{v,V}(X(x), m_i) = 1 \Leftrightarrow v_i(x) \in V_i(X)$,

($h_i 2$) $h^V(P(X), m_i) = 1 \Leftrightarrow V_i(X) \in \mathrm{Int}_i(P)$ (tzn. $V_i(X) \in \Phi_i$),

($h_i 3$) $h^{V,W}(X=Y, m_i) = 1 \Leftrightarrow (V_i(X), W_i(Y)) \in \mathrm{Int}_i(=)$, gdzie W jest danym ciągiem wartościowań zmiennej Y: $W = (W_i)_{i \in I}$,

($h_i 4$) $h^{v,V}(\sim A, m_i) = 1 \Leftrightarrow - h^{v,V}(A, m_i) = 0$,

($h_i 5$) $h^{v,V}(A \wedge B, m_i) = 1 \Leftrightarrow (h^{v,V}(A, m_i)) \wedge (h^{v,V}(B, m_i)) = 1$,

($h_i 6$) $h^{v,V}(A \rightarrow B, m_i) = 1 \Leftrightarrow (- h^{v,V}(A, m_i)) \vee (h^{v,V}(B, m_i)) = 1$,

($h_i 7$) $h^{v,V}(\Box A, m_i) = 1 \Leftrightarrow \forall_{m_j \in M}(m_i r m_j \Rightarrow h^{v,V}(A, m_j) = 1)$,

($h_i 8$) $h^{v,V}(\forall x\, A(x), m_i) = 1 \Leftrightarrow h^V(A(x), m_i) = 1$ dla każdego $w \in v/_{v_i}$,[16]

($h_i 9$) $h^{v,V}(\exists x\, A(x), m_i) = 1 \Leftrightarrow h^V(A(x), m_i) = 1$ dla pewnego $w \in v/_{v_i}$,

($h_i 10$) $h^{v,V}(\forall X\, A(X), m_i) = 1 \Leftrightarrow h^v(A(X), m_i) = 1$ dla każdego $W \in V/_{V_i}$,[17]

($h_i 11$) $h^{v,V}(\exists X\, A(X), m_i) = 1 \Leftrightarrow h^v(A(X), m_i) = 1$ dla pewnego $W \in V/_{V_i}$.

Należy przy okazji zauważyć, że w niniejszej koncepcji możliwe jest rozważanie wyłącznie własności w m_i, a nie własności „w ogóle". Zgodnie z przedstawionymi definicjami wykluczona jest także sytuacja, w której można brać pod uwagę w świecie m_i własności, do których należą obiekty nie będące elementami D_i. Dla przykładu, weźmiemy pod uwagę dwa światy możliwe m_1 i m_2, takie że uniwersum pierwszego świata stanowią obiekty aktualnie istniejące w 1364 roku, zaś drugiego – zbiór bytów aktualnych w 2002 roku. W świecie m_2 nie można rozważać własności *bycia dawnym założycielem Uniwersytetu w Krakowie*, którą posiada Kazimierz Wielki, ponieważ Kazimierz Wielki nie jest bytem aktualnym w świecie m_2. Własność ta nie może być pozytywna w świe-

---

[15] Odwzorowanie h danej formuły A w świecie możliwym m_i przy ciągach wartościowań v, V jest oczywiście zrelatywizowane do danej interpretacji stałych predykatowych w m_i. Dla prostoty, zależność tę pomija się w zapisie formalnym. Jest ona natomiast widoczna w formułowanych warunkach, które spełnia odwzorowanie h.

[16] Zbiór $v/_{v_i}$ jest zbiorem wszystkich v_i-wariantów danego ciągu v, gdzie v_j – *wariant ciągu* v jest to taki ciąg wartościowań danej zmiennej, który różni się od ciągu wartościowań v tej zmiennej co najwyżej wartościowaniem v_j.

[17] Zbiór $V/_{V_i}$ jest zbiorem wszystkich V_j-wariantów danego ciągu V. Pojęcie V_j – *warianut ciągu* V definiuje się tak jak w przyp. 16.

cie m_2 (tzn. nie może być elementem rodziny Φ_2). W świecie m_2 mogą być pozytywne tylko te własności, które należą do uniwersum algebry $(2^{D2}, -, \cap, \{\emptyset, 1\})$. Stosując rozróżnienie A. Priora[18] omówione w (3.2), można powiedzieć, że na gruncie teorii KTM każda własność należąca do uniwersum algebry $(2^{D_i}, -, \cap, \{\emptyset, 1\})$ „wymusza" istnienie w świecie m_i obiektów, które ją posiadają.

W wypadku struktur zdefiniowanych w ramach STM można mówić w danym świecie m_i także o własnościach „nie wymuszających" istnienia w m_i obiektów, które posiadają owe własności.

Na gruncie teorii STM, brane pod uwagę struktury wyznacza następująca definicja:

Def. 8. Strukturą nadającą się na interpretację języka MJ jest dowolny system semantyczny postaci: $SM = ((M, r), D, (\underline{D}, -, \cap, \{\emptyset, 1\}), \Phi, \mu, \rho)$, gdzie:

(a) (M, r) jest dwójką uporządkowaną, której pierwszym elementem jest niepusty zbiór światów możliwych M, zaś drugim – dowolna relacja (dostępności światów możliwych) r określona w M ($r \subset M \times M$);

(b) $(\underline{D}, -, \cap, \{\emptyset, 1\})$ jest algebrą Boole'a o uniwersum $\underline{D} = 2^{M \times D}$;

(c) μ jest dowolnym odwzorowaniem określonym tak, że:

μ: $M \rightarrow 2^D - \{\emptyset\}$, które przyporządkowuje każdemu światu możliwemu należącemu do zbioru M jego uniwersum, będące niepustym podzbiorem zbioru D ($\mu(m_i) = D_i$, gdzie $D_i \neq \emptyset$ i $D_i \in 2^D$), przy czym: $\cup D_i = D$;

(d) ρ jest odwzorowaniem o dziedzinie w zbiorze światów możliwych M a przeciwdziedzinie w zbiorze $2^D - \{\emptyset\}$, ρ: $M \rightarrow 2^D - \{\emptyset\}$, które przyporządkowuje każdemu światu możliwemu pewien zbiór własności ($\rho(m_i) = D_i$, gdzie $D_i \neq \emptyset$[19] i $D_i \subset 2^{D \times M}$), gdzie: $\cup D_i = D$;

(e) Φ jest rodziną wybranych rodzin zbiorów, z których każda zawarta jest w D_i.

W ramach teorii STM wybór określonej funkcji ρ decyduje o tym, jakie własności w danym świecie m_i można rozważać, tzn. jakie jest uniwersum własności danego świata m_i. Należy zauważyć, że w przypadku przedstawianej koncepcji, funkcja ρ może przypo-

[18] A. Prior, *Past, Present and Future*, Oxford 1967.

[19] Warunek ten nie wyklucza możliwości mówienia w danym świecie m_i o własności pustej.

rządkowywać światu m_i własności nie będące podzbiorami zbioru: $\mu(m_i) \times \{m_i\}$. Aby przybliżyć intuicje związane z taką sytuacją, weźmy pod uwagę dwa światy możliwe $\mathbf{m}_1$ i $\mathbf{m}_2$, którym pewna określona funkcja μ przyporządkowuje odpowiednio zbiór obiektów aktualnie istniejących w 1364 roku oraz zbiór obiektów aktualnie istniejących w roku 2002. Wybór funkcji ρ nie tylko nie wyklucza sytuacji, w której można rozważać w świecie z 2002 roku własność *bycia dawnym założycielem Uniwersytetu w Krakowie*, którą posiada Kazimierz Wielki w tym świecie, ale także tego, by brać pod uwagę w świecie z 2002 roku własność *bycia założycielem Uniwersytetu w Krakowie*, która przysługuje Kazimierzowi Wielkiemu w świecie z 1364 roku.

Elementy zbioru Φ są zbiorami własności pozytywnych w uniwersach własności przyporządkowanych przez funkcję ρ odpowiednim światom możliwym. Biorąc pod uwagę przytoczony przykład, można powiedzieć, że własność *bycia dawnym założycielem Uniwersytetu w Krakowie*, którą posiada Kazimierz Wielki w świecie z 2002 roku jest elementem Φ_2. Jeżeli uznamy, że własność *bycia założycielem Uniwersytetu w Krakowie*, która przysługuje Kazimierzowi Wielkiemu w świecie z 1364 roku jest pozytywna w świecie z roku 2002, wówczas znaczy to, że własność ta także jest elementem Φ_2.

Na gruncie teorii STM możliwe jest przyjęcie różnych rozwiązań dotyczących przyporządkowań semantycznych. Wybór przynajmniej niektórych z nich jest podyktowany stanowiskiem w sprawie (a) tzw. problemu wartości logicznej w danym świecie możliwym zdań o obiektach nienależących do uniwersum tego świata, oraz (b) tzw. aktualistycznej albo possybilistycznej koncepcji kwantyfikatorów.

Problem wartości logicznej zdań o obiektach nieistniejących ma swoją historię w odniesieniu do logiki klasycznej. Jak wiadomo, można go także poruszać na gruncie systemów modalnych pierwszego rzędu (por. S. Kripke[20]). Sprowadza się on w tym wypadku do decyzji w sprawie wartości logicznej w danym świecie m_i formuł atomowych postaci: $\tau(\alpha)$, (gdzie τ jest stałą predykatową) przy takim wartościowaniu zmiennej α, że obiekt przyporządkowany przez to wartościowanie nie należy do uniwersum m_i wyznaczonego przez pewną funkcję μ. W przypadku języka MJ, w którym mamy

[20] S. Kripke, *Semantical considerations on modal logic*, Acta Philosophica Fennica 16 (1963), 83-94.

do czynienia także z termami pierwszego rzędu, ów problem ulega rozszerzeniu. Dotyczy on bowiem także wartości logicznej w świecie m_i formuł o postaciach: $P(\tau)$ oraz $\tau=\upsilon$, gdy funkcja wartościowania przyporządkowuje przynajmniej zmiennej τ zbiór, który nie należy do $\rho(m_i)$. Możliwość sformułowania problemu wartości logicznej w świecie m_i formuł atomowych pierwszego rzędu wymaga, by wartościowanie zmiennych indywiduowych zdefiniować jako funkcję taką że:

(ν) $v: Zm_{MJ} \to D$.

