Pietruszczak, Andrzej

O pewnym ujęciu logiki tradycyjnej

Acta Universitatis Nicolai Copernici. Logika 1 (224), 31-41

1991

Artykuł został opracowany do udostępnienia w internecie przez Muzeum Historii Polski w ramach prac podejmowanych na rzecz zapewnienia otwartego, powszechnego i trwałego dostępu do polskiego dorobku naukowego i kulturalnego. Artykuł jest umieszczony w kolekcji cyfrowej bazhum.muzhp.pl, gromadzącej zawartość polskich czasopism humanistycznych i społecznych.

Tekst jest udostępniony do wykorzystania w ramach dozwolonego użytku.

MUZEUM HISTORII POLSKI

ACTA UNIVERSITATIS NICOLAI COPERNICI
LOGIKA I — NAUKI HUMANISTYCZNO-SPOŁECZNE — ZESZYT 224 — 1991

Katedra Logiki

Andrzej Pietruszczak

O PEWNYM UJĘCIU LOGIKI TRADYCYJNEJ

1. PROBLEM NAZW PUSTYCH W LOGICE TRADYCYJNEJ

Logika tradycyjna była teorią związków logicznych zachodzących pomiędzy zdaniami kategorycznymi, tj. zdaniami, których funktorami głównymi są zwroty: 'każde...jest...' (zdania ogólno-twierdzące), 'pewne...jest...' (zdania szczegółowo-twierdzące), 'żadne...nie jest...' (zdania ogólno-przeczące), 'pewne...nie jest...' (zdania szczegółowo-przeczące). Powszechnie przyjmowana jest taka interpretacja tych funktorów, przy której:

— zdanie ogólno-twierdzące jest prawdziwe wtedy i tylko wtedy, gdy zakres podmiotu zawiera się w zakresie orzecznika,

— zdanie szczegółowo-twierdzące jest prawdziwe wtedy i tylko wtedy, gdy podmiot i orzecznik mają wspólny desygnat,

— zdanie ogólno-przeczące jest prawdziwe wtedy i tylko wtedy, gdy zakresy podmiotu i orzecznika są rozłączne,

— zdanie szczegółowo-przeczące jest prawdziwe wtedy i tylko wtedy, gdy podmiot ma desygnat nie będący desygnatem orzecznika.

Interpretację tę uznajemy za naturalne rozumienie powyższych funktorów.

Podstawowym związkiem logicznym zachodzącym pomiędzy zdaniami kategorycznymi jest wynikanie logiczne. Wpływ na nie ma zarówno interpretacja funktorów głównych zdań kategorycznych, jak i interpretacja funktorów nazwotwórczych, za pomocą których tworzone są terminy złożone. W logice tradycyjnej relację wynikania logicznego wyraża się przy użyciu schematów wnioskowań, przy czym wyróżnia ona niektóre z nich jako swoje prawa. Jeżeli funktory są rozumiane w sposób naturalny, to wszystkie wyróżnione schematy są niezawodne (tj. zawsze prowadzą od prawdziwych przesłanek do prawdziwego wniosku), gdy ograniczymy ich stosowanie do nazw niepustych.

Wiadomo, że niektóre schematy wyróżnione przez logikę tradycyjną stracą swoją niezawodność, gdy będzie dopuszczalne podstawianie nazw pustych, a funktory nadal będą rozumiane w sposób naturalny. Powstaje zatem problem: czy można tak zmienić sens tych funktorów, aby była zachowana niezawodność nawet przy dopuszczalnym podstawianiu nazw pustych? Przy czym ta nowa interpretacja ma spełniać dwa warunki:

— przy ograniczeniu terminów do niepustych pokrywa się z naturalną,

— w pełnej klasie nazw, ma mieścić się w granicach dopuszczalnych przez zwyczaj językowy[1].

Jeżeli ograniczymy się do wyrażania właściwości wynikania logicznego związanych jedynie z interpretacją funktorów głównych zdań kategorycznych, to w schematach wnioskowań nie będą uwzględniane funktory nazwotwórcze. Przy tym ograniczeniu logika tradycyjna wyróżnia: schematy kwadratu logicznego, konwersji, 24 sylogizmy poprawne i odpowiednie łańcuszniki.

