Karol Kukuła

Metoda unitaryzacji zerowanej na tle wybranych metod normowania cech diagnostycznych

Acta Scientifica Academiae Ostroviensis nr 4, 5-31

1999

KAROL KUKUŁA

METODA UNITARYZACJI ZEROWANEJ NA TLE WYBRANYCH METOD NORMOWANIA CECH DIAGNOSTYCZNYCH

WSTĘP

Rozpatrzenie zalet, jak również ewentualnych wad, metody unitaryzacji zerowanej (MUZ), rodzi konieczność jej prezentacji na tle innych metod normujących cechy diagnostyczne w możliwie szerokim kontekście. Dla realizacji tego celu niezbędnym wydaje się omówienie i wszechstronna analiza własności procedur normowania najczęściej stosowanych i mających już stałe miejsce w literaturze przedmiotu. Ze względu na znaczną ich liczbę, prezentację procedur normowania ograniczono do wybranych metod. Przedstawiono i omówiono te, które znajdują akceptację wśród badaczy, wykorzystujących aparat wielowymiarowej analizy porównawczej w pracach empirycznych. Z drugiej zaś strony przy wyborze uwzględniono tradycyjny już podział procedur normowania (zob. T. Borys – [3] lub T. Grabiński – [5], s. 33-34), który obejmuje:
- metody standaryzacji;
- metody unitaryzacji;
- przekształcenia ilorazowe;
- metody rangowe.

Normowanie jest działaniem mającym na celu przysposobienie zmiennych diagnostyczne do roli kryteriów cząstkowych w procesie oceny zjawiska złożonego. Dodajmy, iż zwykle cechy diagnostyczne wyrażone są w różnych jednostkach miary oraz odpowiadają im zróżnicowane zakresy liczbowe. Uwzględniając potrzebę pozbycia miar oraz ujednolicenia zakresów liczbowych zmiennych diagnostycznych, metody normujące służą transformacji bezwzględnych wartości na wartości względne. W tym sensie każda z metod normowania (oprócz metody rangowej) jest pewnym przekształceniem ilorazowym, które w końcowym wyniku daje zmienną diagnostyczną transformowaną. Zmienna ta jest pozbawiona miana i ujednolicona, co do zakresu wartości, jakie może przyjmować. Powstaje zatem pewna wątpliwość, czy słuszne jest określenie „metody oparte na przekształceniu ilorazowym", do których zalicza się m. in. metodę zaproponowaną przez D. Strahl [16], E. Nowaka [11], S. Bartosiewicz [1] oraz M.

Cieślak [4], skoro wszystkie wymienione metody (z metodami standaryzacyjnymi i unitaryzacyjnymi włącznie) są skonstruowane w formie ilorazowej. Oznacza to dzielenie oryginalnej wartości cechy bądź różnicy między tą wartością a określonym parametrem (średnią, minimum wszystkich wartości, itp.) przez odpowiednią wartość stałą wyrażoną tą samą jednostką, co zmienna oryginalna. Dlatego też biorąc pod uwagę zaistniały już podział metod normujących (zob. [3] lub [5]), proponuję przyjąć następującą ich specyfikację:

A. metody oparte na formule przekształcenia ilorazowego;

B. metody rangowe.

Metody z grupy A, oparte na formule przekształcenia ilorazowego, przyjmują różne punkty odniesienia, które można określić jako:

1. miary zróżnicowania cech, takie jak:
- odchylenie standardowe zmiennej (ten punkt odniesienia wykorzystują metody standaryzacyjne);
- rozstęp zmiennej (ten punkt odniesienia wykorzystują metody unitaryzacyjne),

2. inne parametry stałe cechy, takie jak:
- średnia arytmetyczna zmiennej;
- maksymalna wartość zmiennej;
- minimalna wartość zmiennej;
- długość wektora realizacji zmiennej;
- suma realizacji zmiennej.

Przy omawianiu metod normowania cech diagnostycznych skoncentrowano uwagę na metodach z grupy A. Zrezygnowano z prezentacji metod należących do grupy B. Bowiem metody rangowe zastosowane do zmiennych mierzonych na skalach ilorazowej i przedziałowej wprawdzie są możliwe do zastosowania, co tłumaczy łatwość przejścia z wyższych skal do niższych, lecz takie postępowanie zawsze łączyć należy z poważną stratą informacji. A oto wybrane formuły normujące z grupy metod A:

$$z_{ij} = \frac{x_{ij} - \overline{X}_j}{S(X_j)}, \qquad S(X_j) \neq 0, \tag{1}$$

$$z_{ij} = \frac{x_{ij}}{S(X_j)}, \qquad S(X_j) \neq 0, \tag{2}$$

$$z_{ij} = \frac{x_{ij}}{\max\limits_i x_{ij} - \min\limits_i x_{ij}}, \qquad \max\limits_i x_{ij} \neq \min\limits_i x_{ij}, \tag{3}$$

$$z_{ij} = \frac{x_{ij} - \overline{X}_j}{\max\limits_i x_{ij} - \min\limits_i x_{ij}}, \quad \max_i x_{ij} \neq \min_i x_{ij}, \tag{4}$$

$$z_{ij} = \frac{x_{ij} - \min\limits_i x_{ij}}{\max\limits_i x_{ij} - \min\limits_i x_{ij}}, \quad \max_i x_{ij} \neq \min_i x_{ij}, \tag{5}$$

$$z_{ij} = \frac{x_{ij}}{\max\limits_i x_{ij}}, \quad \max_i x_{ij} \neq 0, \tag{6}$$

$$z_{ij} = \frac{x_{ij}}{\min\limits_i x_{ij}}, \quad \min_i x_{ij} \neq 0, \tag{7}$$

$$z_{ij} = \frac{x_{ij}}{\overline{X}_j}, \quad \overline{X}_j \neq 0, \tag{8}$$

$$z_{ij} = \frac{x_{ij}}{\sum\limits_{i=1}^{r} x_{ij}}, \quad \sum_{i=1}^{r} x_{ij} \neq 0, \tag{9}$$

$$z_{ij} = \frac{x_{ij}}{\left[\sum\limits_{i=1}^{r} x_{ij}^2\right]^{0,5}}, \quad \sum_{i=1}^{r} x_{ij}^2 > 0. \tag{10}$$

Przeprowadzono obszerną dyskusję własności wybranych procedur z krytycznym ustosunkowaniem się do niektórych opinii prezentowanych przez ich autorów oraz użytkowników tych metod. Szczególne miejsce poświęcono przypadkowi normowania zmiennych diagnostycznych przyjmujących wartości ze zbioru R (chodzi o takie zmienne, które mogą być zarówno liczbami ujemnymi, jak i dodatnimi, a także mogą przyjmować wartość zero). Całość rozważań o metodologii normowania kończy obszerne zestawienie zalet i wad omawianych metod, co stanowi istotną przesłankę trafnego wyboru odpowiedniej metody, właściwej przy zaistnieniu określonych warunków.

1. PODSTAWOWE KRYTERIA OCENY PROCEDUR NORMOWANIA

Normowanie cech ma za zadanie umożliwienie realizacji szeroko zakrojonych badań porównawczych obiektów ze względu na poziom wielu zmiennych (cech) przyjętych jako kryteria oceny rozpatrywanego zjawiska złożonego. Aby zadanie to mogło być należycie wypełnione, nie należy traktować obojętnie własności charakteryzujących poszczególne formuły normalizacyjne. Jest rzeczą niezmiernie ważną, aby stosowane przez praktyków procedury normujące spełniały określone wymogi. Postulaty te można sformułować w kilku punktach:

1. pozbawienie mian (jednostek) w których są wyrażone cechy diagnostyczne;
2. sprowadzenie rzędu wielkości zmiennych diagnostycznych do stanu porównywalności, co oznacza wyrównanie zakresów zmienności cech, a w konsekwencji możliwość ich dodawania;
3. równość rozpiętości przedziałów zmienności wartości wszystkich cech unormowanych (stałość rozstępu z_{ij}) oraz równość dolnej i górnej granicy ich przedziału zmienności, w szczególności chodzi o przedział $[0,1]$;
4. możliwość normowania cech diagnostycznych przyjmujących wartości zarówno dodatnie, jak i ujemne lub tylko ujemne;
5. możliwość normowania cech przyjmujących wartość zero;
6. nieujemność wartości cech unormowanych;
7. istnienie prostych formuł – w ramach danej procedury normalizacyjnej – ujednolicających charakter zmiennych..

