Adam Lankosz

Konstrukcje krzywych stożkowych w odwzorowaniu M

Acta Scientifica Academiae Ostroviensis nr 23, 65-72

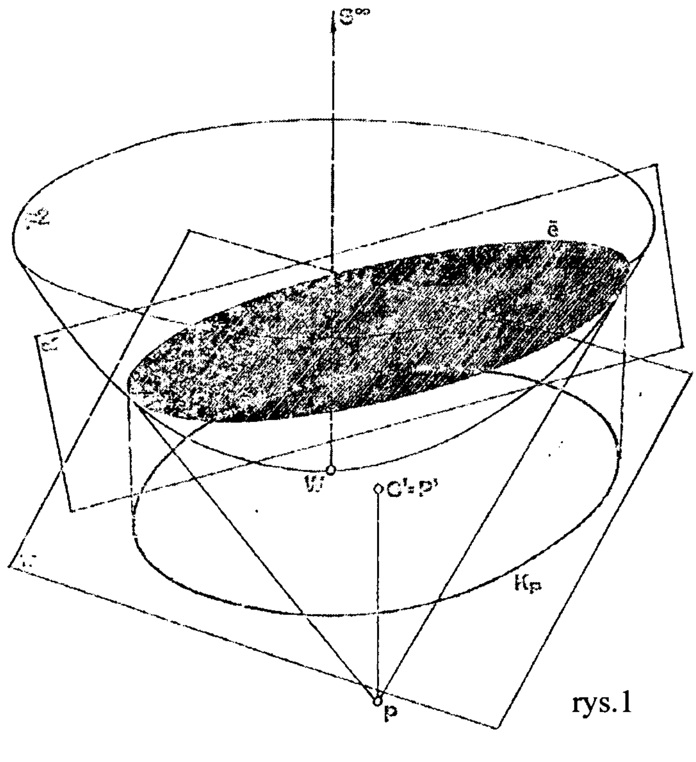
2006

Adam Lankosz

KONSTRUKCJE KRZYWYCH STOŻKOWYCH W ODWZOROWANIU M

1.Definicja odwzorowania M

W zeszytach naukowych Opuscula Mathematica opublikowałem artykuł p.t. „Biegunowo-stereograficzne odwzorowanie przestrzeni $\boldsymbol{R}^3$ na płaszczyźnie" [1]. W w/w odwzorowaniu wykorzystano zasadę biegunowości względem kwadryk oraz własności rzutu stereograficznego powierzchni. Omawiane w pracy odwzorowanie przestrzeni $\boldsymbol{R}^3$ realizuje się za pomocą paraboloidy obrotowej $\boldsymbol{F}^2$, płaszczyzny π (rzutni), stycznej do $\boldsymbol{F}^2$ w jej wierzchołku właściwym $\boldsymbol{W}$ i środka rzutów $\boldsymbol{S}$, będącego niewłaściwym wierzchołkiem (środkiem) paraboloidy $\boldsymbol{F}^2$ /rys.1/.



rys.1

Każdemu punktowi P przestrzeni R^3 przypo- rządkowana jest płaszczyzna α, biegunowa względem F^2. Przecina ona paraboloidę F^2 w stożkowej e, rzeczywistej niezdegenerowanej lub zdegenerowanej albo urojonej. Rzutem stereograficznym stożkowej e z punktu S^∞ na płaszczyźnie (rzutni) π, jest okrąg K_P rzeczywisty niezdegenerowany lub zdegenerowany albo urojony [2]. Tak więc w odwzorowaniu M obrazem punktu jest okrąg, obrazem prostej – pęk okręgów, obrazem płaszczyzny – łańcuch pęków okręgów.

$$M(P) = K\,p \qquad M(p) = \Pi\,p \qquad M(\alpha) = \Psi\,\alpha$$

2.Twierdzenie 1

Niech dana będzie niezdegenerowana stożkowa S^2_α leżąca w płaszczyźnie α, nieprostopadłej do rzutni π.