Założenie, zgodnie z którym przeciwdziedziną funkcji wartościowania dla zmiennych indywiduowych jest zbiór D, przyjmuje większość autorów prac dotyczących semantyki modalnych systemów kwantyfikatorowych pierwszego rzędu (por. Kripke[21], Prior[22], N. Cociarella[23], K. Fine[24], G. E. Hughes i M. J. Cresswell[25], T. Jager[26], L. Kreiser[27]). W tym ujęciu decyzja odnośnie wartości logicznej formuł postaci: $\tau(\alpha)$ w świecie możliwym m_i, gdy $v(\alpha) \notin \mu(m_i)$ jest jeszcze zależna od interpretacji predykatów. Zgodnie ze stanowiskiem, które będzie się nazwać za Finem „pierwszą wersją aktualistycznej koncepcji predykatów"[28], można przyjąć, że predykatom w świecie m_i przyporządkowuje się podzbiory zbioru $\mu(m_i)$ (tak postępuje m.in. T. Jager[29]). Konsekwencją takiego ujęcia jest określenie funkcji wartościowania dla zmiennych predykatowych w sposób następujący:

(V_{al}) $V_{al}: ZM_{MJ} \times \{m_i\} \to 2^{\mu(m_i)}$.

Zgodnie z taką koncepcją należy uznać, że wartości prawdy i fałszu w świecie możliwym m_i przyporządkowuje się tylko takim

---

[21] Tamże.

[22] A. Prior, dz. cyt..

[23] N. B. Cochiarella, *A completeness theorem in second order modal logic*, Theoria 2(1969).

[24] K. Fine, *Model theory for modal logic. Part I: The de re/ de dicto distinction*, Journal of Philosophical Logic 7 (1978), 125-156. Tenże, *Model theory for modal logic. Part II: The elimination of de re modality*, The Journal of Symbolic Logic 7(1978), 277-306.

[25] G. E. Hughes, M. J. Cresswell, *Companion to Modal Logic*, London – New York 1982.

[26] T. Jager, *An actualistic semantics for quantified modal logic*, Notre Dame Journal of Formal Logic 40(1982)3, 335-349.

[27] L. Kreiser, S. Gottwald, W. Stelzner, *Nichtklassische Logik. Eine Einführung*, Berlin 1988.

[28] K. Fine, *Model theory for modal logic. Part III: Existence and predication*, Journal of Philosophical Logic 10(1981), 293-307.

[29] Por. T. Jager, art. cyt., 335-349.

formułom postaci: $\tau(\alpha)$, w których α oznacza obiekt należący do $\mu(m_i)$. Aby to pokazać przyjmijmy, że h jest odwzorowaniem formuły A przy wartościowaniach v, V_{a1} w świecie możliwym m_i ($h^{v, Va1}(A, m_i)$) w dwuelementową algebrę A_B. W przypadku formuł postaci: $\tau(\alpha)$ odwzorowanie to charakteryzuje się standardowo tak, że:

$h^{v, Va1}(\tau(\alpha), m_i) = 1 \Leftrightarrow v(\alpha) \in V_{a1}(\tau, m_i)$,

$h^{v, Va1}(\tau(\alpha), m_i) = 0 \Leftrightarrow v(\alpha) \in -V_{a1}(\tau, m_i)$.

Wobec tego, że: $-V_{a1}(\tau, m_i) = \{d: d \in \mu(m_i)\} - V_{a1}(\tau, m_i)$, stąd: $v(\alpha) \in \mu(m_i)$.

Konsekwencją przyjęcia opisanego stanowiska, zgodnie z którym zdania o obiektach nie należących do $\mu(m_i)$ nie mają wartości logicznej w świecie możliwym m_i, jest problem w określeniu warunków prawdziwości np. alternatywy czy funktora konieczności dla tego typu zdań. Jednym z możliwych rozwiązań takiej sytuacji jest koncepcja Priora polegająca na odpowiednim przeformułowaniu owych warunków[30]. W wyniku takiego zabiegu otrzymuje się logikę, której zbiór tez nie zawiera zbioru tez minimalnej logiki modalnej K. Innym wyjściem, o którym wspominają Kripke[31] oraz Fine[32], może być zachowanie standardowych warunków prawdziwości przy jednoczesnym ograniczeniu w logice (lub w metasystemie tej logiki) reguły podstawiania. Wobec tego, że brane pod uwagę formalizacje argumentu Gödla oparte są na systemie $QS5_{MJ}$ będącym rozszerzeniem minimalnej logiki K (wyrażonym języku MJ) a w jego metasystemie nie nakłada się żadnych ograniczeń na formuły, które są aksjomatami logicznymi, należy uznać, że tzw. pierwsza wersja aktualistycznej koncepcji predykatów nie jest użyteczna w prowadzonych rozważaniach. To samo można powiedzieć o drugiej odmianie stanowiska aktualistycznego, scharakteryzowanej przez Fine'a[33], zgodnie z którą wartościowanie termów pierwszego rzędu rozszerza się tak, że:

(V_{a2}) $V_{a2}: ZM_{MJ} \times \{m_i\} \rightarrow 2^D$, ale jednocześnie uznaje się wszystkie zdania o własnościach obiektów nieistniejących w m_i (tj. niena-

[30] Por. S. Kripke, art. cyt., 83-94.

[31] Tamże.

[32] K. Fine, *Model theory for modal logic. Part I: The de re/ de dicto distinction*, art. cyt., 125-156.

[33] Tamże.

leżących do $\mu(m_i)$) za fałszywe w m_i. Decyzja w sprawie fałszywości wszystkich zdań tego typu wydaje się być co najmniej nieoczywista, jeśli weźmie się pod uwagę rozważania Priora, dotyczące średniowiecznego rozróżnienia własności na takie, które „wymuszają" istnienie obiektu je posiadającego oraz na te, które owego istnienia nie „wymuszają"[34]. Zgodnie z intencjami Priora, można powiedzieć, że gdy teoriomnogościowym korelatem semantycznym danej własności w świecie możliwym m_i jest zbiór, którego wszystkie elementy należą do uniwersum świata m_i przy danej funkcji μ, to własność ta „wymusza" istnienie w m_i obiektów ją posiadających (taką własnością jest np. *bycie czerwonym* czy *bycie założycielem Uniwersytetu w Krakowie*). Zdania, w których mówi się o własności „wymuszającej" istnienie obiektu nie należącego jednak do $\mu(m_i)$, są fałszywe w świecie m_i. Ekstensjami własności „niewymuszających" istnienia obiektów, które ją posiadają (przykładem własności tego typu jest *bycie pomyślanym jako czerwony*, czy *bycie dawnym założycielem Uniwersytetu w Krakowie*) w świecie m_i są zbiory, których elementy nie muszą należeć do uniwersum $\mu(m_i)$. Stąd, zdania mówiące o własności „niewymuszającej" istnienia w m_i obiektu, który do $\mu(m_i)$ nie należy, nie muszą być fałszywe. Dokonane przez Priora rozróżnienie wymaga używania w języku, którym się operuje dwóch rodzajów zmiennych predykatowych, co nie ma miejsca w języku MJ. Nie przesądzając jednak, że każde zdanie dotyczące obiektu nie należącego do $\mu(m_i)$ jest fałszywe w m_i (a także nie rozstrzygając o wartości logicznej w świecie m_i formuł atomowych drugiego rzędu przy wartościowaniu przyporządkowywującym zmiennym predykatowym własności nie będące podzbiorami zbioru $\rho(m_i)$), przyjmiemy, że funkcja V powinna być określona następująco:

(V) V: $ZM_{MJ} \to 2^{M \times D}$ tzn. V: $ZM_{MJ} \to \underline{D}$.

Oczywiście wartość w danym świecie m_i formuł postaci: $P(\tau)$ oraz $\tau=\upsilon$ przy określonym wartościowaniu V zależy jeszcze od interpretacji stałych predykatowych: P oraz =. Jak łatwo można zauważyć, interpretacja ta powinna być zależna od świata możliwego m_i, w którym wyznacza się wartość formuły atomowej drugiego rzędu, ponieważ w przeciwnym wypadku (tj. gdy funkcja interpretacji np.

[34] A. Prior, dz. cyt.

dla predykatu P jest przyporządkowaniem: INT(P)=P, gdzie: $P \subset \underline{D}$) jeden z aksjomatów specyficznych A4. $P(X) \to \Box P(X)$ jest prawdziwy w dowolnej strukturze typu SM" = $((M, r), D, (\underline{D}, -, \cap, \{\varnothing, 1\}), P, \mu, \rho)$, w której r jest relacją zwrotną w M tzn. $r \in$ refl (M) (por. Defrefl. w (3.1.2))[35]. W konsekwencji aksjomat ten byłby „pusty treściowo" w semantyce rozważanych formalizacji, ponieważ nie wyznaczałby on podzbioru właściwego w klasie struktur, będących modelami $QS5_{MJ}$.

Relatywizacja znaczenia predykatów: P i = będzie się sprowadzać do tego, że interpretacja w świecie możliwym m_i będzie przyporządkowywała stałej predykatowej P pewien podzbiór własności:

(*Int1*) $\mathrm{Int}\ (P, m_i) = \Phi_i$,

zaś stałej predykatowej = w świecie możliwym m_i pewien podzbiór iloczynu kartezjańskiego własności tzn.:

(*Int2*) $\mathrm{Int}\ (=, m_i) = \{(\phi, \phi'): \phi \subset \rho(m_i) \text{ i } \phi' \subset \rho(m_i) \text{ i } \forall_{d \in D} ((m_i, d) \in \phi \Leftrightarrow (m_i, d) \in \phi')\}$.