Warto podkreślić, że wszystkie formuły normalizacyjne spełniają dwa pierwsze postulaty. Pozostałe postulaty uwzględniają tylko niektóre z formuł i to nie zawsze wszystkie naraz. Można pokusić się o stwierdzenie, że metoda normalizacyjna, która spełnia wymienione postulaty, gwarantuje uniwersalne unormowanie wszystkich cech, niezależnie od ich charakteru, rzędu wielkości czy też znaku.

Założono, iż w analizie porównawczej własności formuł normalizacyjnych brane są pod uwagę stymulanty, jako zmienne najczęściej występujące w badaniach empirycznych. Ponadto formuły dla destymulant i nominant są z reguły pokrewne konstrukcyjnie w stosunku do wzorów dla stymulant i posiadają te same bądź zbliżone do nich własności. W związku z tym wnioski płynące z analizy formuł przeznaczonych dla stymulant można uogólnić na wszystkie formuły.

2. METODY STANDARYZACYJNE

Metody standaryzacyjne stanowią taką formę przekształcenia ilorazowego, w której wartości cechy normowanej względnie tejże cechy pomniejszonej o jej średnią są odnoszone do wartości odchylenia standardowego cechy. Jedną z pierwszych i najczęściej stosowanych metod normujących zmienne diagnostyczne tj. sprowadzających je do liczb niemianowanych z ujednoliconym rzędem wielkości jest metoda standaryzacji oparta na formule (3.1). Metoda ta jest przedstawiona w pracy J. Perkala [15] z 1953 roku. Transformacja zmiennej X_j w zmienną Z_j przebiega następująco:

$$z_{ij} = \frac{x_{ij} - \overline{X}_j}{S(X_j)}, \qquad \text{gdy } X_j \in S$$

lub

$$z_{ij} = \frac{\overline{X}_j - x_{ij}}{S(X_j)}, \qquad \text{gdy } X_j \in D.$$

Łatwo dostrzec, że formuły te czynią zadość postulatom (1) i (2). Jeśli chodzi o postulat (3), to należy zauważyć, iż obie transformacje dają przedziały o różnej rozpiętości dla każdej z unormowanych cech diagnostycznych. W przypadku, gdy zmienna diagnostyczna jest stymulantą, granice przedziału zmienności cechy unormowanej są zależne od czterech parametrów:

$$z_{ij} \in \left[\frac{\min_i x_{ij} - \overline{X}_j}{S(X_j)}, \frac{\max_i x_{ij} - \overline{X}_j}{S(X_j)} \right], \tag{11}$$

także, gdy zmienna diagnostyczna jest destymulantą, granice przedziału zmienności zmiennej unormowanej są zależne od czterech parametrów:

$$z_{ij} \in \left[\frac{\overline{X}_j - \max_i x_{ij}}{S(X_j)}, \frac{\overline{X}_j - \min_i x_{ij}}{S(X_j)} \right], \tag{12}$$

Zatem przedziały, do których należą poszczególne zmienne unormowane Z_j mogą być różne, przy czym rozpiętość tych przedziałów jest określona czterema charakterystykami cechy: $\overline{X}_j$, $S(X_j)$, $\min_i x_{ij}$ oraz $\max_i x_{ij}$.

Zróżnicowania te obrazują wyniki uzyskane w zamieszczonym niżej przykładzie.

3. PRZYKŁAD

Należy unormować trzy zmienne diagnostyczne, będące stymulantami $X_1, X_2, X_3 \in S$ dla pięciu obiektów przy zastosowaniu formuły (1). Realizacje zmiennych diagnostycznych zapisano w postaci wektorów:*)

$$[x_{i1}] = \begin{bmatrix} 12 \\ 7 \\ 0 \\ 16 \\ 25 \end{bmatrix}, \quad [x_{i2}] = \begin{bmatrix} 30 \\ 27 \\ 38 \\ 25 \\ 50 \end{bmatrix}, \quad [x_{i3}] = \begin{bmatrix} 90 \\ 100 \\ 85 \\ 95 \\ 80 \end{bmatrix}.$$

W wyniku normowania za pomocą formuły (1) otrzymano:

$$[z_{i1}] = \begin{bmatrix} 0 \\ -0{,}5942 \\ -1{,}4262 \\ 0{,}4754 \\ 1{,}5450 \end{bmatrix}, \quad [z_{i2}] = \begin{bmatrix} -0{,}4375 \\ -0{,}7656 \\ 0{,}4375 \\ -0{,}9843 \\ 1{,}7499 \end{bmatrix}, \quad [z_{i3}] = \begin{bmatrix} 0 \\ 1{,}4142 \\ -0{,}7071 \\ 0{,}7071 \\ -1{,}4142 \end{bmatrix}.$$

W przypadku wszystkich trzech zmiennych unormowanych stwierdzono różne wartości ich rozstępu (nie większe od 3) oraz różne granice dolne i górne przedziałów zmienności tych zmiennych:

$z_{i1} \in [-1{,}4262,\ \ 1{,}5450]$; $z_{i2} \in [-0{,}9843,\ \ 1{,}7499]$;

$z_{i3} \in [-1{,}4142,\ \ 1{,}4142]$.

Analizując formułę (1) dla stymulant i od niej wywodzącą się – dla destymulant – nasuwa się spostrzeżenie, że w obu przypadkach wartości cechy X_j, poddawanej procedurze normującej, mogą przyjmować wartości ze zbioru R. Brak ograniczeń w postaci warunku o nieujemności normowanej cechy X_j stanowi jedną z istotnych zalet omawianej metody. Formuła (1) spełnia zatem postulaty (4) i (5), co oznacza, że możemy normować zmienne przyjmujące dowolne wartości, w tym również zero. Przy zastosowaniu formuły (1) możemy otrzymywać wartości unormowanych zmiennych zarówno ujemne, zero, jak i dodatnie. Nie jest zatem spełniony postulat (6).

Metodę standaryzacyjną bazującą na formule (1) charakteryzuje stała średnia wartości unormowanych, $\overline{Z}_j = 0$, oraz stała wariancja tych wartości, $S^2(Z_j) = 1$.

Rozważenie postulatu ostatniego upoważnia do wniosku, że w ramach omawianej metody standaryzacyjnej istnieją tylko dwie formuły wartościujące: dla stymulant oraz dla destymulant. Nie spotkałem w literaturze przedmiotu przypadku normowania nominant metodą standaryzacji. Druga z metod standaryzacyjnych wyrażona formułą (2) została zaproponowana przez M. Cieślak [4]. Transformacja zmiennej X_j w zmienną Z_j przebiega wg wzorów:

$$z_{ij} = \frac{x_{ij}}{S(X_j)}, \qquad \text{gdy } X_j \in S$$

oraz

$$z_{ij} = -\frac{x_{ij}}{S(X_j)}, \qquad \text{gdy } X_j \in D.$$

Również i te formuły czynią zadość postulatom (1) i (2).

Wykorzystanie formuły określonej wzorem (2) – dla stymulant – daje zmienną unormowaną w przedziale:

$$z_{ij} \in \left[\frac{\min\limits_i x_{ij}}{S(X_j)}, \frac{\max\limits_i x_{ij}}{S(X_j)} \right], \quad X_j \in S, \qquad (13)$$

zaś zastosowanie odmiany tej formuły, przeznaczonej dla de-stymulant daje zmienną unormowaną w przedziale:

$$z_{ij} \in \left[-\frac{\max\limits_i x_{ij}}{S(X_j)}, -\frac{\min\limits_i x_{ij}}{S(X_j)} \right], \quad X_j \in D. \qquad (14)$$

Jak widać granice przedziału zmienności zmiennej unormowanej są w obu przypadkach zależne od trzech parametrów: $S(X_j)$, $\min\limits_i x_{ij}$ oraz $\max\limits_i x_{ij}$.