Odwzorowaniem M tej stożkowej jest:

/1/ figura składająca się z okręgów K_A , K_B , K_C .., będących obrazami punktów A, B, C....stożkowej S^2_α

/2/ środki okręgów leżą na stożkowej niezdegenerowanej S^2_π, będącej rzutem prostokątnym na rzutnię π stożkowej S^2_α

/3/ każdy z wymienionych okręgów należy do łańcucha okręgów Ψ_α

Dowód:

Pierwsza i trzecia część twierdzenia jest oczywista.

Ad./2/ Płaszczyzna α, biegunowa punktu właściwego P, przecina paraboloidę F^2 w stożkowej e. Prosta l wzajemnie biegunowa względem paraboloidy F^2 do prostej niewłaściwej p^∞ płaszczyzny α, przechodzi przez punkt P i jest średnicą paraboloidy F^2,sprzężoną z płaszczyzną α. Jeżeli płaszczyzna α przecina kwadrykę F^2 w stożkowej właściwej e, to średnica l sprzężona z płaszczyzną α przechodzi przez środek O stożkowej e [3]. Ponieważ punkty P i O leżą na prostej l, przechodzącej przez środek S^∞ paraboloidy F^2 (l jest prostopadła do rzutni π), ich rzuty O' i P'na rzutni π jednoczą się ($O' = P'$).

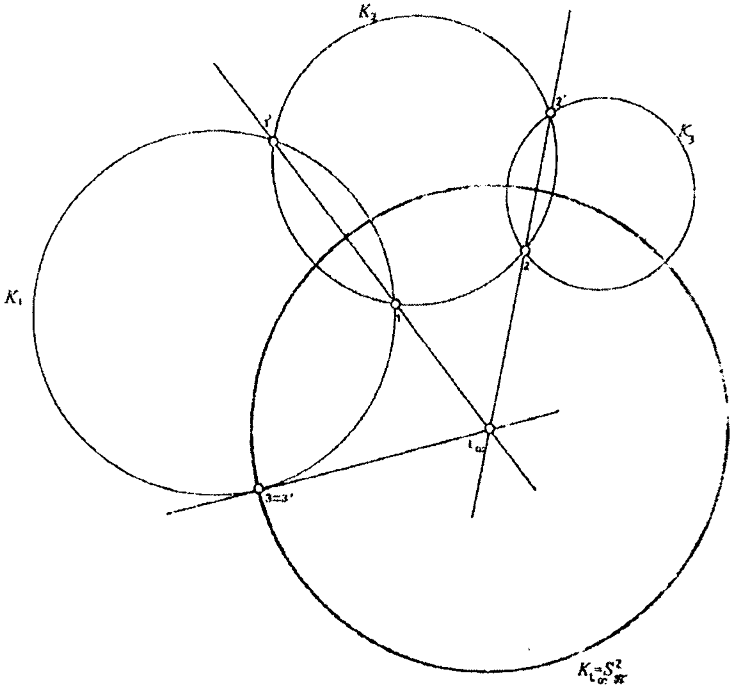
c.b.d.o.

W szczególnym przypadku, gdy stożkowa S^2_α należy jednocześnie do płaszczyzny α i do paraboloidy F^2, twierdzenie 1 otrzymuje następujące brzmienie:

Twierdzenie 1'
Odwzorowaniem M stożkowej S^2_α niezdegenerowanej, przynależnej do paraboloidy F^2, jest okrąg, jeżeli S^2_α leży w płaszczyźnie ogólnej lub prosta, jeżeli S^2_α leży w płaszczyźnie prostopadłej do rzutni π.

Zauważmy, że jeżeli S^2_α leży w płaszczyźnie α ogólnej i przynależnej do F^2, to obraz S^2_π pokrywa się z okręgiem potęgowym łańcucha okręgów Ψ_α (obrazu płaszczyzny α) [4] /rys.2/.