Funkcje wartościowania oraz interpretacji umożliwiają zdefiniowanie trzeciej relacji semantycznej wyznaczającej wartości logiczne formuł danego języka w świecie możliwym m_i przy określonej koncepcji interpretacji kwantyfikatorów – interpretacji aktualistycznej bądź possybilistycznej. Niezależnie od wyboru którejś z tych interpretacji, dla dowolnej formuły A języka MJ można wyznaczyć odwzorowanie h przy wartościowaniach v, V w świecie możliwym m_i ($h^{v,V}(A, m_i)$) w dwuelementową algebrę A_B, spełniające następujące warunki:

(*h1*) $h^{v,V}(X(x), m_i) = 1 \Leftrightarrow (m_i, v(x)) \in V(X)$,

(*h2*) $h^{V}(P(X), m_i) = 1 \Leftrightarrow V(X) \in \mathrm{Int}\ (P, m_i)$ (tzn. $V(X) \in \Phi_i$),

(*h3*) $h^{V,W}(X=Y, m_i) = 1 \Leftrightarrow (V(X), W(Y)) \in \mathrm{Int}\ (=, m_i)$, gdzie W jest danym wartościowaniem zmiennej Y,

(*h4*) $h^{v,V}(\sim A, m_i) = 1 \Leftrightarrow - h^{v,V}(A, m_i) = 0$,

[35] Przyjmijmy, że dla dowolnej struktury $S = ((M, r), D, (\underline{D}, -, \cap, \{\varnothing, 1\}), P, \mu, \rho)$ oraz formuły $A \in FOR_{MJ}$: DefVer. $A \in \mathrm{Ver}\ (S) \Leftrightarrow \forall_{m_i \in M} \forall_{v \in \underline{D}} \forall_{V \in D} (h^{v,V}(A, m_i) = 1)$ gdzie: $h = h_{\rho, P}$. Można wykazać, że:

Dla dowolnej struktury S takiej, że S= $((M, r), D, (D, -, \cap, \{\varnothing, 1\}), P, \mu, \rho)$: $r \in$ refl(M) $\Rightarrow (P(X) \to \Box P(X) \in \mathrm{Ver}\ (S))$

Dowód: $\exists_{S \in SM''}: P(X) \to \Box P(X) \notin \mathrm{Ver}\ (S)$ [zdn] / $\exists_{m_i \in M} \exists_{V(X) \in D} (h^V (P(X) \to \Box P(X), mi) = 0$ [bo: DefVer] / $(h^V(P(X), m_i) \wedge -h^V(\Box P(X), m_i) = 0)$ [bo: (*h6*)] / $((h^V(P(X), m_i) = 0$ oraz $-h^V(\Box P(X), m_i)) = 0)$ / $(V(X) \notin P$ oraz $\forall_{m_j \in M} (m_i r m_j \Rightarrow V(X) \in P'))$ [bo: (*h7*)] / $(V(X) \notin P'$ oraz $V(X) \in P')$ [bo: $r \in$ refl (M)], sprz.

(*h5*) $h^{v,V}(A \wedge B, m_i) = 1 \Leftrightarrow (h^{v,V}(A, m_i)) \wedge (h^{v,V}(B, m_i)) = 1$,
(*h6*) $h^{v,V}(A \rightarrow B, m_i) = 1 \Leftrightarrow (-h^{v,V}(A, m_i)) \vee (h^{v,V}(B, m_i)) = 1$,
(*h7*) $h^{v,V}(\Box A, m_i) = 1 \Leftrightarrow \forall_{m_j \in M}(m_i r m_j \Rightarrow h^{v,V}(A, m_j) = 1)$.

Zgodnie z aktualistyczną koncepcją kwantyfikatorów wiążących zmienne indywiduowe, którą przedstawia np. Kripke[36], funkcja h dla formuł postaci: $\forall x\, A(x)$ powinna być scharakteryzowana następująco:

(*h8a*) $h^{v,V}(\forall x\, A(x), m_i) = 1 \Leftrightarrow h^V(A(x), m_i) = 1$ dla dowolnego wartościowania $v(x) \in \mu(m_i)$.

Można powiedzieć, że zgodnie z warunkiem (*h8a*), formuła poprzedzona ogólnym kwantyfikatorem wiążącym zmienną indywiduową jest prawdziwa w świecie m_i wtw, gdy przyjmuje ona wartość prawdy w tym świecie dla każdego wartościowania zmiennej indywiduowej należącego do uniwersum tego świata wyznaczonego przez funkcję μ.

Possybilistyczna koncepcja kwantyfikatorów wiążących zmienne indywiduowe zakłada inną charakterystykę funkcji h dla formuł postaci $\forall x A(x)$:

(*h8p*) $h^{v,V}(\forall x\, A(x), m_i) = 1 \Leftrightarrow h^V(A(x), m_i) = 1$ dla dowolnego wartościowania $v(x) \in D$.

W (*h8p*) stwierdza się, że formuła poprzedzona ogólnym kwantyfikatorem wiążącym zmienną indywiduową jest prawdziwa w świecie m_i wtw, gdy przyjmuje ona wartość prawdy w tym świecie dla każdego wartościowania zmiennej indywiduowej należącego do zbioru obiektów *D*.

W przypadku aktualistycznej interpretacji kwantyfikatora szczegółowego wiążącego zmienne indywiduowe, funkcja h scharakteryzowana jest następująco:

(*h9a*) $h^{v,V}(\exists x\, A(x), m_i) = 1 \Leftrightarrow h^V(A(x), m_i) = 1$ dla pewnego wartościowania $v(x) \in \mu(m_i)$,

zaś w interpretacji possybilistycznej:

(*h9p*) $h^{v,V}(\exists x\, A(x), m_i) = 1 \Leftrightarrow h^V(A(x), m_i) = 1$ dla pewnego wartościowania $v(x) \in D$.

Aby przybliżyć intuicje związane z każdym z tych dwóch stanowisk i pokazać różnicę między owymi intuicjami, weźmiemy pod uwagę pewien zbiór światów możliwych $M = \{\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2\}$ oraz pewien

[36] Por. S. Kripke, art. cyt., 83-94.

zbiór indywiduów $D=\{$Stanisław Wokulski, Ignacy Rzecki, Bolesław Prus$\}$. Określona funkcja μ przyporządkowuje elementom zbioru M odpowiednio uniwersa: $\mathbf{D}_1=\{$Stanisław Wokulski$\}$, $\mathbf{D}_2=\{$Ignacy Rzecki, Bolesław Prus$\}$. Predykat: BL, który znaczy tyle samo co „jest bohaterem *Lalki*" zinterpretujemy, używając funkcji int: int(BL) $=\{(\mathbf{m}_1,$ Stanisław Wokulski$), (\mathbf{m}_2,$ Ignacy Rzecki$)\}$. Zgodnie z aktualistyczną koncepcją kwantyfikatorów formuła: $\forall x\ BL(x)$, jest prawdziwa w $\mathbf{m}_1$, ponieważ dla każdego wartościowania $v(x) \in \mu(\mathbf{m}_1)$ jest tak, że: $(\mathbf{m}_1, v(x)) \in$ int (BL). Konsekwencją possybilistycznej interpretacji kwantyfikatorów ta sama formuła jest w $\mathbf{m}_1$ fałszywa, bo nie każdy element uniwersum D (tzn. nie każdy obiekt, o którym można mówić w świecie $\mathbf{m}_1$) jest bohaterem *Lalki*. Posługując się aktualistyczną koncepcją kwantyfikatora szczegółowego, można powiedzieć, że formuła: $\exists x \sim BL(x)$, jest fałszywa w $\mathbf{m}_1$, ponieważ nie ma takiego obiektu będącego elementem $\mu(\mathbf{m}_1)$ (tzn. „aktualnego w świecie $\mathbf{m}_1$"), który nie byłby bohaterem *Lalki*. Tymczasem zgodnie z possybilistyczną koncepcją kwantyfikatorów formuła: $\exists x \sim BL(x)$ jest w $\mathbf{m}_1$ prawdziwa, bo istnieje taki obiekt należący do D (tzn. „możliwy do pomyślenia w świecie $\mathbf{m}_1$") - Bolesław Prus - który nie jest bohaterem *Lalki*.

W wypadku interpretacji języka MJ w STM można także rozważać dwa rodzaje interpretacji kwantyfikatorów wiążących zmienne predykatowe. Zgodnie z possybilistyczną koncepcją tych kwantyfikatorów, funkcję h dla formuł postaci: $\forall X\ A(X)$ i $\exists X\ A(X)$ można scharakteryzować odpowiednio:

(*h10P*) $h^{v,V}(\forall X\ A(X), m_i) = 1 \Leftrightarrow h^{v}(A(X), m_i) = 1$ dla dowolnego wartościowania $V(X) \subset M\times D$,

(*h11P*) $h^{v,V}(\exists X\ A(X), m_i) = 1 \Leftrightarrow h^{v}(A(X), m_i) = 1$ dla pewnego wartościowana $V(X) \subset M\times D$.

Naturalnym rozszerzeniem stanowiska aktualistycznego dla formuł o wymienionych postaciach byłyby następujące warunki nałożone na funkcję h:

(*h10A*) $h^{v,V}(\forall X\ A(X), m_i) = 1 \Leftrightarrow h^{v}(A(X), m_i) = 1$ dla dowolnego wartościowania $V(X) \in \rho(m_i)$,

(*h11A*) $h^{v,V}(\exists X\ A(X), m_i) = 1 \Leftrightarrow h^{v}(A(X), m_i) = 1$ dla pewnego wartościowana $V(X) \in \rho(m_i)$.

Uwzględniając przedstawione możliwości interpretacji kwantyfikatorów, można powiedzieć, że funkcja h może zostać scharakteryzowana na cztery możliwe sposoby. W dalszych rozważaniach przyjmiemy, że funkcję odwzorowania formuł języka MJ przy wartościowaniach v, V w świecie możliwym m_i, w dwuelementową algebrę A_B spełniającą warunki: (*h1*) – (*h7*), (*h8a*), (*h9a*), (*h10A*), (*h11A*) będziemy oznaczać: $h_{a,A}$. Gdy funkcja ta spełnia warunki: (*h1*) – (*h7*), (*h8a*), (*h9a*), (*h10P*), (*h11P*), przyporządkowujemy jej skrót: $h_{a,P}$. Gdy jest ona scharakteryzowana zgodnie z warunkami: (*h1*) – (*h7*), (*h8p*), (*h9p*), (*h10A*), (*h11A*), wówczas oznaczamy ją: $h_{p,A}$, zaś w przypadku spełnienia warunków: (*h1*) – (*h7*), (*h8p*), (*h9p*), (*h10P*), (*h11P*) – $h_{p,P}$.