Zatem granice przedziału zmienności zmiennej Z_j przy zastosowaniu formuły (2) nie są stałe, lecz zmienne i zależne od rozkładu normowanej cechy X_j. Własności te ilustrują wyniki normowania zmiennych zawartych w przykładzie. Efektem zastosowania formuły (2) w normowaniu tych zmiennych są wektory:

$$[z_{i1}] = \begin{bmatrix} 1,4261 \\ 0,8319 \\ 0 \\ 1,9015 \\ 2,9711 \end{bmatrix}, \quad [z_{i2}] = \begin{bmatrix} 3,2811 \\ 2,9530 \\ 4,1560 \\ 2,7342 \\ 5,4685 \end{bmatrix}, \quad [z_{i3}] = \begin{bmatrix} 12,7279 \\ 14,1421 \\ 12,0208 \\ 13,4350 \\ 11,3137 \end{bmatrix}.$$

Łatwo zauważyć, że rozstęp poszczególnych zmiennych przybiera wartości mniejsze od 3

$$R(Z_1) = 2,9711; \quad R(Z_2) = 2,7343; \quad R(Z_3) = 2,8284.$$

Natomiast granice przedziałów zmienności zmiennych unormowanych są bardzo zróżnicowane. W przypadku wykorzystania tych zmiennych w celu

budowy rankingu obiektów okazuje się, że zmienne unormowane za pomocą formuły (2) „nabywają bardzo zróżnicowane wagi znaczeniowe", niekoniecznie wynikające z rzeczywistego stopnia ich ważności. Porównując zmienne unormowane pierwszą i trzecią zauważymy, iż dolna i górna granica zmienności zmiennej Z_3 kilkakrotnie przewyższa te same parametry zmiennej Z_1.
Z postaci formuły normującej (2) wynika, iż nic nie stoi na przeszkodzie, by normować cechy diagnostyczne o wartościach dodatnich, oraz zero. Formuła ta zadość czyni postulatom (5) i (6), nie spełniając jednocześnie postulatu (4) o możliwości normowania cech o wartościach ujemnych. Bowiem w tym przypadku, w wyniku normowania możemy otrzymywać wartości: zero dla $x_{ij} = 0$ oraz dodatnie dla $x_{ij} > 0$.

W przypadku wyboru tej metody normowania istnieją tylko dwie formuły wartościujące: dla stymulant i dla destymulant. Brak formuły wartościującej dla nominant.

Metodę standaryzacyjną opartą na formule (2) charakteryzują średnie wartości unormowanych na poziomie ilorazu $\frac{\overline{X}_j}{S(X_j)}$ oraz stała wariancja tych wartości, $S^2(Z_j) = 1$.

4. METODY UNITARYZACYJNE

Metody unitaryzacyjne charakteryzują się przyjęciem stałego punktu odniesienia, który stanowi rozstęp zmiennej normowanej, $R(X_j)$. Jego wartość można otrzymać wykorzystując wzór:

$$R(X_j) = \max_i x_{ij} - \min_i x_{ij} \,. \tag{15}$$

Takie podejście sprawia, że rozstęp cechy unormowanej, Z_j, jest stały i wynosi jeden we wszystkich trzech prezentowanych formułach właściwych tej grupie metod. Elementem odróżniającym poszczególne formuły jest licznik jej ułamka, co widać we wzorach (3-5).
Przystępując do kolejnego omawiania metod unitaryzacyjnych, zatrzymamy się przy formule (3). Podobnie jak wszystkie metody normowania z grupy A analizowana formuła spełnia dwa pierwsze postulaty. Badając adekwatność metody względem postulatu (3) zauważamy, że zmienne unormowane wg wzoru (3) mieszczą się w przedziale:

$$z_{ij} \in \left[\frac{\min\limits_i x_{ij}}{R(X_j)}, \frac{\max\limits_i x_{ij}}{R(X_j)} \right] \tag{16}$$

oraz

$$R(Z_j) = 1 . \tag{17}$$

Ze związków (16) i (17) wynika, że zmienne unormowane wg formuły (3) mają stały rozstęp równy jedności, natomiast granice dolna i górna przedziału zmienności zmiennych mogą być różnie położone na osi liczbowej. W jak wysokim stopniu mogą być od siebie oddalone granice przedziałów zmienności cech unormowanych omawianą metodą, świadczą wyniki normowania trzech zmiennych, których realizacje są zamieszczone w przykładzie. A oto wyniki normowania:

$$[z_{i1}] = \begin{bmatrix} 0,48 \\ 0,28 \\ 0 \\ 0,64 \\ 1,00 \end{bmatrix}; \quad [z_{i2}] = \begin{bmatrix} 1,20 \\ 1,08 \\ 1,52 \\ 1,00 \\ 2,00 \end{bmatrix}; \quad [z_{i3}] = \begin{bmatrix} 4,50 \\ 5,00 \\ 4,25 \\ 4,75 \\ 4,00 \end{bmatrix}.$$

We wszystkich przypadkach mamy stały rozstęp zmiennych unormowanych: $R(Z_1) = R(Z_2) = R(Z_3) = 1$. Obserwujemy natomiast dość istotne różnice w usytuowaniu dolnych i górnych granic przedziałów zmienności cech unormowanych:

$$z_{i1} \in [0, \ 1], \ z_{i2} \in [1, \ 2] \quad \text{oraz} \quad z_{i3} \in [4, \ 5].$$

Wydaje się, że uzyskane wyniki normowania sugerują ograniczone możliwości interpretacyjne formuły (3), bowiem przy jej zastosowaniu otrzymuje się bardzo różne przedziały wartościowania. W przypadku zmiennej X_3 obiekt najgorszy otrzymuje ocenę ($z_{53} = 4$), a więc znacznie więcej niż otrzymuje obiekt najlepszy ze względu na zmienną X_1 ($z_{51} = 1$). Co prawda w danym tu przykładzie wartości zmiennych diagnostycznych zostały tak dobrane, by w sposób jaskrawy ukazać nierówność granic przedziałów zmienności cech już unormowanych, niemniej nie można wykluczyć, że takie lub podobne zbiory liczb mogą charakteryzować rzeczywiste zmienne diagnostyczne.

Rozważmy możliwość realizacji kolejnych postulatów. Otóż postulaty (4) i (5) są spełnione przez omawianą metodę, bowiem z pomocą formuły (3) można normować zmienne o wartościach ujemnych, zero oraz dodatnich. W wyniku zastosowania rozpatrywanej formuły normującej otrzymujemy dodatnie wartości, jeśli zmienna normowana jest dodatnia, zero jeśli zmienna normowana jest zerem oraz ujemne wartości, jeśli zmienna normowana jest ujemna. Zatem tylko częściowo spełniony jest postulat (6) o nieujemnych wartościach zmiennej znormalizowanej.

Jeśli chodzi o postulat ostatni – (7), po dokonaniu odpowiednich przekształceń, znaleziono formuły transformacyjne korespondujące z formułą (3) dla zmiennych będących destymulantami oraz nominantami. Dla *destymulant* proponujemy wykorzystać wzór postaci:

$$z_{ij} = \frac{\min\limits_i x_{ij} + \max\limits_i x_{ij} - x_{ij}}{\max\limits_i x_{ij} - \min\limits_i x_{ij}} \quad \text{dla } X_j \in D. \qquad (18)$$

Łatwo zauważyć, że jeśli zmienna diagnostyczna przyjmie wartość największą, tj. $x_{ij} = \max\limits_i x_{ij}$, wówczas $z_{ij} = \frac{\min\limits_i x_{ij}}{R(X_j)}$, jeśli zaś przyjmie wartość najniższą, tj. $x_{ij} = \min\limits_i x_{ij}$, wówczas $z_{ij} = \frac{\max\limits_i x_{ij}}{R(X_j)}$.

Mając na uwadze zachowanie tych samych wartości dla dolnej i górnej granicy przedziału zmienności zmiennej unormowanej, które osiągają stymulanty i destymulanty, skonstruowano formułę wartościującą dla *nominant*:

$$z_{ij} = \begin{cases} \dfrac{\max\limits_i x_{ij}}{\max\limits_i x_{ij} - \min\limits_i x_{ij}} - \dfrac{c_{0j} - x_{ij}}{c_{0j} - \min\limits_i x_{ij}} \text{dla } x_{ij} \le c_{0j} \\ \dfrac{\max\limits_i x_{ij}}{\max\limits_i x_{ij} - \min\limits_i x_{ij}} - \dfrac{x_{ij} - c_{0j}}{\max\limits_i x_{ij} - c_{0j}} \text{dla } x_{ij} > c_{0j} \end{cases}, \qquad (19)$$

gdzie $X_j \in N$ oraz c_{0j} stanowi *wartość nominalną* cechy X_j. Zauważmy, że jeśli do wzoru (19) podstawimy $x_{ij} = \min\limits_i x_{ij}$ lub $x_{ij} = \max\limits_i x_{ij}$, wówczas w obu przypadkach $z_{ij} = \frac{\min\limits_i x_{ij}}{R(X_j)}$. Zatem dla wartości ekstremalnych zmienna unormowana przyjmuje wartości najniższe odpowiadające dolnej granicy przedziału zmienności formuł (3) i (18). Przyjmując zmienną normowaną na poziomie wartości nominalnej ($x_{ij} = c_{0j}$), otrzymujemy $z_{ij} = \frac{\max\limits_i x_{ij}}{R(X_j)}$. Zatem otrzymana wartość zmiennej unormowanej jest najwyższa z możliwych i odpowiada górnej granicy przedziału zmienności właściwego dla formuł (3) oraz (18). Po dokonaniu tych czynności konstrukcyjnych możemy przyjąć, że spełniony jest postulat (7). Oznacza to, że w ramach formuły (3) udaje się uzyskać takie jej przekształcenia, które funkcjonują jako transformaty destymulant i nominant.