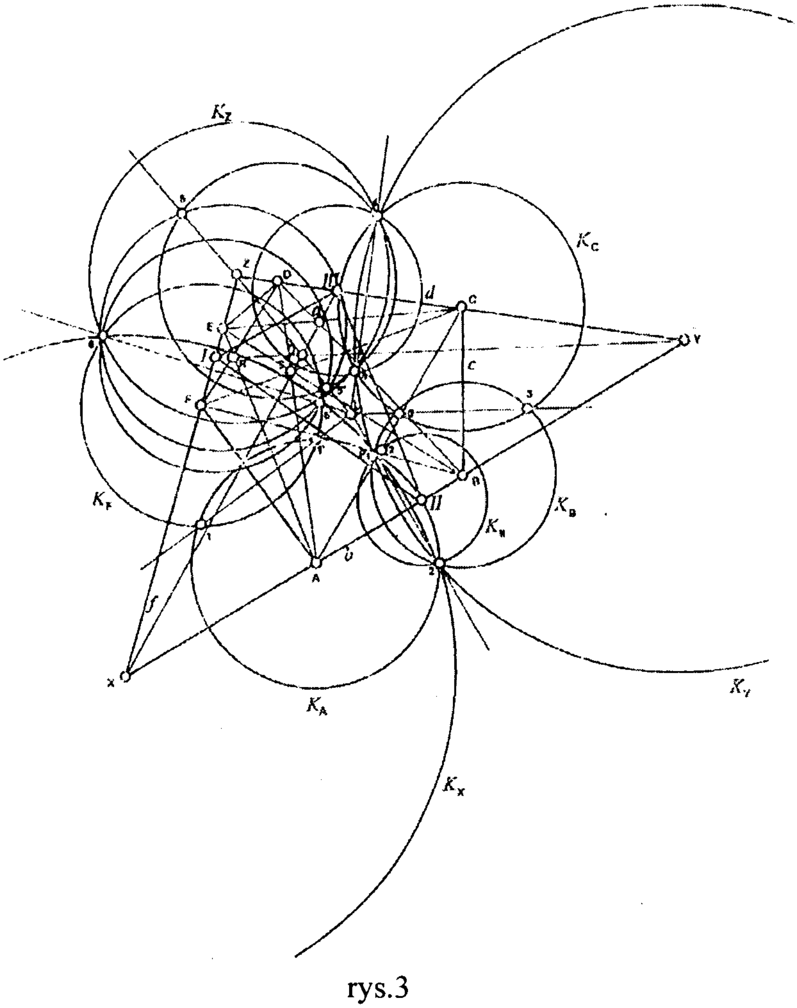
$$K_{L\alpha} = S^2_\pi$$



rys.2

3.Obrazy stycznych do stożkowych i ich punktów stycznośc
Stożkowa może być jednoznacznie określona pięcioma jej stycznymi, z których żadne trzy nie przechodzą przez jeden punkt (1).

Niech dany będzie na rzutni π łańcuch okręgów Ψ_α (obraz płaszczyzny α), określony trzema pękami okręgów $\boldsymbol{\Pi_a}$ **(1,1')**, $\boldsymbol{\Pi}$ **(2,2')**, $\boldsymbol{\Pi_c}$ **(3,3')** /rys.3/.



rys.3

Pęki te możemy uważać za obrazy trzech stycznych ***a,b,c*** pewnej stożkowej S^2_α płaszczyzny α. Wyznaczmy dwa kolejne pęki okręgów $\boldsymbol{\Pi_d}$ **(4,4')** i $\boldsymbol{\Pi_e}$ **(5,5')** należące do danego łańcucha pęków okręgów Ψ_α i takie aby proste ***d*** i ***e***, których obrazami są te pęki, łącznie z prostymi ***a,b,c,*** spełniały warunek (1).

Pięć takich pęków okręgów jak: Π_a, Π_b, Π_c, Π_d, Π_e, określa jedno jednoznacznie pewną stożkową S^2_α na płaszczyźnie α. Korzystając z konstrukcji wynikających z twierdzeń Brianchona i Pascala, można wyznaczyć kolejne pęki okręgów należące do danego łańcucha pęków okręgów Ψ_a , będące obrazami stycznych do stożkowej $S^2{}_a$ .Można również wyznaczyć okręgi należące do tych pęków okręgów, będące obrazami punktów tej stożkowej lub obrazami punktów styczności wspomnianych stycznych.

Przykład 1

Dane są pęki okręgów:

Π_a **(1,1')** , Π_b **(2,2')**, Π_c **(3,3')**, Π_d **(4,4')**, Π_e **(5,5')**,

o podstawach odpowiednio: ***a', b', c', d', e'*** należące do łańcucha Ψ_a .