3.1.2 Spełnianie, prawdziwość i modele formuł języka MJ na gruncie teorii STM i KTM

Niech S będzie dowolnie ustaloną strukturą postaci $\mathcal{S}\mathfrak{M}$ lub $\mathcal{SM}$, przy czym:

gdy S= ($\mathfrak{M}$, r) wtedy: v=ν oraz V=V, h=h oraz gdy S= ((M, r), D, ($\underline{D}$, –, $\cap$, {$\varnothing$, 1}), Φ, μ, ρ) wówczas: v=v oraz V=V, h$\in${$h_{a,A}$, $h_{a,P}$, $h_{p,A}$, $h_{p,P}$}.

Przyporządkowania semantyczne opisane w (3.1.1) pozwalają na sformułowanie następujących definicji:

Def. 9. A$\in$sat (v, V, m_i) $\Leftrightarrow h^{v,V}(A, m_i) = 1$ (formuła A jest spełniona w świecie możliwym m_i przez wartościowania v, V wtw, gdy odwzorowanie h formuły A przy wartościowaniach v, V w świecie m_i przyjmuje wartość 1);

Def. 10. A$\in$ver (m_i) $\Leftrightarrow \forall_{v,V} h^{v,V}(A, m_i) = 1$ (formuła A jest prawdziwa w świecie możliwym m_i wtw, gdy formuła A jest spełniona w świecie m_i przez wszystkie wartościowania v, V).

$\underline{\mathcal{S}\mathfrak{M}}$ oraz $\underline{\mathcal{SM}}$ są zbiorami wszystkich struktur odpowiednio typów $\mathcal{S}\mathfrak{M}$ oraz $\mathcal{SM}$.

Def. 11. A$\in$Ver(S) $\Leftrightarrow \forall_{m_i \in \underline{M}} \forall_{v,V} h^{v,V}(A, m_i) = 1$ przy czym: gdy S$\in\underline{\mathcal{S}\mathfrak{M}}$, wówczas $\underline{M}=\mathfrak{M}$, zaś dla S$\in\underline{\mathcal{SM}}$, $\underline{M}= M$ (formuła A jest prawdziwa w strukturze S wtw, gdy A jest spełniona przy każdym wartościowaniu w każdym świecie możliwym należącym do $\mathfrak{M}$);

Def. 12. A$\in$*VER* ($\underline{\mathcal{S}\mathfrak{M}}$) $\Leftrightarrow \forall_{S \in \mathcal{S}\mathfrak{M}}$ A$\in$Ver (S);

Def. 13. A$\in$*VER* ($\underline{\mathcal{SM}}$) $\Leftrightarrow \forall_{S \in \mathcal{SM}}$ A$\in$Ver (S).

W ramach teorii KTM i STM modelem danej formuły (lub zbioru formuł) może być dany świat m_i lub pewna struktura S (typu $\mathcal{S}\mathfrak{M}$ lub $\mathcal{SM}$). Niech A będzie niepustym zbiorem wyrażeń sensownych tzn. $\mathcal{A} \subset FOR_{MJ}$ i $\mathcal{A} \neq \varnothing$. Powiemy, że:

Def. 14. $m_i \in mod(A) \Leftrightarrow \forall_{A \in A}\ A \in ver(m_i)$ (świat możliwy m_i jest modelem zbioru formuł A wtw, gdy każda formuła należąca do zbioru A jest prawdziwa w świecie m_i);

Def. 15. $S \in MOD(A) \Leftrightarrow \forall_{A \in A}\ A \in Ver(S)$ (struktura S (typu *SM* lub *SM*) jest modelem zbioru formuł A wtw, gdy każda formuła należąca do zbioru *A* jest prawdziwa w strukturze S).

Gdy każda struktura typu *SM* lub *SM* jest modelem danego zbioru formuł, wówczas można powiedzieć, że klasa struktur $\underline{SM}$ lub $\underline{SM}$ jest modelem tego zbioru:

Def. 16. $S \in MOD(A) \Leftrightarrow \forall_{S \in \underline{S}}\ S \in MOD\ (A)$, gdzie: $\underline{S} \in \{\underline{SM}, \underline{SM}\}$

3.2. MODELE LOGIKI $QS5_{MJ}$

Ogólnie można powiedzieć, że struktura S jest modelem logiki $L_J = (AL, R)$ wtw, gdy jest ona modelem dla zbioru aksjomatów tej logiki AL oraz gdy każda reguła pierwotna tej logiki jest niezawodna w strukturze S. Dowolna reguła r jest niezawodna w strukturze S, gdy zbiór formuł, dla których ta struktura jest modelem, jest domknięty ze względu na regułę r. Odnośnie do logiki $QS5_{MJ}$ można sprecyzować pojęcie modelu w sposób następujący:

Niech S będzie strukturą typu: *SM* lub *SM*.

Def. 17. $S \in ML(QS5_{MJ}) \Leftrightarrow S \in MOD(AS5)$ oraz $\forall_{r \in \underline{R}}\ r \in niez(S)$, gdzie:

Def. 18. $r \in niez\ (S) \Leftrightarrow \forall_{A \subset FORJ} \forall_{B \in FORJ} ((A, B) \in r$ i $S \in MOD(A) \Rightarrow S \in MOD(\{B\}))$.

Wybór jednej z dwu omówionych koncepcji interpretacji języka MJ (tj. interpretacji na gruncie KTM lub STM) zależy od przyjęcia założenia, dotyczącego klasy modeli niemodalnego fragmentu $QS5_{MJ}$ – klasycznej logiki predykatów drugiego rzędu KL_{MJ} (por. Def2). Założenie, zgodnie z którym logika KL_{MJ} nie powinna wyróżniać żadnej spośród formalnie dopuszczalnych interpretacji MJ[37], ogranicza możliwość wyznaczania modeli logiki $QS5_{MJ}$ (i konsekwentnie modeli właściwych branych pod uwagę formalizacji) do klasy $\underline{SM}$, ponieważ:

Tw. 1. Dla h=*h*: $\underline{SM} \not\subset ML\ (KL_{MJ})$

[37] Innymi słowy, znaczenie niemodalnych stałych logicznych opisane przez aksjomaty logiki klasycznej, powinno być wyznaczone już tylko na mocy przyporządkowań semantycznych między językiem MJ a klasą struktur nadających się na jego interpretację (*SM* lub *SM*).

[Dowód na podstawie tego, że wyrażenie: $\forall X \Box P(X) \rightarrow \Box P(Y)$, będąc aksjomatem logicznym logiki KL_{MJ}, nie jest prawdziwe w każdej klasie typu $S\mathfrak{M}$][38]

Definicje przyporządkowań semantycznych między formułami języka MJ a strukturami typu *SM* pozwalają natomiast zauważyć, że:

Tw. 2. Dla $h = h_{p,A}$: $\underline{SM} \not\subset ML\ (KL_{MJ})$[39]

Tw. 3. Dla $h = h_{a,P}$: $\underline{SM} \not\subset ML\ (KL_{MJ})$.[40]

Tw. 4. Dla $h \in \{h_{a,A}, h_{p,A}\}$: $\underline{SM} \not\subset ML\ (KL_{MJ})$.[41]

Tw. 5. $\underline{SM} \subset ML\ (KL_{MJ}) \Rightarrow h = h_{p,P}$.[42]

---

[38] Aby to wykazać przyjmijmy, że: $D = \{a, b, c\}$, wówczas: $\mathfrak{M} = \{ (D_i, (2^{D_i}, -, \cap, \{\emptyset, 1\}), \Phi_i) : D_i \in 2^D \wedge D_i \neq \emptyset \wedge \Phi_i \subset 2^{D_i} \}$. Elementami zbioru $\mathfrak{M}$ są następujące światy możliwe: $\mathbf{m}_1 = (\{a\}, (\{\{a\}, \emptyset\}, -, \cap, \{\{a\}\}), \mathbf{m}_2 = (\{b, c\}, (\{\{b\}, \{c\}, \{b, c\}, \emptyset\}, -, \cap), \{\{b\}\}), \mathbf{m}_3 = (\{c\}, (\{\{c\}, \emptyset\}, -, \cap), \{\{c\}, \emptyset\})$

Rozważaną strukturą jest $\mathbf{S} = (\mathfrak{M}, r)$, gdzie $r = \{<\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2>, <\mathbf{m}_2, \mathbf{m}_3>\}$.

Formuła: $\forall X \Box P(X) \rightarrow \Box P(Y) \notin Ver\ (\mathbf{S})$, ponieważ: $\exists_{m_i \in M} \exists_{V, W} (h^{V, W} (\forall X \Box P(X) \rightarrow \Box P(Y), m_i) = 0)$ tzn.:

$\exists_{m_i \in M} \exists_{V, W} (h^V (\forall X \Box P(X), m_i) = 1$ i $h^W (\Box P(Y), m_i)) = 0$ bo: dla $\mathbf{m}_1$, $V = (\{a\}, \{b\}, \{c\})$, $W = (\{a\}, \{b, c\}, \{c\})$

$h^V (\forall X \Box P(X), \mathbf{m}_1) = 1$ bo: $V/_{V1} = \{V, (\emptyset, \{b\}, \{c\}) \}$ i $\forall_{V' \in V/V1} (V_2 (X) \in Int_2 (P))$ oraz:

$h^W (\Box P(Y), \mathbf{m}_1) = 0$ bo: $W_2 (Y) \notin Int_2 (P)$.