Kolejna metoda unitaryzacyjna oparta na formule (4) różni się tym od poprzedniej, że wprowadza w liczniku ułamka odchylenie od średniej wartości zmiennej normowanej pozostawiając w mianowniku rozstęp tej zmiennej. Omawiana metoda spełnia dwa pierwsze postulaty. Rozpatrując postulat (3) zauważamy, że zmienna unormowana wg wzoru (4) przyjmuje wartości z przedziału

$$z_{ij} \in \left[\frac{\min\limits_i x_{ij} - \overline{X}_j}{R(X_j)}, \frac{\max\limits_i x_{ij} - \overline{X}_j}{R(X_j)} \right] \qquad (20)$$

oraz

$$R(Z_j) = 1 . \qquad (21)$$

Zmienna unormowana wg formuły (4) ma zatem stały rozstęp, lecz podobnie jak przy normowaniu formułą (3) ma różnie usytuowane granice swego przedziału zmienności. W jakim stopniu nierówne mogą się okazać granice zmienności cech unormowanych – tym razem formułą (4) – ilustrują trzy zmienne unormowane na bazie informacji zawartych w przykładzie. Efekty normowania zostały przedstawione w postaci wektorów:

$$[z_{i1}] = \begin{bmatrix} 0 \\ -0,20 \\ -0,48 \\ 0,16 \\ 0,52 \end{bmatrix}; \quad [z_{i2}] = \begin{bmatrix} -0,16 \\ -0,28 \\ 0,16 \\ -0,36 \\ 0,64 \end{bmatrix}; \quad [z_{i3}] = \begin{bmatrix} 0 \\ 0,50 \\ -0,25 \\ 0,25 \\ -0,50 \end{bmatrix}.$$

Dla wszystkich trzech cech obserwujemy stały rozstęp zmiennych unormowanych oraz różne granice przedziałów zmienności tych zmiennych: $z_{i1} \in [-0,48;\ 0,52]$, $z_{i2} \in [-0,36;\ 0,64]$, $z_{i3} \in [-0,50;\ 0,50]$.

Warto zauważyć, że granice te nie są stałe, lecz znacznie bardziej zbliżone do siebie w porównaniu do efektów normowania uzyskanych za pomocą formuły (3). Postulaty (4) i (5) są spełnione, bowiem w przypadku stosowania formuły (4) nic nie stoi na przeszkodzie by poddawać normowaniu cechy o wartościach ujemnych, zero i dodatnich. W efekcie otrzymujemy ujemne, zero lub dodatnie wartości cechy unormowanej, nie jest zatem spełniony postulat (6).

Dla *destymulant* formuła wartościująca (3.4) ulega następującej zmianie:

$$z_{ij} = \frac{\overline{X}_j - x_{ij}}{\max\limits_i x_{ij} - \min\limits_i x_{ij}}, \qquad X_j \in D. \tag{22}$$

Zmienne unormowane wg wzoru (3.22) spełniają następującą relację:

$$z_{ij} \in \left[\frac{\overline{X}_j - \max\limits_i x_{ij}}{R(X_j)}, \frac{\overline{X}_j - \min\limits_i x_{ij}}{R(X_j)} \right]. \tag{23}$$

Należy odnotować brak formuły pochodzącej od (4) i wartościującej cechy będące nominantami. Zatem postulat (7) jest tylko po części spełniony.

Kolejną, trzecią już metodą zaliczaną do unitaryzacyjnych jest *metoda unitaryzacji zerowanej* w skrócie (MUZ). MUZ opiera się na formule (3.5) wartościującej stymulanty. Pierwsze wzmianki o tej metodzie można znaleźć w pracach W. J. Wesołowskiego – [20] z 1971 roku i [21] z 1975 roku, R. Kolmana – [6] z 1973 roku oraz T. Borysa – [3] z 1978 roku. Z zagranicznych pozycji wymienić należy pracę B. Bellingera – [2] z 1978 roku.

Unormowane wartości cechy diagnostycznej przy zastosowaniu MUZ stanowią liniową funkcję jej wartości oryginalnych $z_{ij} = F(x_{ij})$. Funkcję tę można zapisać w postaci:

$$F(x_{ij}) = \frac{1}{\max\limits_i x_{ij} - \min\limits_i x_{ij}} x_{ij} - \frac{\min\limits_i x_{ij}}{\max\limits_i x_{ij} - \min\limits_i x_{ij}}. \tag{24}$$

MUZ spełniając postulaty (1) i (2) również zadość czynić postulatowi (3), bowiem zmienne unormowane tą metodą przyjmują wartości z przedziału $[0, \quad 1]$. Zachowują zatem tę samą rozpiętość przedziału zmienności cech unormowanych co formuły (3) oraz (4)

$$\forall X_j \in S \cup D \cup N : R(Z_j) = 1, \tag{25}$$

w przypadku każdej zmiennej diagnostycznej jej stan uznany za najmniej korzystny jest wartościowany liczbą zero (dla stymulant jest to $\min x_{ij}$, zaś dla destymulant $\max x_{ij}$). Natomiast stan uznany za najbardziej korzystny (dla stymulant jest to $\max x_{ij}$, zaś dla destymulant $\min x_{ij}$) jest wartościowany największą liczbą z przedziału zmienności zmiennych unormowanych, tj. jednością.

Wykorzystano dane z przykładu, otrzymując następujące unormowania za pomocą formuły (5):

$$[z_{i1}] = \begin{bmatrix} 0,48 \\ 0,28 \\ 0 \\ 0,64 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad [z_{i2}] = \begin{bmatrix} 0,20 \\ 0,08 \\ 0,52 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad [z_{i3}] = \begin{bmatrix} 0,50 \\ 1 \\ 0,25 \\ 0,75 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Analiza elementów wektorów unormowanych zmiennych wskazuje, że we wszystkich przypadkach występuje ten sam rozstęp równy jeden oraz te same granice dolne i górne przedziałów zmienności. Za pomocą MUZ można normować zmienne o wartościach ujemnych, zero lub dodatnich zadość czyniąc postulatom (4) i (5). W wyniku normowania zawsze otrzymujemy wartość liczbową z przedziału $[0, \ 1]$, zatem spełniony jest także postulat (6). Jak się okazuje, spełniony jest również postulat (7). Dla *destymulant* bowiem wykorzystujemy formułę będącą pewnym przekształceniem (5):

$$z_{ij} = \frac{\max_i x_{ij} - x_{ij}}{\max_i x_{ij} - \min_i x_{ij}}, \qquad X_j \in D. \tag{26}$$

Ze wzoru (26) wynika, że

$z_{ij} = 0 \Leftrightarrow x_{ij} = \max_i x_{ij}$ oraz $z_{ij} = 1 \Leftrightarrow x_{ij} = \min_i x_{ij}$.

W przypadku *nominant* formuła normująca (zob. K. Kukuła [8] lub [9]) przybiera postać:

$$z_{ij} = \begin{cases} \dfrac{x_{ij} - \min_i x_{ij}}{x_{0j} - \min_i x_{ij}} \text{dla } x_{ij} \le c_{0j} \\[2ex] \dfrac{x_{ij} - \max_i x_{ij}}{x_{0j} - \max_i x_{ij}} \text{dla } x_{ij} > c_{0j} \end{cases}, \quad X_j \in N, \tag{27}$$

gdzie c_{0j} jest *wartością nominalną* zmiennej X_j. Zmienna unormowana

$z_{ij} = 1 \Leftrightarrow x_{ij} = c_{0j}$ oraz

$z_{ij} = 0 \Leftrightarrow (x_{ij} = \min_i x_{ij} \vee x_{ij} = \max_i x_{ij})$.

MUZ spełnia zatem wszystkie postulaty stawiane metodom normowania cech diagnostycznych, pretendując tym samym do miana metody uniwersalnej w tym zakresie.