Wyznaczyć:

1/ Pęk okręgów Π_f **(6,6')**, będący obrazem stycznej *f* do stożkowej$S^2{}_a$

2/ Okrąg K_I należący do pęku okręgów Π_f **(6,6')** , będący obrazempunktu styczności ***I*** prostej *f* do $S^2{}_a$.

Rozwiązanie z opisem konstrukcji przeprowadzonych na rys./3/.Podstawy pęków okręgów Π_a , Π_b, Π_c, Π_d, Π_e przecinają się odpowiednio w punktach:

$A' = (a' \cap b')$, $B' = (b' \cap c')$, $C' = (c' \cap d')$, $D' = (d' \cap e')$, które są środkami okręgów K_A , K_B , K_C , K_D .

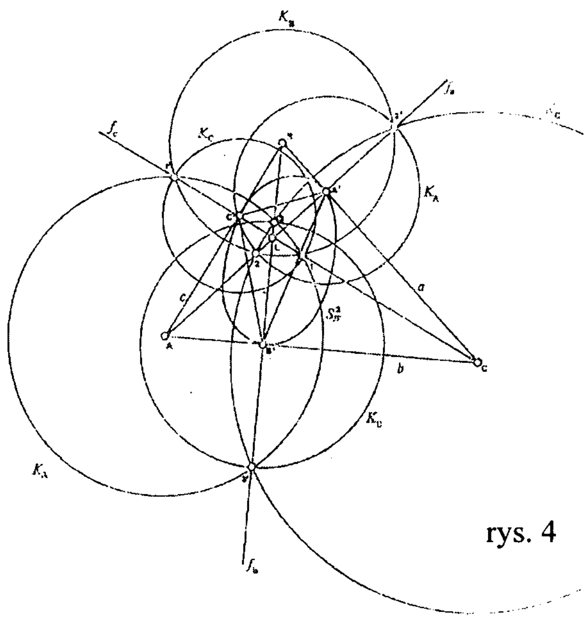
Na podstawie ***e'*** pęku okręgów **5,5'** przyjęto dowolnie punkt ***E'*** jakośrodek okręgu K_E, należącego do pęku okręgów **5,5'**. Okręgi K_A , K_D oraz K_B , K_E tworzą nowe pęki okręgów, których podstawy przecinają się w punkcie ***S*** (punkt Brianchona).Okręgi K_C i szukany okrąg K_F tworzą pęk okręgów, którego podstawa przechodzi przez punkty ***C'*** i ***S***. Punkt przecięcia podstaw ***C'S*** i ***a'*** wyznacza punkt ***F'*** – będący środkiem okręgu K_F. Okrąg K_F należy do pęku okręgów **1,1'**.Okręgi K_F i K_E wyznaczają pęk okręgów **6,6'**, będący obrazem szóstej stycznej *f* do stożkowej $S^2{}_a$. Pęki okręgów Π_a**(1,1')** ,Π_b**(2,2')** ,Π**(3,3')**,Π_d **(4,4')**, Π_e **(5,5')**, Π_f **(6,6')**, należą do obwiedni stożkowej $S^2{}_a$.

Wyznaczamy okręgi K_X , K_Y , K_Z , które są obrazami punktów przecięcia boków trójkąta opisanego na stożkowej $S^2{}_a$. W przecięciu prostych ***AE*** i ***FD*** wyznaczamy punkt ***R*** . Prosta ***YR*** przecina podstawę pęku okręgów **6,6'** w punkcie ***I'***, który jest środkiem okręgu K_I, należącego do pęku okręgów **6,6'**, będącego obrazem stycznej *f* do $S^2{}_a$ .Okrąg K_I jest obrazem punktu styczności tej stycznej. Pozostałe obrazy punktów styczności (K_{II}, K_{III}) wyznaczamy analogicznie.

Przedstawiając obraz płaszczyzny na rzutni π, możemy przyjąć trzy dowolne, przecinające się okręgi. Okręgi te określają trzy pęki okręgów. W każdym z pęków można wyróżnić okrąg o najmniejszej średnicy (równej odległości punktów podstawowych pęku). Przyjmując, że wymienione trzy pęki okręgów są obrazami boków trójkąta opisanego na pewnej stożkowej, należy ustalić jakie warunki muszą zostać spełnione, aby okręgi o najmniejszej średnicy należące do tych pęków okręgów, były obrazami punktów styczności boków trójkąta, czyli wierzchołkami trójkąta wpisanego w tę stożkową.