[39] Dowód: (*) $(\forall X\ X(x) \rightarrow Y(x)) \in AK$, $S \in \underline{SM}$ i S jest strukturą taką, że: $\mathbf{S} = ((\mathbf{M}, r), \mathbf{D}, (\underline{\mathbf{D}}, -, \cap, \{\emptyset, 1\}), \Phi, \mu, \rho)$, gdzie: $\mathbf{M} = \{\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2\}$, $\mathbf{D} = \{a, b\}$, $\mu\ (\mathbf{m}_1) = \{b\}$, $\mu\ (\mathbf{m}_2) = \{a\}$, $\rho\ (\mathbf{m}_1) = \{ (\mathbf{m}_1, b)$, $\rho\ (\mathbf{m}_2) = \{ (\mathbf{m}_2, a) \}$ oraz: $(\forall X\ X(x) \rightarrow Y(x) \notin Ver(\mathbf{S}))$. W strukturze $\mathbf{S}$ istnieje takie wartościowanie V zmiennej Y oraz wartościowanie v zmiennej x, że:

$(h_{p,A}{}^{v,V} (\forall X (X(x) \rightarrow Y(x)), \mathbf{m}_2) = 0$ bo: dla $v\ (x) = a$ i $V\ (Y) = \{ (\mathbf{m}_2, b) \}$ jest tak, że:

$(h_{p,A}{}^{v,V} (\forall X (X(x) \rightarrow Y(x)), \mathbf{m}_2) = 0 \Leftrightarrow \forall_{V'(X) \subset \rho(m2)} (\mathbf{m}_2, v(x)) \in V'(X)$ oraz $(\mathbf{m}_2, v(x)) \notin V(Y)$.

[40] Dowód: (**) $(\forall X \forall Y\ (\forall x\ (X(x) \leftrightarrow Y(x)) \rightarrow X = Y)) \in C(R, \mathbf{AB})$, $S \in \underline{SM}$ i $\mathbf{S}$ jest strukturą taką, że: $\mathbf{S} = ((\mathbf{M}, r), \mathbf{D}, (\underline{\mathbf{D}}, -, \cap, \{\emptyset, 1\}), \Phi, \mu, \rho)$, gdzie: $\mathbf{M} = \{\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2\}$, $\mathbf{D} = \{a\}$, $\mu\ (\mathbf{m}_1) = \{a\}$, $\mu\ (\mathbf{m}_2) = \{a\}$, $\rho\ (\mathbf{m}_1) = \{(\mathbf{m}_1, a), (\mathbf{m}_2, a)\}$, $\rho\ (\mathbf{m}_2) = \{(\mathbf{m}_2, a)\}$, $Int\ (=, \mathbf{m}_1) \subset 2^{\rho(m1)} \times 2^{\rho(m1)}$ tj.: $Int\ (=, \mathbf{m}_1) = \{(\{(\mathbf{m}_1, a)\}, \{(\mathbf{m}_1, a)\}), (\{(\mathbf{m}_2, a)\}, \{(\mathbf{m}_2, a)\}), (\{(\mathbf{m}_1, a), (\mathbf{m}_2, a)\}, \{(\mathbf{m}_1, a), (\mathbf{m}_2, a)\}), (\emptyset, \emptyset)\}$ oraz: $(\forall X \forall Y\ (\forall x\ (X(x) \leftrightarrow Y(x)) \rightarrow X = Y)) \notin Ver\ (\mathbf{S})$, ponieważ:
w strukturze $\mathbf{S}$ istnieje takie wartościwanie V zmiennych X i Y, że: $(h_{a,P}{}^{V} (\forall x\ (X(x) \leftrightarrow Y(x)), \mathbf{m}_1) = 1$ oraz $(V(X), V(Y)) \notin Int\ (=, \mathbf{m}_1)$ – np.: $V(X) = \{ (\mathbf{m}_1, a) \}$, $V(Y) = \{(\mathbf{m}_1, a), (\mathbf{m}_2, a) \}$.

[41] Dowód: (***) $(\forall X\ P(X) \rightarrow P(Y)) \in AK$, $S \in \underline{SM}$ i $\mathbf{S}$ jest strukturą taką, że: $\mathbf{S} = ((\mathbf{M}, r), \mathbf{D}, (\underline{\mathbf{D}}, -, \cap, \{\emptyset, 1\}), \Phi, \mu, \rho)$, gdzie: $\mathbf{M} = \{\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2\}$, $\mathbf{D} = \{a, b\}$, $\mu\ (\mathbf{m}_1) = \{a, b\}$, $\mu\ (\mathbf{m}_2) = \{b\}$, $\rho\ (\mathbf{m}_1) = \{ (\mathbf{m}_1, a), (\mathbf{m}_1, b) \}$, $\rho\ (\mathbf{m}_2) = \{ (\mathbf{m}_2, b), (\mathbf{m}_2, a) \}$, $\mathbf{Int}\ (P, \mathbf{m}_1) = \rho(\mathbf{m}_1)$, $\mathbf{Int}\ (P, \mathbf{m}_2) = \{ (\mathbf{m}_2, b) \}$ oraz: $\forall XP\ (X) \rightarrow P(Y) \notin Ver\ (\mathbf{S})$, ponieważ w strukturze $\mathbf{S}$ istnieje takie wartościwanie V zmiennej Y, że: $h^V (\forall XP\ (X), \mathbf{m}_1) = 1$ (bo: $\forall_{V'(X) \subset \rho(m1)} V'(X) \in \mathbf{Int}\ (P, \mathbf{m}_1)$) oraz $h^V (P\ (Y), \mathbf{m}_1) = 0$ (bo: np. $V\ (Y) = \{ (\mathbf{m}_2, b) \} \notin \mathbf{Int}\ (P, \mathbf{m}_1)$).

[42] Dowód na podstawie Tw. 3, Tw. 4 oraz tego, że: $h \in \{h_{a,A}, h_{p,P}, h_{a,P}, h_{p,A}\}$.

Tw. 6. Dla $h=h_{p,P}$: $\underline{SM}\subset ML\ (KL_{MJ})$.[43]

Ponadto, dla dowolnej struktury S typu *SM* reguła *rnec* jest niezawodna w tej strukturze (por. Def. 18):

Tw. 7. $\forall_{S\in SM}\ \forall_{\{A\}\subset FORJ}$: $S\in MOD\ (\{A\}) \Rightarrow S\in MOD\ (\{\Box A\})$[44].

Na podstawie twierdzeń Tw. 5, Tw. 6 można powiedzieć, że każdy element klasy $\underline{SM}$ jest modelem logiki KL_{MJ} tylko przy założeniu possybilistycznej interpretacji kwantyfikatorów wiążących obydwa typy zmiennych. Zgodnie z Tw. 7 zbiór formuł prawdziwych w dowolnej strukturze S typu *SM* jest domknięty ze względu na regułę dołączania konieczności[45].

Twierdzenia Tw. 5, Tw. 6 oraz ustalenia dotyczące związków między niektórymi własnościami relacji dostępności *r a* prawdziwością charakterystycznych aksjomatów logiki zdaniowej S5 uzasadniają to, że:

Tw. 8. Dla $h=h_{p,P}$: $\forall_{S\in SM}\ \forall_M\ (S\in MOD\ (QS5_{MJ}) \Rightarrow r\in refl\ (M)$ i $r\in sym\ (M)$ i $r\in przech\ (M))$, gdzie:

Defrefl. $r\in refl\ (M) \Leftrightarrow \forall_{m_i\in M}\ (m_i r m_i)$,

Defsym. $r\in sym\ (M) \Leftrightarrow \forall_{m_i,\, m_j\in M}\ (m_i r m_j \Rightarrow m_j r m_i)$,

Defprzech. $r\in przech\ (M) \Leftrightarrow \forall_{m_i,\, m_j,\, m_k\in M}\ (m_i r m_j$ i $m_j r m_k \Rightarrow m_i r m_k)$.

Założenie, zgodnie z którym aksjomatyka KL_{MJ} nie powinna wyróżniać właściwego podzbioru z klasy $\underline{SM}$ prowadzi więc do wyboru possybilistycznej interpretacji kwantyfikatora szczegółowego. W związku z tym, że na gruncie STM w świecie m_i można mówić o własnościach indywiduów nie należących do uniwersum tego

---

[43] Dowód Tw. 6 ma taką samą strukturę jak dowód twierdzenia o ważności monadycznych rachunków kwantyfikatorowych pierwszego rzędu S4, B i S5 autorstwa Hughessa i Cresswella (por. G. E. Hughes, M. J. Cresswell, dz. cyt., 145-148). (por. np. B. F. Chellas, *Modal Logic: an Introduction*, Cambridge Univ. Press, 1984, 164)

[44] Dowód: $S\in MOD\ (\{A\})$ [zał] / $A\in Ver\ (S)$ [bo: Def. 15] / $\forall_{m_i\in M}\ A\in ver\ (m_i)$ [bo: Def. 11] / $\forall_{m_j\in M}\ \forall_{m_i\in M}\ (m_j r m_i \Rightarrow A\in ver\ (m_i))$ / $\forall_{m_j\in M}\ ((\Box A)\in ver\ (m_j))$ [bo: $Defh_{p,P}$] / $(\Box A)\in Ver\ (S)$ [bo: Def. 11] / $S\in MOD\ (\{\Box A\})$ [bo: Def. 15].

[45] Reguła dołączania konieczności *rnec* (tak jak reguły dołączania kwantyfikatorów ogólnych: *rgen* i *rGen*) jest regułą dopuszczalną w $QS5_J$, chociaż nie jest w tym rachunku ważna (tj. *rnec*$\in Dop(QS5_J)$ oraz *rnec*$\notin Ważn(QS5_J)$, gdzie: $r\in Dop(AL, R) \Leftrightarrow \forall_{(A_1,\dots,A_n,B)\in r}$: $\{A_1,\dots,A_n\}\subset C\ (R, AL) \Rightarrow B\in C\ (R, AL)$ oraz $r\in Ważn\ (AL, R) \Leftrightarrow \forall_{(A_1,\dots,A_n,B)\in r}$: $(A_1\wedge\dots\wedge A_n\rightarrow B)\in C\ (R, AL)$). Semantyczną konsekwencją takiego stanu rzeczy jest to, że ze względu na *rnec* dziedziczona jest własność *bycia prawdziwym w dowolnej ramie* oraz *dowolnej strukturze* (będących modelami dla aksjomatów charakterystycznych modalnej logiki zdaniowej S5) przez dowolne formuły języka J, natomiast nie jest dziedziczona własność *bycia prawdziwym w dowolnie ustalonym świecie m_i*.