5. POZOSTAŁE PRZEKSZTAŁCENIA ILORAZOWE

Z pozostałych sposobów normowania cech diagnostycznych przynależących do grupy metod A wybrano pięć, kierując się kryteriami selekcji wymienionymi we wstępie do rozdziału. Stałą bazą odniesienia wybranych formuł normujących (6-10) są następujące parametry:

$$\max_i x_{ij}\,,\ \min_i x_{ij}\,,\ \overline{X}_j,\ \sum_{i=1}^{r} x_{ij}\ \text{oraz}\ \left(\sum_{i=1}^{r} x_{ij}^2\right)^{0,5}.$$

W pierwszej kolejności rozważymy formułę (6) zaproponowaną przez D. Strahl w pracy [16] z 1978 roku i opisaną szerzej w jej monografii [17] z 1990 roku. Rozpatrywana formuła spełnia postulaty (1) i (2), należy natomiast nieco dłużej zatrzymać się przy badaniu adekwatności tej formuły z pochodzącymi od niej formułami; dla destymulant (zob. [17], s. 44)

$$z_{ij} = \frac{\min_i x_{ij}}{x_{ij}}, \qquad x_{ij} \neq 0, \qquad X_j \in D \tag{28}$$

oraz dla nominant (zob. [17] s. 45)

$$z_{ij} = \begin{cases} \dfrac{x_{ij}}{c_{0j}} \text{gdy } x_{ij} \le c_{0j}, \\ \dfrac{c_{0j}}{x_{ij}} \text{gdy } x_{ij} > c_{0j}, \end{cases} \qquad \begin{matrix} c_{0j} \neq 0, \\ x_{ij} \neq 0, \end{matrix} \qquad X_j \in N \tag{29}$$

z treścią postulatu (3). We wzorach (28) i (29) zastosowano oznaczenia przyjęte w niniejszej pracy zachowując wiernie treści formuł normujących zaproponowanych przez D. Strahl. Wzory te charakteryzuje duża prostota, co jest ich niewątpliwą zaletą, niemniej należy zauważyć również pewne ich mankamenty. Unormowanè zmienne diagnostyczne wg formuł (6) oraz (28) przyjmują wartości z przedziału

$$z_{ij} \in \left[\frac{\min_i x_{ij}}{\max_i x_{ij}},\ 1\right], \qquad \text{gdy} \quad \begin{matrix} X_j \in S \cup D, \\ \max_i x_{ij} \neq 0. \end{matrix} \tag{30}$$

Natomiast unormowane wartości cech diagnostycznych będących nominantami przy zastosowaniu formuły (29) należą do przedziału

$$z_{ij} \in \left[\min\left\{\frac{\min_i x_{ij}}{c_{0j}},\ \frac{c_{0j}}{\max_i x_{ij}}\right\},\ 1\right],\ X_j \in N. \tag{31}$$

Inne granice przedziału zmienności zmiennej Z_j podaje D. Strahl zarówno w pracy [16] z 1978 roku jak i w swej monografii ([17] s. 45) z 1990 roku utrzymując, że zmienna unormowana wg formuły (6) przyjmuje wartości z przedziału $[0, \ 1]$. Autorka formuły (6) poprawia swój błąd w pracy ([18] s. 25 i 26) z 1996 roku, prawidłowo określając przedział zmienności zmiennych stymulant i destymulant unormowanych tą metodą. Tę wcześniejszą a zarazem błędną informację, powtarzają A. Malina i A. Zeliaś w pracy [10] z 1997 roku. Zmienna unormowana wg (6) może przyjąć wartość zero tylko w takim przypadku, gdy realizacja zmiennej X_j równa jest zeru. Nie upoważnia to jednakże do wniosku, że unormowane wg formuły (6) zmienne należą w każdym przypadku do przedziału $[0, \ 1]$. Formułę (6) charakteryzuje zmienny rozstęp wartości unormowanych. Zmienną jest bowiem dolna granica przedziału zmienności zmiennej Z_j przy stałej granicy górnej, równej w każdym przypadku jeden. Opisany stan rzeczy może doprowadzić w niektórych przypadkach do zjawiska tzw. „krótkiego przedziału", co wyraźnie widać, gdy unormujemy zmienne z przykładu. A oto wyniki normowania przy zastosowaniu formuły (6):

$$z_{i1} = \begin{bmatrix} 0{,}48 \\ 0{,}28 \\ 0 \\ 0{,}64 \\ 1 \end{bmatrix}; \qquad z_{i2} = \begin{bmatrix} 0{,}60 \\ 0{,}54 \\ 0{,}76 \\ 0{,}50 \\ 1 \end{bmatrix}; \qquad z_{i3} = \begin{bmatrix} 0{,}90 \\ 1 \\ 0{,}85 \\ 0{,}95 \\ 0{,}80 \end{bmatrix}.$$

W wyniku normowania wszystkich trzech zmiennych X_1, X_2, X_3 otrzymano zmienne unormowane o różnych rozstępach oraz stałej górnej granicy przedziału zmienności wynoszącej 1:

$$z_{i1} \in [0, \ 1], \qquad z_{i2} \in [0{,}5; \ 1], \qquad z_{i3} \in [0{,}8; \ 1].$$

Na przykładzie tym widać wyraźnie efekt „krótkiego przedziału", co prowadzi do następujących ocen. Najgorszy ze względu na cechę X obiekt jest oceniony liczbą zero, zaś najgorszy ze względu na zmienną X_3 obiekt ma po unormowaniu ocenę równą liczbie 0,8, przy jednoczesnym stałym ograniczeniu od góry wynoszącym jeden. Oznacza to sztuczne przewartościowanie w górę obiektów charakteryzujących się najniższymi wartościami niektórych stymulant oraz najwyższymi wartościami niektórych destymulant.

Rozważając realizację postulatu (4) w kontekście omawianej metody należy podkreślić, iż sama autorka w pracy ([18] s. 23) zakłada, że wartości zmiennej normowanej powinny być dodatnie ($X_j \in R_+$). Co się zaś tyczy cech przyjmujących wartość zero, to można takie realizacje normować pod warunkiem, że $X_j \in S$. Natomiast w przypadku gdy cecha normowana jest destymulantą lub nominantą, to realizacja cechy równa zero nie może być poddana normowaniu formułami odpowiednio (28) lub (29). Z powyższego wynika, że postulat (4) nie jest spełniony, zaś postulat (5) tylko częściowo jest realizowany.

W wyniku normowania cech diagnostycznych o wartościach $x_{ij} \in R_+$ za pomocą formuł (6), (28) i (29) otrzymujemy zawsze wartości unormowane nieujemne. Zatem postulat (6) jest spełniony. Również postulat (7) omawiana metoda realizuje w pełni, gdyż od formuły (6), przeznaczonej do normowania stymulant D. Strahl utworzyła formuły: (28), służącej jako narzędzie normowania destymulant oraz (29), przewidzianej do normowania nominant.

Następną procedurą normowania cech diagnostycznych z grupy metod A jest metoda zaproponowana przez S. Bartosiewicz w pracy [1] z 1976 roku. Metoda ta stanowi lustrzane odbicie metody wcześniej omawianej, autorstwa D. Strahl. Propozycja S. Bartosiewicz sprowadza się do formuły normującej stymulanty, danej wzorem (7). Z formuły tej wynika, że zmienna unormowana dla danego obiektu informuje, ile razy zmienna normowana (oryginalna), opisująca ten obiekt, przewyższa minimalną wartość zmiennej charakteryzującą „obiekt najgorszy". Odwrotnie w metodzie D. Strahl, tu zmienna diagnostyczna unormowana określa, jaki ułamek wartości maksymalnej charakteryzującej „obiekt najlepszy", stanowi wartość cechy opisującej dany obiekt.

Odpowiednikiem wzoru (7), wartościującym destymulanty, jest formuła:

$$z_{ij} = \frac{\max\limits_{i} x_{ij}}{x_{ij}}, \qquad x_{ij} \neq 0, \qquad X_j \in D. \qquad (32)$$

Formuła (7) spełnia postulat (1), w stosunku zaś do realizacji postulatu (2) można mieć pewne wątpliwości. Unormowania bowiem otrzymane przy jej zastosowaniu mogą mieć niejednokrotnie bardzo zróżnicowane zakresy, co w pewnej mierze ilustruje przykład prezentowany na początku rozważań o metodach normowania. Postulat (3) z całą pewnością nie jest spełniony, albowiem zarówno dla stymulant, jak i destymulant zmienne unormowane przyjmują wartości z następującego przedziału

$$z_{ij} \in \left[1,\ \frac{\max\limits_i x_{ij}}{\min\limits_i x_{ij}}\right]. \tag{33}$$