Twierdzenie 2

Niech dane będą trzy pęki okręgów Π_a , Π_b , Π_c należące do jednego łańcucha okręgów $\Psi\, a$, określone trzema przecinającymi się w punktach rzeczywistych okręgami K_A , K_B , K_C rzutni π , których środki nie leżą na jednej prostej, ale takie, że środek każdego z tych okręgów należy do prostej potęgowej pęku okręgów utworzonego przez dwa pozostałe okręgi. Wówczas pęki Π_a , Π_b , Π_c są obrazami stycznych ***a, b, c*** do pewnej stożkowej S^2_a, a okręgi o najmniejszej średnicy należące do tych pęków, są obrazami punktów styczności prostych ***a, b, c*** do tej stożkowej /rys.4/.



rys. 4

Dowód:

Stożkowa jest jednoznacznie określona trzema stycznymi i ich dwoma punktami styczności, zatem pęki okręgów Π_a, Π_b i Π_c oraz dwa okręgi K_A i K_B, o najmniejszej średnicy **(2,2' i 3,3')**, należące do tych pęków, możemy uważać za obrazy trzech stycznych i dwóch punktów styczności pewnej stożkowej S^2_α.

Należy zatem wykazać, że okrąg K_C pęku Π_c jest obrazem punktu styczności prostej c do stożkowej S^2_α.

W myśl twierdzenia 1, środek C' okręgu K_C, leży na pewnej stożkowej S^2_π, będącej rzutem prostokątnym na rzutnię π, stożkowej S^2_α. Podstawy a', b', c' pęków Π_a, Π_b, Π_c tworzą trójkąt ABC opisany na stożkowej S^2_π. Punkty A' i B' (środki okręgów K_A, K_B) są punktami styczności prostych a' i b' ze stożkową S^2_π.

Z twierdzenia o trójboku opisanym i trójkącie wpisanym w stożkową wynika, że proste AA', BB' i CC' przechodzą przez jeden punkt [5]. Ponieważ prosta $AA' = f_a$ i prosta $BB' = f_b$, punkt przecięcia tych prostych jednoczy się z punktem L. Z definicji pęku okręgu wynika, że $f_a \perp a'$ i $f_b \perp b'$, tak więc prosta f_c jest prostopadła do prostej c'. Prosta f_c i prosta CC' przechodzi przez dwa punkty C i 1, więc proste te są identyczne. Prosta f_c przecina prostą c' w punkcie C', który należy do stożkowej S^2_π. Punkt ten leżący na podstawie c' pęku Π_c**(1,1')** jest środkiem okręgu K_c, należącego do tego pęku. Jest on obrazem punktu styczności prostej c do stożkowej S^2_α płaszczyzny α.

c.b.d.o.

Literatura:

[1] A. Lankosz: „Biegunowo-stereograficzne odwzorowanie przestrzeni R^3 na płaszczyźnie" Z. N. Opuscula Mathematica, Vol.16, AGH, Kraków 1996

[2] Arnold Emch: „Neue durch stereografische Projection erhaltene Eigenschaften der Flächen zweiter Ordnung mit Nabelpunkten" Monatshefte für Mathematic, Wien 1948

[3] Marceli Stark: "Geometria analityczna", Warszawa 1958

[4] A. Lankosz: „Certain Metric Problems in the Mand M^{-1} Projection" Proceedings of Seminars on Computational Geometry SCG' 2000 Slovak University of Technology in Bratislava, September 2000, Kocovce, SR

[5] Federigo Enriques:“Wykłady Geometrii Rzutowej”,Warszawa 1917

Summary

CONSTRUCTION OF THE CONIC CURVES IN THE M PROJECTION METHOD

In the article the projection method M has been defined. In the method Principle of polarity with regard to the quadrics as well as the properties of stereographic projection have been used.

In addition two theorems have been proved. The corollaries derived from them have been applied to constructions of conics as well as to points and lines of tangency to the curves.