świata (por. Def8), interpretacja pojęcia *istnienia w* argumentacji na rzecz tezy o koniecznym istnieniu absolutu (por. T3. $\Box\exists x\, G(x)$) za pomocą tak rozumianego kwantyfikatora szczegółowego jest za szeroka. Nawet jeżeli uniwersum D struktur typu SM ($SM = ((M, r), D, (\underline{D}, -, \cap, \{\emptyset, 1\}), \Phi, \mu, \rho)$), nadających się na modele właściwe branych pod uwagę formalizacji, ograniczać do zbioru bytów, to dowodzona teza jest prawdziwa również w takim świecie m_j (dostępnym z wyróżnionego świata m_i), że do jego uniwersum byt będący absolutem nie należy. (Można by powiedzieć, że teza T3 stwierdza w świecie m_i, iż absolut należy do zbioru bytów, chociaż nie musi on *aktualnie istnieć* w m_i). Takie za szerokie pojęcie *istnienia* można zawęzić, przyjmując założenie zgodnie, z którym struktury typu SM nadające modele logiki $QS5_{MJ}$ muszą spełniać dodatkowo warunek monotoniczności:

(Mon) $\forall_{m_i, m_j \in M} (m_i r m_j \Rightarrow \mu(m_i) \subset \mu(m_j))$.[46]

Dla dowolnej struktury typu SM będącej modelem dla $QS5_{MJ}$, która spełnia warunek (Mon) (tj. Mon (S)), uniwersa światów względem siebie dostępnych są są identyczne:

Niech $S \in \underline{SM}$ będzie strukturą wyznaczoną przez dowolnie ustalone: M, r, D, Φ, μ, ρ, wówczas:

Tw. 9. $S \in MOD\,(QS5_{MJ}) \Rightarrow (Mon\,(S) \Rightarrow \forall_{m_i, m_j \in M} (m_i r m_j \Rightarrow \mu(m_i) = \mu(m_j)))$[47]

Warunek (Mon) co prawda nie gwarantuje tego, że jeżeli teza o koniecznym istnieniu absolutu jest prawdziwa w świecie m_i, to v (x) należy do uniwersum tego świata (tj. $v(x) \in \mu(m_i)$) a tylko, że para $(m_i, v(x))$ należy do ekstensji pewnej własności G^*, będącej korelatem semantycznym predykatu G:

Tw. 10. $S \in MOD\,(QS5_{MJ})$ oraz $Mon\,(S) \Rightarrow \forall_{v \in D} (h^{v,V}(\Box\exists x\, Gx, m_i) = 1 \Rightarrow (m_i, v(x)) \in G^*)$, gdzie: $G^* \subset M \times D$.[48]

---

[46] Warunek (Mon) przyjmują Hughes i Cresswell (w: *Introduction to Modal Logic*, London 1974, 170) w związku z dowodem pełności monadycznych kwantyfikatorowych rachunków T, S4 pierwszego rzędu w niektórych strukturach typu $((M, r), D, \mu)$. Wobec tego, że formuła Barcan (FB), nie będąc tezą monadycznych kwantyfikatorowych rachunków T, S4 pierwszego rzędu, jest przy wartościowaniach v i h_p prawdziwa w każdej strukturze typu $((M, r), D, \mu)$, która jest modelem owych rachunków, jak wykazują autorzy, dowód pełności tych logik jest możliwy dopiero w wyniku zmiany koncepcji wartościowania formuł oraz nałożenia dodatkowego warunku (Mon) na funkcję μ.

[47] Dowód Tw9 na podstawie tego, że: Mon (S) oraz $r \in$równ (M).

[48] Dowód Tw10 na podstawie def$h^{v,V}$ oraz tego, że: $r \in$refl (M).

Znaczenie pojęcia *istnienia* zostaje w tym sensie zawężone, że interpretacja possybilistyczna kwantyfikatora szczegółowego wiążącego zmienne indywiduowe jest równoważna aktualistycznej w obcięciu do struktur, w których równoważnościowa relacja dostępności jest dodatkowo spójna (ewentualnie w obcięciu do danej klasy abstrakcji $[m_i]_{M,r}$):

Dla dowolnie ustalonej struktury S= (M, r, D, Φ, μ, ρ) jest tak, że:

Tw. 11. Mon (S) i rϵrówn (M) i $r\epsilon$con (M) $\Rightarrow \forall_{m_i \in M} (\exists_{v \in D} ((v(x), m_i)) \in G^* \Leftrightarrow \exists_{v \in \mu(m_i)} (v(x), m_i) \in G^*)$[49], gdzie:

Defcon. $r\epsilon$con (M) $\Leftrightarrow \forall_{m_i, m_j \in M} (m_i r m_j$ lub $m_j r m_i$ lub $m_i = m_j)$.

W strukturach nie spełniających poprzednika powyższej implikacji (Tw 11) należałoby związać *bycie elementem* uniwersum świata możliwego ze znaczeniem predykatu: G. Związek ten musiałby tego rodzaju, że prawdziwość tezy T3 w wyróżnionym świecie m_i gwarantowałaby spełnienie semantycznego warunku:

(*) $\forall_{v \in D} (v(x), m_i) \in G^* \Rightarrow v(x) \in \mu(m_i))$.

Warunek ten może być spełniony wtedy, gdy interpretacja predykatu G jest zrelatywizowana do świata możliwego m_i tj. int $(G, m_i) \subset \{(d, m_i): d \in \mu(m_i)\}$. Taka intepretacja wymaga jednak przyjęcia przynajmniej słabszej z dwu opisanych w (3.1.1) aktualistycznych koncepcji predykatów, zgodnie z którą wartościowanie zmiennych predykatowych jest zrelatywizowane do danego świata możliwego (por. (V_{a2}) V_{a2}: $ZM_{MJ} \times \{m_i\} \rightarrow 2^D$). Dowodzenie aktualnego istnienia absolutu polegałoby wówczas na wykazywaniu, że własność bycia absolutem jest własnością „wymuszającą” istnienie obiektu, który ją posiada.

4. ZAKOŃCZENIE

Przedmiotem przedstawionych rozważań były niektóre formalne ograniczenia dotyczące interpretacji kluczowych pojęć występujących w modalnych formalizacjach argumentu ontologicznego Gödla (opartych na logice modalnej S5). Współczesna semantyka systemów modalnych stwarza możliwość sformułowania dwu typów modalnej teorii modeli, na gruncie których wyznacza się struktury światów możliwych nadających się na interpretację języka MJ – języka branych pod uwagę formalizacji. Na gruncie obu tych teorii rozumienie pojęć *konieczności*

---

[49] Dowód Tw11 na podstawie tego, że μ jest odwzorowanie oraz Tw9.

i *możliwości* wyznaczone jest przez odpowiednie własności formalne relacji dostępności między światami możliwymi. W odróżnieniu od teorii STM, w teorii KTM pojęcie *świata możliwego* jest wtórne – w tym wypadku można mówić o jakimś świecie możliwym, o ile dany jest zbiór obiektów stanowiących jego uniwersum. Wydaje się, że często dyskutowane w ramach współczesnej literatury filozoficznej trudności związane z zagadnieniami statusu i natury światów możliwych znajdują tu częściowe rozwiązanie – jeśli istnieje jednoznaczna definicja świata możliwego, to tym samym znana jest jego natura. Z drugiej strony, należy pamiętać, że definicja takiego obiektu nie implikuje jego realnego istnienia a tym bardziej, nie wyposaża ona w metodę wyboru spośród wielu światów możliwych *świata rzeczywistego*. Rozumienie pojęcia *świata możliwego* na gruncie każdej z wymienionych teorii rozstrzyga o niektórych przyporządkowaniach semantycznych między rozważanym językiem a strukturami światów możliwych (wartościowaniu zmiennych indywiduowych i predykatowych, interpretacji stałych logicznych i pozalogicznych). Założenie, zgodnie z którym znaczenie niemodalnych stałych logicznych nie powinno wyróżniać żadnej spośród nadających się na interpretację języka MJ struktur, dyktuje konieczność przyjęcia possybilistycznej interpretacji kwantyfikatorów (w szczególności: kwantyfikatora szczegółowego, który służy do wyrażenia w języku MJ tezy o koniecznym istnieniu absolutu). Dodatkowe założenia dotyczące zależności między uniwersami światów możliwych umożliwiają w niektórych strukturach zawężenie znaczenia kwantyfikatora szczegółowego do interpretacji aktualistycznej. Rozważanie szerszej klasy struktur wymaga reinterpretacji w teorii STM języka MJ w taki sposób, by pojęcie *aktualnego istnienia* związać z interpretacją niektórych predykatów.

DODATEK

$\underline{\text{T1. } P(X) \rightarrow \Diamond \exists x\, X(x).}$

Dowód[50]:

1. $P(X) \wedge \Box \forall x\, (X(x) \rightarrow Y(x)) \rightarrow P(Y)$ A2,
2. $\forall Y\, (P(X) \wedge \Box \forall x\, (X(x) \rightarrow Y(x)) \rightarrow P(Y))$ *rGen*: 1,

[50] Prezentowane dowody są skracane w ten sposób, że korzysta się w nich z wtórnych tez oraz reguł inferencji zdaniowej logiki $S5_{MJ}$. Gdy stosowane są takie skróty, stosuje się komentarz typu: bo: n, k, gdzie n oraz k oznaczają numery wierszy użytych do otrzymania wiersza, którego dotyczy ów komentarz.