Przedział ten ma stałą dolną granicę równą jedności. Górna granica przedziału jest określona stosunkiem wartości maksymalnej do minimalnej i może przyjmować zarówno wartości niewiele przekraczające jeden jak i wielokrotnie przewyższające tę liczbę. Rozpatrzmy unormowania formułą (7) trzech cech diagnostycznych, występujących w przykładzie. Zwróćmy uwagę, że w wektorze $[x_{i1}]$ jeden z elementów jest zerem i jest to zarazem wartość minimalna, co uniemożliwia unormowanie zmiennej X_1 tą metodą. Aby móc kontynuować analizę porównawczą wyników normowania przy zastosowaniu różnych formuł, w miejsce zera wprowadzamy jeden. Realizacje cechy diagnostycznej X_1 zawiera wektor

$$[x_{i1}] = \begin{bmatrix} 12 \\ 7 \\ 1 \\ 16 \\ 25 \end{bmatrix}.$$

Realizacje zmiennych X_2 i X_3 pozostają bez zmian. Wyniki normowania formułą (7) są następujące:

$$[z_{i1}] = \begin{bmatrix} 12 \\ 7 \\ 1 \\ 16 \\ 25 \end{bmatrix}; \quad [z_{i2}] = \begin{bmatrix} 1{,}20 \\ 1{,}08 \\ 1{,}52 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}; \quad [z_{i3}] = \begin{bmatrix} 1{,}1250 \\ 1{,}2500 \\ 1{,}0625 \\ 1{,}1875 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Zmienne unormowane przyjmują wartości z przedziałów:

$$z_{i1} \in [1,\ 25]; \qquad z_{i2} \in [1,\ 2]; \qquad z_{i3} \in [1,\ 1{,}25].$$

Na przykładzie tym obserwujemy zjawisko występowania zarówno „długich przedziałów”, jak i bardzo „krótkich przedziałów” zmienności zmiennych unormowanych. Świadczą o tym ich rozstępy, kształtujące się odpowiednio: $R(Z_1) = 24$, $R(Z_2) = 1$, $R(Z_3) = 0{,}25$. Wydaje się, iż występujący tu wg S. Bartosiewicz [1] „naturalny system ważenia cech diagnostycznych” nie musi znajdować uzasadnienia w przesłankach merytorycznych, płynących ze znajomości mechanizmu konkretnego zjawiska złożonego.

Postulaty (4) i (5) również nie są spełnione w przypadku omawianej metody, albowiem tym sposobem normowania można się posługiwać tylko w odniesieniu do cech przybierających wartości dodatnie. W wyniku normowania cech o wartościach dodatnich ($x_{ij} > 0$) otrzymujemy unormowania również dodatnie, co pozostaje w zgodzie z postulatem (6). Z uwagi na to, że istnieją formuły wartościujące destymulanty i nominanty, korespondujące z formułą (7) można przyjąć, iż omawiana metoda normowania zmiennych spełnia postulat (7).

Kolejną metodę normowania zmiennych stanowi propozycja E. Nowaka zawarta w pozycjach [11] i [12]. Metoda ta opiera się na formule (8), skonstruowanej celem normowania stymulant. Bazą odniesienia w tej metodzie jest wartość średnia cechy normowanej. W celu normowania zmiennych będących destymulantami należy wykorzystać wzór:

$$z_{ij} = \frac{\overline{X}_j}{x_{ij}}, \qquad x_{ij} \neq 0, \qquad X_j \in D. \tag{34}$$

Natomiast nieznana jest formuła wartościowania nominant, korespondująca ze wzorem (8) lub (34). Zmienna unormowana wg wzoru (3,8) posiada stałą wartość średniej, $\overline{Z}_j = 1$, oraz wariancję daną wzorem:

$$S(Z_j) = \left[\frac{S(X_j)}{\overline{X}_j}\right]^2, \qquad \overline{X}_j \neq 0. \tag{35}$$

Zmienne unormowane omawianą metodą spełniają postulaty (1) i (2). Rozpatrując postulat (3) należy pamiętać, że zmienne unormowane wg wzoru (8) – przypadek stymulant – przyjmują wartości z przedziału

$$z_{ij} \in \left[\frac{\min\limits_i x_{ij}}{\overline{X}_j}, \frac{\max\limits_i x_{ij}}{\overline{X}_j}\right], \qquad X_j \in S. \tag{36}$$

Zmienna unormowana wg wzoru (34) – przypadek destymulant – przyjmuje wartości z przedziału

$$z_{ij} \in \left[\frac{\overline{X}_j}{\max\limits_i x_{ij}}, \frac{\overline{X}_j}{\min\limits_i x_{ij}}\right], \qquad X_j \in D. \tag{37}$$

Granice przedziału zmienności cechy unormowanej wg formuł (8) lub (34) są zależne od trzech parametrów: $\min\limits_i x_{ij}$, $\max\limits_i x_{ij}$ oraz $\overline{X}_j$. Nie można zatem przyjąć, że granice przedziałów zmienności (dolna i górna) oraz rozstępy są równe dla wszystkich cech zakwalifikowanych do zbioru cech diagnostycznych. W jakim stopniu mogą się różnić między sobą omawiane wielkości, w przypadku normowania formułą (8), można się przekonać.

korzystając z danych zamieszczonych w przykładzie. Wyniki normowania są następujące:

$$[z_{i1}]=\begin{bmatrix}1\\0,5833\\0\\1,3333\\2,0833\end{bmatrix};\quad [z_{i2}]=\begin{bmatrix}0,8824\\0,7941\\1,1176\\0,7353\\1,4706\end{bmatrix};\quad [z_{i3}]=\begin{bmatrix}1\\1,1111\\0,9444\\1,0556\\0,8889\end{bmatrix},$$

$$z_{i1}\in[0,\ 2,0833];\ z_{i2}\in[0,7353,\ 1,4706];\ z_{i3}\in[0,8889,\ 1,1111],$$

$$R(Z_1)=2,0833,\quad R(Z_2)=0,7353,\quad R(Z_3)=0,2222.$$

Okazuje się, że różnią się między sobą i to dość znacznie dolne i górne granice przedziałów zmienności zmiennych unormowanych, a także rozstępy tych zmiennych. Również i w tym przypadku mamy do czynienia z „krótkimi przedziałami" zmienności cech unormowanych. Zatem postulat (3) nie jest spełniony.

Przechodząc do kolejnych postulatów stawianych procedurom normowania stwierdzamy, że warunki (4) i (5) nie są spełnione przez omawianą metodę, bowiem formułą (8) można normować wartości dodatnie oraz zero. Formułą (34) – przypadek destymulant – można poddawać normowaniu tylko cechy o wartościach dodatnich z wyłączeniem zera. W wyniku normowania cech dodatnich otrzymujemy unormowania dodatnie, co zadość czyni postulatowi (6). Postulat (7) jest spełniony tylko częściowo, gdyż istnieje wprawdzie formuła pokrewna w stosunku do (8), normująca zmienne będące destymulantami, brak jednakże formuły wartościującej nominanty i korespondującej jednocześnie z formułami (8) i (34).

Prezentowana kolejno metoda normowania opiera się na przekształceniu danym wzorem (9). Formuła (9) jest wzmiankowana w pracy M. Walesiaka ([19] s. 38) i była wykorzystana w badaniach empirycznych przez K. Kukułę w pracy [7] z 1975 roku. Wydaje się, że normowanie tą metodą jest celowe, gdy sumowanie zmiennej diagnostycznej (po obiektach) daje sensowny wynik, który można zinterpretować. W takim przypadku efektem operacji przekształcającej jest otrzymanie współczynników struktury. Przykładem takiego zastosowania mogą być przestrzenne badania produkcji roślinnej lub zwierzęcej. W badaniach tych sumowanie zbiorów np. pszenicy i osobno buraka lub ziemniaka ma sens, zaś w efekcie zastosowania formuły (9) otrzymujemy przestrzenną strukturę produkcji pszenicy lub buraka, ziemniaka itp. Poszczególne udziały w tej strukturze stanowią naturalny sposób wartościowania, gdyż w przypadku badania produkcji roślinnej poszczególne jej składowe (produkcja pszenicy, buraka, ziemniaka, itp.) są traktowane jako stymulanty.

Powstaje pytanie, czy można sobie wyobrazić taką strukturę przestrzenną, której wyższe udziały negatywnie oddziaływują na badane zjawisko złożone? Łatwo zauważyć, że chodzi tu o destymulanty. Jeśli badanym zjawiskiem złożonym jest stopień zachowania czystości środowiska naturalnego, to składowe przestrzennej struktury emisji pyłów lub przestrzennej struktury ścieków nieoczyszczonych można uznać za destymulanty. Ich wyższe udziały muszą być odpowiednio nisko wartościowane. Proponujemy formułę pochodzącą od (9), właściwą dla normowania destymulant, w następującej postaci:

$$z_{ij} = \frac{\max\limits_i x_{ij} + \min\limits_i x_{ij} - x_{ij}}{\sum\limits_{i=1}^{r} x_{ij}}, \quad \sum_{i=1}^{r} x_{ij} \neq 0, \; X_j \in D. \tag{38}$$

Zauważmy, że dla $x_{ij} = \min\limits_i x_{ij}$ otrzymujemy $z_{ij} = \frac{\max\limits_i x_{ij}}{\sum\limits_{i=1}^{r} x_{ij}}$, zaś dla $x_{ij} = \max\limits_i x_{ij}$ otrzymujemy $z_{ij} = \frac{\min\limits_i x_{ij}}{\sum\limits_{i=1}^{r} x_{ij}}$.

Rozpatrując dwa pierwsze postulaty stawiane metodom normowania stwierdzamy, że formuła o wzorze (9) postulaty te spełnia. Zatrzymajmy się nieco przy postulacie (3). Z analizy formuł (9) i (38) wynika, że zmienne unormowane za pomocą tych wzorów przyjmują wartości z przedziału

$$z_{ij} \in \left[\frac{\min\limits_i x_{ij}}{\sum\limits_{i=1}^{r} x_{ij}}, \frac{\max\limits_i x_{ij}}{\sum\limits_{i=1}^{r} x_{ij}} \right]. \tag{39}$$

Zmienne z_{ij} w ten sposób unormowane mają zatem zmienne rozstępy:

$$R(Z_j) = \frac{\max\limits_i x_{ij} - \min\limits_i x_{ij}}{\sum\limits_{i=1}^{r} x_{ij}} = \frac{R(X_j)}{\sum\limits_{i=1}^{r} x_{ij}}. \tag{40}$$

Konstatujemy zatem, że postulat (3) nie w pełni jest realizowany przez formuły (9) i (38). Świadczą o tym wyniki normowania cech diagnostycznych zamieszczonych w przykładzie.

$$[z_{i1}] = \begin{bmatrix} 0{,}2000 \\ 0{,}1167 \\ 0 \\ 0{,}2267 \\ 0{,}4167 \end{bmatrix}; \quad [z_{i2}] = \begin{bmatrix} 0{,}1765 \\ 0{,}1588 \\ 0{,}2235 \\ 0{,}1471 \\ 0{,}2941 \end{bmatrix}; \quad [z_{i3}] = \begin{bmatrix} 0{,}2000 \\ 0{,}2222 \\ 0{,}1889 \\ 0{,}2111 \\ 0{,}1778 \end{bmatrix},$$

$$z_{i1} \in [0,\ 0{,}4167];\ z_{i2} \in [0{,}1471,\ 0{,}2941];\ z_{i3} \in [0{,}1778,\ 0{,}2222],$$

$$R(Z_1) = 0{,}4167, \qquad R(Z_2) = 0{,}1470, \qquad R(Z_3) = 0{,}0444.$$

Zauważmy, że dolne granice przedziałów zmienności zmiennej unormowanej nie schodzą poniżej zera, zaś górne nie przekraczają liczby 1. Zauważyć również trzeba zmieniające się wartości rozstępu poszczególnych zmiennych unormowanych, które jednak nie mogą przekroczyć liczby jeden. Ponadto, wektory $[z_{i1}]$, $[z_{i2}]$ oraz $[z_{i3}]$ są strukturami, w których wartości elementów sumują się do jedności, wszystkie zaś elementy przyjmują wartości nieujemne ($z_{ij} \geq 0$), ponieważ $\sum_{i=1}^{r} z_{ij} = 1$, średnia wartość każdej zmiennej unormowanej jest stała i równa odwrotności liczby badanych obiektów $\left(\bar{Z}_j = \frac{1}{r}\right)$.

Formułami (9) oraz (38) można normować tylko te zmienne diagnostyczne, które przyjmują wartości nieujemne. Oznacza to spełnienie postulatu (5), podczas gdy postulat (4) pozostaje niespełniony. W wyniku zastosowania formuł normujących danych wzorami (9) i (38) otrzymujemy zawsze unormowania nieujemne, co zadość czyni warunkowi (6). Również postulat (7) jest w pełni realizowany, bowiem obok formuł dla stymulant i destymulant, istnieje również propozycja wartościowania normującego nominanty. Propozycję tę zamieszczono w rozdziale poświęconym nominantom.

Ostatnią formułą normalizacyjną, którą chcemy omówić, jest formuła normowania stymulant zapisana wzorem (10), wzmiankowana w pracy M. Walesiaka ([19] s. 38). Przekształcenie (10) polega na każdorazowej relatywizacji wartości cechy x_{ij} do długości odpowiedniego wektora $|X_j|$. Dla normowania destymulant proponujemy wykorzystać formułę o wzorze:

$$z_{ij} = \frac{\max_i x_{ij} + \min_i x_{ij} - x_{ij}}{\left[\sum_{i=1}^{r} x_{ij}\right]^{0,5}}, \qquad \left[\sum_{i=1}^{r} x_{ij}\right]^{0,5} \neq 0, \quad X_j \in D. \qquad (41)$$

Zauważmy, że dla $x_{ij} = \min_i x_{ij}$ otrzymujemy $z_{ij} = \frac{\max_i x_{ij}}{\left[\sum_{i=1}^{r} x_{ij}\right]^{0,5}}$, zaś dla $x_{ij} = \max_i x_{ij}$ dostajemy $z_{ij} = \frac{\min_i x_{ij}}{\left[\sum_{i=1}^{r} x_{ij}\right]^{0,5}}$.

Podobnie jak w przypadku innych formuł normujących również w przypadku (10) stwierdzamy spełnienie postulatów (1) i (2). Z uwagi na to, że zmienne unormowane wg wzorów (10) lub (41) przyjmują wartości z przedziału

$$z_{ij} \in \left[\frac{\min_i x_{ij}}{\left[\sum_{i=1}^{r} x_{ij}\right]^{0,5}}, \frac{\max_i x_{ij}}{\left[\sum_{i=1}^{r} x_{ij}\right]^{0,5}} \right]. \tag{42}$$

postulat (3) nie jest spełniony.
Dodajmy, że rozstęp cech unormowanych dany wzorem

$$R(Z_j) = \frac{\max_i x_{ij} - \min_i x_{ij}}{\left[\sum_{i=1}^{r} x_{ij}\right]^{0,5}} = \frac{R(X_j)}{|X_j|}. \tag{43}$$

nie jest stały i zmienne są również granice dolna i górna ich przedziałów zmienności. Spostrzeżenia te potwierdzają wyniki normowania cech diagnostycznych wziętych z przykładu:

$$[z_{i1}] = \begin{bmatrix} 0,3662 \\ 0,2136 \\ 0 \\ 0,4882 \\ 0,7628 \end{bmatrix}; \quad [z_{i2}] = \begin{bmatrix} 0,3811 \\ 0,3430 \\ 0,3176 \\ 0,4827 \\ 0,6351 \end{bmatrix}; \quad [z_{i3}] = \begin{bmatrix} 0,4458 \\ 0,4954 \\ 0,4211 \\ 0,4706 \\ 0,3963 \end{bmatrix}.$$

$$z_{i1} \in [0,\ 0,7628]; \quad z_{i2} \in [0,3176,\ 0,6351]; \quad z_{i3} \in [0,3963,\ 0,4954].$$

$$R(Z_1) = 0,7628, \qquad R(Z_2) = 0,3175, \qquad R(Z_3) = 0,0991.$$

Analiza uzyskanych wyników normowania formułą (10) pokazuje, że dość wyraźnie różnią się między sobą rozstępy unormowanych cech, w żadnym jednak przypadku rozstępy te nie przekraczają liczby jeden. Podobnie dolne i górne granice przedziałów zmienności są różnie usytuowane na osi liczbowej, ale nie wychodzą poza przedział $[0, 1]$.

Z uwagi na to, że omawianą metodą można normować tylko zmienne przyjmujące wartości nieujemne, postulat (5) jest spełniony, podczas gdy postulat (4) nie znajduje potwierdzenia. W wyniku transformacji cech diagnostycznych wzorami (10) i (41), zmienne unormowane, przyjmując wartości nieujemne, spełniają postulat (6). Również ostatni postulat jest realizowany przez rozpatrywaną metodę, bowiem obok formuł dla stymulant i destymulant istnieje formuła wartościująca nominanty.

6. DYLEMATY ZWIĄZANE Z WYBOREM METODY NORMOWANIA

W artykule tym starano się sprecyzować, a następnie poddać analizie własności dziesięciu wybranych formuł normujących cechy diagnostyczne (1-10), głównie pod kątem sformułowanych postulatów. Aby doprowadzić do zbiorczego ich porównania, zbudowano tablicę 1, w której w sposób dychotomiczny określono zgodność formuł normowania w stosunku do postulatów (1–7) oraz posiadania względnie nie posiadania stałych wartości parametrów, charakteryzujących zmienne unormowane. Z analizy zawartości tej tabeli wynika, iż żadna z formuł przekształceniowych nie posiada samych plusów. Najwięcej jednak pozytywów wiąże się z formułą (5), charakterystyczną dla MUZ. W dalszej kolejności plasują się formuły (1) i (9). Gradacji tej nie należy kojarzyć jako jednoznacznego wskazania metod najlepszych. Bowiem o wyborze metody w konkretnych zastosowaniach mogą decydować dodatkowe kryteria (tu nie uwzględnione), bądź też spełnienie lub niespełnienie jednego tylko z wymienionych postulatów.