3. $\forall Y\,(P(X) \wedge \Box \forall x\,(X(x) \rightarrow Y(x)) \rightarrow P(Y)) \rightarrow (P(X) \wedge \Box \forall x\,(X(x) \rightarrow (\neg X)(x)) \rightarrow P(\neg X))$ bo: AK1,
4. $P(X) \wedge \Box \forall x\,(X(x) \rightarrow (\neg X)(x)) \rightarrow P(\neg X)$ bo: 3,2,
5. $P(\neg X) \leftrightarrow \sim P(X)$ A1,
6. $P(X) \wedge \Box \forall x\,(X(x) \rightarrow (\neg X)(x)) \rightarrow \sim P(X)$ bo: 5,4,
7. $P(X) \wedge P(X) \rightarrow \sim \Box \forall x\,(X(x) \rightarrow (\neg X)(x))$ bo: 6,
8. $P(X) \rightarrow \sim \Box \forall x\,(X(x) \rightarrow (\neg X)(x))$ bo: 7,
9. $P(X) \rightarrow \Diamond \exists x \sim (X(x) \rightarrow (\neg X)(x))$ RZD: Defpos, Def$\exists\alpha$, 8
10. $\sim (X(x) \rightarrow (\neg X)(x)) \rightarrow X(x) \wedge \sim (\neg X)(x)$ RZD: Def$\wedge$.
11. $(\sim (X(x) \rightarrow (\neg X)(x)) \rightarrow X(x) \wedge \sim (\neg X)(x)) \rightarrow (\exists x\,(\sim (X(x) \rightarrow (\neg X)(x)) \rightarrow \exists x\,(X(x) \wedge \sim (\neg X)(x)))$ bo: Ak1, Ak2, Def$\exists\alpha$,
12. $\exists x\,(\sim (X(x) \rightarrow (\neg X)(x)) \rightarrow \exists x\,(X(x) \wedge \sim (\neg X)(x))$ bo: 11,10,
13. $\Diamond \exists x\,(\sim (X(x) \rightarrow (\neg X)(x)) \rightarrow \Diamond \exists x\,(X(x) \wedge \sim (\neg X)(x))$ rm$\Diamond$: 12,
14. $P(X) \rightarrow \Diamond \exists x\,(X(x) \wedge \sim (\neg X)(x))$ bo: 13,19,
15. $\exists x\,(X(x) \wedge \sim (\neg X)(x)) \rightarrow \exists x\,X(x) \wedge \exists x \sim (\neg X)(x)$ bo: Ak1, Ak2, Def$\exists\alpha$,
16. $\Diamond \exists x\,(X(x) \wedge \sim (\neg X)(x)) \rightarrow \Diamond\,(\exists x\,X(x) \wedge \exists x \sim (\neg X)(x))$ rm$\Diamond$: 15,
17. $\Diamond\,(\exists x X(x) \wedge \exists x \sim (\neg X)(x)) \rightarrow \Diamond \exists x\,X(x) \wedge \Diamond \exists x \sim (\neg X)(x)$[51]
18. $P(X) \rightarrow \Diamond \exists x\,X(x) \wedge \Diamond \exists x \sim (\neg X)(x)$ bo: 17,16,14,
19. $P(X) \rightarrow \Diamond \exists x\,X(x)$ bo: 18.

<u>L1. $\Diamond \exists x\, G(x)$.</u>
Dowód:
1. $\forall X\,(P(X) \rightarrow \Diamond \exists x\,X(x))$ *rGen*: T1,
2. $\forall X\,(P(X) \rightarrow \Diamond \exists x\,X(x)) \rightarrow (P(G) \rightarrow \Diamond \exists x\,G(x))$ bo: AK1,
3. $P(G) \rightarrow \Diamond \exists x\,G(x)$ bo: 2,1,
4. $P(G)$ A3,
5. $\Diamond \exists x\,G(x)$ bo: 3,4.

<u>L2. $G(x) \rightarrow (X(x) \rightarrow P(X))$.</u>
Dowód:
1. $G(x) \rightarrow \forall X\,(P(X) \rightarrow X(x))$ bo: DefG,
2. $\forall X\,(P(X) \rightarrow X(x)) \rightarrow (P(\neg X) \rightarrow (\neg X)(x))$ bo: AK1,
3. $G(x) \rightarrow (P(\neg X) \rightarrow (\neg X)(x))$ bo: 1,2,
4. $P(\neg X) \leftrightarrow \sim P(X)$ A1,
5. $(\neg X)(x) \leftrightarrow \sim X(x)$ Def $\neg$,
6. $G(x) \rightarrow (\sim P(X) \rightarrow \sim X(x))$ bo: 5,4,3,
7. $G(x) \rightarrow (X(x) \rightarrow P(X))$ bo: 6.

---

[51] Formuły postaci $\Diamond\,(A \wedge B) \rightarrow \Diamond A \wedge \Diamond B$ są tezami każdej normalnej logiki modalnej.

<u>L3. $P(X) \rightarrow \Box \forall y\, (G(y) \rightarrow X(y))$.</u>

Dowód:

1. $G(y) \rightarrow \forall X\, (P(X) \rightarrow X(y))$ — bo: DefG,
2. $\forall X\, (P(X) \rightarrow X(y)) \rightarrow (P(X) \rightarrow X(y))$ — bo: AK1,
3. $G(y) \rightarrow (P(X) \rightarrow X(y))$ — bo: 1,2,
4. $P(X) \rightarrow (G(y) \rightarrow X(y))$ — bo: 3,
5. $P(X) \rightarrow \forall y\, (G(y) \rightarrow X(y))$ — bo: Ak2,4,
6. $\Box\, (P(X) \rightarrow \forall y\, (G(y) \rightarrow X(y))$ — *rnec*: 5,
7. $\Box P(X) \rightarrow \Box \forall y\, (G(y) \rightarrow X(y))$ — bo: AM2,6,
8. $P(X) \rightarrow \Box P(X)$ — A4,
9. $P(X) \rightarrow \Box \forall y\, (G(y) \rightarrow X(y))$ — bo: 8,7.

<u>T2. $G(x) \rightarrow G Essx$.</u>

Dowód:

1. $G(x) \rightarrow (X(x) \rightarrow P(X))$ — L2,
2. $P(X) \rightarrow \Box \forall y\, (G(y) \rightarrow X(y))$ — L3,
3. $G(x) \rightarrow (X(x) \rightarrow \Box \forall y\, (G(y) \rightarrow X(y))$ — bo: 1,2,
4. $G(x) \rightarrow \forall X\, (X(x) \rightarrow \Box \forall y\, (G(y) \rightarrow X(y)))$ — bo: AK2,3,
5. $G(x) \rightarrow G(x) \wedge \forall X\, (X(x) \rightarrow \Box \forall y\, (G(y) \rightarrow X(y))$ — bo: 4,
6. $X(x) \wedge \forall Y\, (Y(x) \rightarrow \Box \forall y\, (X(y) \rightarrow Y(y)) \rightarrow X Essx$ — bo: DefEss,
7. $\forall X\, (X(x) \wedge \forall Y\, (Y(x) \rightarrow \Box \forall y\, (X(y) \rightarrow Y(y)) \rightarrow X Essx)$ — *rGen*: 6,
8. $\forall X\, (X(x) \wedge \forall Y\, (Y(x) \rightarrow \Box \forall y\, (X(y) \rightarrow Y(y)) \rightarrow X Essx) \rightarrow (G(x) \wedge \forall Y\, (Y(x) \rightarrow \Box \forall y\, (G(y) \rightarrow Y(y)) \rightarrow G Essx)$ — bo: AK1,
9. $G(x) \wedge \forall Y\, (Y(x) \rightarrow \Box \forall y\, (G(y) \rightarrow Y(y)) \rightarrow G Essx$ — bo: 8,7,
10. $G(x) \rightarrow G Essx$ — bo: 5,9.

<u>L4. $G(x) \rightarrow \Box \exists y\, G(y)$.</u>

Dowód:

1. $G(x) \rightarrow \forall X\, (P(X) \rightarrow X(x))$ — bo: DefG,
2. $\forall X\, (P(X) \rightarrow X(x)) \rightarrow (P(NE) \rightarrow NE(x))$ — bo: AK1,
3. $G(x) \rightarrow (P(NE) \rightarrow NE(x))$ — bo: 1,2,
4. $P(NE)$ — A5,
5. $G(x) \rightarrow NE(x)$ — bo: 3,4,
6. $NE(x) \rightarrow \forall X\, (X Essx \rightarrow \Box \exists x\, X(x))$ — bo: DefNE,
7. $(x) \rightarrow \forall X\, (X Essx \rightarrow \Box \exists x\, X(x))$ — bo: 5,6,
8. $\forall X\, (X Essx \rightarrow \Box \exists x\, X(x)) \rightarrow (G Essx \rightarrow \Box \exists x\, G(x))$ — bo: AK1,
9. $G(x) \rightarrow (G Essx \rightarrow \Box \exists x\, G(x))$ — bo: 7,8,
10. $G(x) \rightarrow \Box \exists y\, G(y)$ — bo: T2,9.

L5. $\Diamond\exists x\, G(x) \rightarrow \Box\exists y\, G(y)$.

Dowód:

1. $G(x) \rightarrow \Box\exists y\ (y)$ — L4,
2. $\exists x\, G(x) \rightarrow \Box\exists y\, G(y)$ — bo: Ak2, Def$\exists\alpha$,
3. $\Diamond\exists x\, G(x) \rightarrow \Diamond\Box\forall y\, G(y)$ — rm$\Diamond$: 2,
4. $\Diamond\Box\exists y\, G(y) \rightarrow \Box\exists y\, G(y)$ — bo: AM3,
5. $\Diamond\exists x\, G(x) \rightarrow \Box\forall y\, G(y)$ — bo: 3,4.

T3. $\Box\exists x\, G(x)$.

Dowód:

1. $\Diamond\exists x\, G(x) \rightarrow \Box\exists x\, G(x)$ — L5,
2. $\Diamond\exists x\, G(x)$ — L1,
3. $\Box\exists x\, G(x)$ — bo: 1,2.

Na gruncie teorii Scotta można dowodzić także następujące tezy i tematy:

L6. $XEssx \wedge YEssx \rightarrow \Box(X=Y)$

Dowód:

1. $XEssx \rightarrow X(x) \wedge \forall Y\, (Y(x) \rightarrow \Box\forall y\, (X(y) \rightarrow Y(y)))$ — bo: DefEss,
2. $YEssx \rightarrow Y(x) \wedge \forall X\, (X(x) \rightarrow \Box\forall y\, (Y(y) \rightarrow X(y)))$ — bo: DefEss,
3. $XEssx \rightarrow \forall Y\, (Y(x) \rightarrow \Box\forall y\, (X(y) \rightarrow Y(y)))$ — bo: 1,
4. $YEssx \rightarrow \forall X\, (X(x) \rightarrow \Box\forall y\, (Y(y) \rightarrow X(y)))$ — bo: 2,
5. $XEssx \rightarrow (Y(x) \rightarrow \Box\forall y\, (X(y) \rightarrow Y(y)))$ — bo: AK1,3,
6. $YEssx \rightarrow (X(x) \rightarrow \Box\forall y\, (Y(y) \rightarrow X(y)))$ — bo: AK1,4,
7. $XEssx \wedge YEssx \rightarrow (X(x) \wedge Y(x) \rightarrow \Box\forall y\, (X(y) \leftrightarrow Y(y)))$ — bo: 6,5,
8. $XEssx \rightarrow X(x)$ — bo: 1,
9. $YEssx \rightarrow Y(x)$ — bo: 2,
10. $XEssx \wedge YEssx \rightarrow \Box\forall y\, (X(y) \leftrightarrow Y(y))$ — bo: 7,8,9,
11. $\forall y\, (X(y) \leftrightarrow Y(y)) \rightarrow X=Y$ — bo: Aeks,
12. $\Box\forall y\, (X(y) \leftrightarrow Y(y)) \rightarrow \Box(X=Y)$ — *rnec*: 11, AM2,
13. $XEssx \wedge YEssx \rightarrow \Box(X=Y)$ — bo: 10,12.

L7. $XEssx \rightarrow \Box\forall y\, (X(y) \rightarrow y=x)$[52]

Dowód:

1. $XEssx \rightarrow X(x) \wedge \forall Y\, (Y(x) \rightarrow \Box\forall y\, (X(y) \rightarrow Y(y)))$ — bo: DefEss,
2. $XEssx \rightarrow \forall Y\, (Y(x) \rightarrow \Box\forall y\, (X(y) \rightarrow Y(y)))$ — bo: 1,

[52] Tezy L6 i L7 znajdujemy po raz pierwszy u Scotta. Autor nie podał jednak dla nich dowodów.

3. $\forall Y\ (Y(x) \rightarrow \Box \forall y\ (X(y) \rightarrow Y(y))) \rightarrow (x=x \rightarrow \Box \forall y\ (X(y) \rightarrow y=x))$ AK1,
4. $XEssx \rightarrow (x=x \rightarrow \Box \forall y\ (X(y) \rightarrow y=x))$ bo: 2,3,
5. $x=x$ bo: Defid,
6. $XEssx \rightarrow \Box \forall y\ (X(y) \rightarrow y=x)$ bo: 4,5.

<u>T4. $\forall x \forall y\ (G(x) \wedge G(y) \rightarrow x=y)$</u>[53]

Dowód:

1. $XEssx \rightarrow \Box \forall y\ (X(y) \rightarrow y=x)$ L7,
2. $X(x) \rightarrow (XEssx \rightarrow \Box \forall y\ (X(y) \rightarrow y=x))$ bo: 1,
3. $\forall X\ (X(x) \rightarrow (XEssx \rightarrow \Box \forall y\ (X(y) \rightarrow y=x)))$ *rGen*: 2,
4. $G(x) \rightarrow (GEssx \rightarrow \Box \forall y\ (G(y) \rightarrow y=x))$ bo: AK1,3
5. $G(x) \rightarrow GEssx$ T2,
6. $G(x) \rightarrow \Box \forall y\ (G(y) \rightarrow y=x)$ bo: 4,5,
7. $G(x) \rightarrow (G(y) \rightarrow y=x)$ bo: AM1, AK1, 6,
8. $\forall x \forall y\ (G(x) \wedge G(y) \rightarrow x=y)$ *rgen*: 7.

<u>T5. $P(X) \wedge P(Y) \rightarrow \Diamond \exists x\ (X(x) \wedge Y(x))$</u>[54]

Dowód:

1. $\forall Y\ (P(X) \wedge \Box \forall x\ (X(x) \rightarrow Y(x)) \rightarrow P(Y))$ *rGen*: A2,
2. $P(X) \wedge \Box \forall x\ (X(x) \rightarrow (\neg Y)(x)) \rightarrow P(\neg Y)$ bo: AK1,
3. $P(X) \wedge \Box \forall x\ (X(x) \rightarrow (\neg Y)(x)) \rightarrow \sim P(Y)$ bo: A1, 2,
4. $P(X) \wedge P(Y) \rightarrow \sim \Box \forall x\ (X(x) \rightarrow (\neg Y)(x))$ bo: 3,
5. $P(X) \wedge P(Y) \rightarrow \sim \Box \forall x\ (X(x) \rightarrow \sim Y(x))$ bo: Def $\neg$, 4,
6. $P(X) \wedge P(Y) \rightarrow \sim \sim \Diamond \sim \forall x\ (X(x) \rightarrow \sim Y(x))$ *RWD*: Def$\Diamond$, 5,
7. $P(X) \wedge P(Y) \rightarrow \Diamond \sim \forall x\ (X(x) \rightarrow \sim Y(x))$ bo: 6,
8. $P(X) \wedge P(Y) \rightarrow \Diamond \exists x \sim (X(x) \rightarrow \sim Y(x))$ *RWD*: Def$\exists\alpha$, 7,
9. $P(X) \wedge P(Y) \rightarrow \Diamond \exists x\ (X(x) \wedge Y(x))$ bo: 8.

<u>T6. $P(X) \wedge P(Y) \rightarrow P(X \bullet Y)$</u>[55]

Dowód:

1. $P(X) \wedge \Box \forall x\ (X(x) \rightarrow Y(x)) \rightarrow P(Y)$ A2,
2. $\forall X \forall Y\ (P(X) \wedge \Box \forall x\ (X(x) \rightarrow Y(x)) \rightarrow P(Y))$ *rGen*: 1,

---

[53] Tezę tę sformułował jako pierwszy Atlas w: *Gödel ontological argument* (maszynopis referatu przedstawionego w Joint Mathematics-Phiolosophy Colloquium, Amherst, Massachusetts, 16.04.1984), ale podał tylko szkic dowodu.

[54] Formuła T5 jest dowodzona przez Atlasa w cyt. art.

[55] Teza T6 (poprzedzona Gödla skrótem Ax1), jest w rękopisie z 1970 r. przyjęta aksjomatycznie. Aksjomat A3 umożliwia jednak przeprowadzenie dowodu tej formuły.

3. $P(G) \wedge \Box\forall x\, (G(x) \rightarrow (X \bullet Y)(x)) \rightarrow P(X \bullet Y)$	bo: AK1,2,
4. $P(G)$	A3,
5. $\Box\forall x\, (G(x) \rightarrow (X \bullet Y)(x)) \rightarrow P(X \bullet Y)$	bo: 3,4,
6. $P(X) \wedge P(Y) \wedge \Box\forall x\, (G(x) \rightarrow (X \bullet Y)(x)) \rightarrow P(X \bullet Y)$	bo: 5,
7. $G(x) \rightarrow \forall X\, (P(X) \rightarrow X(x))$	bo: DefG,
8. $G(x) \rightarrow (P(X) \rightarrow X(x))$	bo: AK1,7,
9. $P(X) \rightarrow (G(x) \rightarrow X(x))$	bo: 8,
10. $P(X) \rightarrow \forall x\, (G(x) \rightarrow X(x))$	bo: AK2,9,
11. $\Box P(X) \rightarrow \Box\forall x\, (G(x) \rightarrow X(x))$	bo: *rnec*: 10, AM2,
12. $P(X) \rightarrow \Box P(X)$	A4,
13. $P(X) \rightarrow \Box\forall x\, (G(x) \rightarrow X(x))$	bo: 12,11,
14. $\forall X\, (P(X) \rightarrow \Box\forall x\, (G(x) \rightarrow X(x)))$	*rGen*: 12,
15. $P(Y) \rightarrow \Box\forall x\, (G(x) \rightarrow Y(x))$	bo: AK1,14,
16. $P(X) \wedge P(Y) \rightarrow \Box\forall x\, (G(x) \rightarrow X(x) \wedge Y(x))$	bo: 13,15,
17. $P(X) \wedge P(Y) \rightarrow P(X \bullet Y)$	bo: 6,16.

T7. $P(X) \rightarrow \Box\exists x\, X(x)$[56]

Dowód:

1. $G(x) \rightarrow \forall X\, (P(X) \rightarrow X(x))$	bo: DefG,
2. $\forall X\, (P(X) \rightarrow X(x)) \rightarrow (P(X) \rightarrow X(x))$	bo: AK1,
3. $G(x) \rightarrow (P(X) \rightarrow X(x))$	bo: 1,2,
4. $\forall x\, (G(x) \rightarrow (P(X) \rightarrow X(x)))$	*rgen*: 3,
5. $\exists x\, G(x) \rightarrow (P(X) \rightarrow \exists x\, X(x))$	bo: Def$\exists\alpha$, 4,
6. $\Box\, (\exists x\, G(x) \rightarrow (P(X) \rightarrow \exists x\, X(x)))$	*rnec*: 5,
7. $\Box\exists x\, G(x) \rightarrow (\Box P(X) \rightarrow \Box\exists x\, X(x))$	bo: AM2,6,
8. $\Box\exists x\, G(x)$	T3,
9. $\Box P(X) \rightarrow \Box\exists x\, X(x)$	bo: 7,8,
10. $P(X) \rightarrow \Box P(X)$	A4,
11. $P(X) \rightarrow \Box\exists x\, X(x)$	bo: 9,10.

ON SOME FORMAL ASSUMPTIONS OF CERTAIN FORMALIZED ONTOLOGICAL ARGUMENTS

Summary

The paper considers some formal limitations in ways of interpretations of certain formalizations of K. Gödel's ontological argument on the existence of the ab-

[56] Tezę 7 po raz pierwszy sformułował oraz podał jej dowód Sobel w: *Gödel's ontological proof*, art. cyt., 241-261.

solute. Submitted formalizations are theories based on the second order modal calculus of predicates S5. The aim of the analysis (done in the framework of semantics of possible worlds) is to point out certain formal properties of semantic structures which can be used as interpretations of chosen formalizations – the properties which are forced by structure of given language itself and by a formal base. In the paper, various interpretations of some notions involved in ontological arguments, admissible from formal point of view, such as necessity, existence, perfection are also described.