Zauważmy, na podstawie wyników zawartych w tab. 5, że najtrudniejszym do spełnienia wymogiem w kontekście rozważanych formuł, okazał się postulat (3). Postulat (3) jest uszczegółowionym rozwinięciem postulatu (2), który tu traktujemy jako spełniony przez wszystkie formuły, bardziej w sensie intencjonalnym. Z wszystkich formuł branych pod uwagę, tylko MUZ – formuła (5) – daje unormowania w stałym przedziale $[0, 1]$. Względnie ustabilizowane – wg przyjętych kryteriów – wyniki normowania uzyskano przy transformacjach opisanych wzorami (1), (4), (9) i (10).

Istnieje wiele trudności ze wskazaniem najlepszej metody odpowiadającej celom i zakresowi konkretnej analizy porównawczej. Na podstawie spostrzeżeń dokonanych w kontekście omawianych formuł transformacyjnych podejmujemy się próby sformułowania kilku wskazówek o charakterze aplikacyjnym.

Duży wpływ na rezultaty porządkowania liniowego obiektów a tym samym na budowę ich rankingu ma wybór odpowiedniej formuły normującej. Przy czym w tym przypadku zaleca się wybór tych formuł, które dają stabilne bądź prawie stabilne przedziały zmienności zmiennych unormowanych, ze szczególnym wskazaniem MUZ.

Nieco innego wyboru metod można dokonać, mając na celu modelowanie zjawisk złożonych. Tu często wykorzystuje się stałość parametrów charakteryzujących zmienne unormowane (por. E. Nowak [14] s. 80-81). W takich przypadkach można zalecać formuły (1), (8) lub (9).

W przypadkach, w których sumowanie poszczególnych wartości realizacji zmiennych po obiektach przejawia sens, można zastosować formułę (9). W wyniku tego zabiegu otrzymujemy obiekty przestrzenne, które zawierają dodatkową informację o badanym zjawisku. Tego typu normowania można z powodzeniem stosować w przestrzennych analizach produkcji przemysłowej, rolniczej itp.

Wreszcie kilka uwag o normowaniu zmiennych, przyjmujących wartości ujemne. Należy zauważyć, iż stosunkowo rzadko napotykamy konieczność transformowania zmiennych przyjmujących wartości zarówno dodatnie jak i ujemne. Niemniej istnieje kilka przypadków, w których konieczność ta wystąpi. Są to zwykle badania porównawcze, dotyczące kondycji finansowej firm, banków i innych instytucji. W badaniach tych nie sposób pominąć kategorii określonej mianem *wynik finansowy*, który może przybierać wartości tak dodatnie, jak i zero czy też wartości ujemne. Musimy zatem dobrać taką metodę normowania, która transformuje zmienne diagnostyczne o wszystkich możliwych wartościach $(X_j \in R)$. W tej sytuacji mogą być wykorzystane formuły (1), (4) i (5).

Tablica 1

Formuła normująca	Postulaty stawiane formułom normującym							Stałość parametrów zmiennych unormowanych	
	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	$\bar{Z}_j$	$S^2(Z_j)$
(1)	+	+	–	+	+	–	–	+	+
(2)	+	+	–	–	+	+	–	–	+
(3)	+	+	–	–	+	+	+	–	–
(4)	+	+	–	+	+	–	–	+	–
(5)	+	+	+	+	+	+	+	–	–
(6)	+	+	–	–	–	+	+	–	–
(7)	+	+	–	–	–	+	+	–	–
(8)	+	+	–	–	+	+		+	–

(9)	+	+	–	–	+	+	+	+	–
(10)	+	+	–	–	+	+	+	–	–

Legenda:

(+) należy kojarzyć ze spełnieniem postulatu, bądź ze stałością parametru charakteryzującego zmienną unormowaną

(–) należy kojarzyć z niespełnieniem postulatu, bądź z niestałością parametru charakteryzującego zmienną unormowaną

Źródło: Opracowanie własne

LITERATURA

[1] S. Bartosiewicz, *Propozycja metody tworzenia zmiennych syntetycznych*, „Prace Naukowe Akademii Ekonomicznej we Wrocławiu", 1976, nr 84

[2] B. Bellinger, *Quantifizierung, Bewertung und Bestgestaltung Betrieblicher Rechtsbeziehungen, Berliner Wissenschaftliche Geselschaft*, „Jahrbuch", Berlin 1978, t. V

[3] T. Borys, *Metody normowania cech w statystycznych badaniach porównawczych*, „Przegląd Statystyczny" 1978, z. 2

[4] M. Cieślak, *Modele zapotrzebowania na kadry kwalifikacyjne*, PWN, Warszawa 1976

[5] T. Grabiński, *Wielowymiarowa analiza porównawcza w badaniach dynamiki zjawisk ekonomicznych*, „Zeszyty Naukowe Akademii Ekonomicznej w Krakowie", Seria specjalna: „Monografie", nr 61, Kraków 1984

[6] R. Kolman, *Ilościowe określenie jakości*, PWE, Warszawa 1973

[7] K. Kukuła, *Przestrzenne badania różnic w strukturze zjawisk społeczno-ekonomicznych*, [w:] „Metody statystyczne w badaniach społeczno-ekonomicznych", praca zbiorowa pod red. K. Zająca, Wrocław - Warszawa - Kraków - Gdańsk

[8] K. Kukuła, *Ponownie o problemie wartościowania nominant*, „Zeszyty Naukowe Akademii Rolniczej", 1997, Seria: „Ekonomika"

[9] K. Kukuła, *Propozycja metod wartościowania nominant*, [w:] „Metody i Zastosowania Badań Operacyjnych", cz. II, praca zbiorowa pod redakcją T. Trzaskalika, Katowice 1998

[10] A. Malina, A. Zeliaś *Taksonomiczna analiza przestrzennego zróżnicowania jakości życia ludności w Polsce w 1994 roku*, „Przegląd Statystyczny" 1997, z. 1

[11] E. Nowak, *Syntetyczne mierniki i modele poziomu produkcji zwierzęcej*, „Wiadomości Statystyczne" 1977, nr 12

[12] E. Nowak, *Propozycja prostej metody konstruowania miernika rozwoju i jego wykorzystania do badań regresyjnych*, „Przegląd Statystyczny" 1979, z. 1-2

[13] E. Nowak, *Metodyka statystycznych analiz porównawczych efektywności obiektów rolniczych*, „Prace Naukowe Akademii Ekonomicznej we Wrocławiu", nr 292, Seria: „Monografie i opracowania", nr 25, 1985

[14] E. Nowak, *Problem informacji w modelowaniu ekonometrycznym*, PWN, Warszawa 1990

[15] J. Perkal, *O wskaźnikach antropologicznych*, „Przegląd antropologiczny" 1953, t. 19

[16] D. Strahl, *Propozycja konstrukcji miary syntetycznej*, „Przegląd Statystyczny" 1978, z. 2

[17] D. Strahl, *Metody programowania rozwoju społeczno-gospodarczego*, PWE, Warszawa 1990

[18] D. Strahl, *Modele zarządzania bankiem (model triada)*, Wyd. AE we Wrocławiu, Wrocław 1996

[19] M. Walesiak, *Metody analizy danych marketingowych*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 1996

[20] W. J. Wesołowski, *Ilościowe metody oceny jakości*, Materiały konferencji „Cele i metody mierzenia jakości", PTE, Warszawa 1971

[21] W. J. Wesołowski, *Programowanie nowej techniki*, PWN, Warszawa 1975

STRESZCZENIE

W artykule przedstawiono metodę unitaryzacji zerowanej jako jedną z wybranych dziesięciu metod normowania cech diagnostycznych.
Przy prezentacji tej metody omówiono własności pozostałych, dokonując jednocześnie odpowiednich porównań. Całość rozważań ma na celu wskazanie metod, które są właściwe w określonych sytuacjach badawczych.

– The Method of Zero Unitarization
– **in the Background of Chosen Normalization Methods**
– Summary
– The paper presents one of chosen ten methods of normalization of diagnostic features known as zero unitarization.
– The prezentation includes the discussion of characteristics of unitarization method in comparizon with other methods. The main objective is to show which method should be used in a given research situation.