W zapisie symbolicznym litery 'a', 'i', 'e' oraz 'o' będą odpowiednio reprezentować funktory: 'każde...jest...', 'pewne...jest...', 'żadne...nie jest...' oraz 'pewne...nie jest...' Ponadto przyjmujemy, że litery 'S', 'P', 'M', 'S_1', 'S_2', 'S_3', ... itd. reprezentują (w sensie występowania zamiast) dowolne nazwy generalne języka naturalnego.

Przy rozwiązywaniu powyżej przedstawionego problemu podejmowanych było wiele prób zmiany sensu poszczególnych funktorów zdań kategorycznych. Z reguły jednak pozostawało niejasne, czy nowa interpretacja danego funktora mieści się w granicach dopuszczalnych przez zwyczaj językowy.

Przykładowo, aby zachować w pełnej klasie nazw niezawodność schematu '$SaP \Rightarrow SiP$'[2], wystarczy rozumieć funktor 'każde...jest...' w tzw. sensie mocnym, przy którym zdanie ogólno-twierdzące jest prawdziwe wtedy i tylko wtedy, gdy podmiot jest nazwą niepustą mającą zakres zawarty w zakresie orzecznika.

---

[1] Tzn. przyjmujemy, że niektóre z rozpatrywanych funktorów są wieloznaczne, przy czym znaczenia te są zbliżone i różnią się jedynie w pewnych wyjątkowych przypadkach stosowania funktorów (porównaj np. słabą i mocną interpretację funktora 'każde...jest...', które omawiamy niżej).

[2] Posługuję się takim zapisem schematów wnioskowań zamiast zapisem piętrowym: $\frac{SaP}{SiP}$. Ogólnie: jeżeli X jest ciągiem schematów zdaniowych i σ jest schematem zdaniowym, to $\ulcorner X \Rightarrow \sigma \urcorner$ jest schematem wnioskowania. Sam symbol '$\Rightarrow$' odgrywa przy tym identyczną rolę co pozioma kreska w schematach piętrowych, czyli reprezentuje zwrot 'więc'.

Stosując tę formę zapisu schematów wnioskowań, możemy zamiast dwóch schematów piętrowych: $\frac{\sigma_1}{\sigma_2}$ i $\frac{\sigma_2}{\sigma_1}$ analizować jeden dwustronny schemat wnioskowania: $\ulcorner \sigma_1 \Leftrightarrow \sigma_2 \urcorner$ (σ_1 i σ_2 są schematami zdaniowymi). Przyjmujemy, że schemat $\ulcorner \sigma_1 \Leftrightarrow \sigma_2 \urcorner$ jest niezawodny wtw oba schematy $\ulcorner \sigma_1 \Rightarrow \sigma_2 \urcorner$ i $\ulcorner \sigma_2 \Rightarrow \sigma_1 \urcorner$ są niezawodne.

Symbole '$\Rightarrow$', '$\Leftrightarrow$' (podobnie jak spójniki zdaniowe '$\rightarrow$' '$\leftrightarrow$') nie są symbolami ani relacji wynikania ani relacji równoważności pomiędzy zdaniami. Wynikanie zachodzi, gdy schemat wnioskowania z symbolem '$\Rightarrow$' jest niezawodny (odp. schemat zdaniowy ze spójnikiem głównym '$\rightarrow$' jest tautologią). Analogiczną sytuację mamy dla relacji równoważności.

Poprzednio przedstawioną naturalną interpretację tego funktora nazywa się ‘słabą’. Tak również nazywa się naturalną interpretację funktora ‘żadne...nie jest...’, a oprócz niej wprowadzono dodatkowo dwie inne interpretacje tego wyrażenia:

— mocną, przy której zdanie ogólno-przeczące jest prawdziwe wtedy i tylko wtedy, gdy podmiot jest nazwą niepustą mającą zakres rozłączny z zakresem orzecznika,

— „super” mocną (pochodzącą od Strawsona), przy której zdanie ogólno-przeczące jest prawdziwe wtedy i tylko wtedy, gdy podmiot i orzecznik są nazwami niepustymi o rozłącznych zakresach.

Oczywiście te nowe interpretacje pokrywają się z naturalnymi (tj. słabymi) w klasie nazw niepustych, lecz dyskusyjne jest to, czy odpowiadają one naszym intuicjom związanym ze znaczeniem zwrotów ‘każde...jest...’ oraz ‘żadne...nie jest...’

2. INNE UJĘCIE PROBLEMU

Aby w ogóle nie podejmować podobnych problemów, można — wzorując się na pomyśle T. Kotarbińskiego — wprowadzić do języka potocznego inne rodzaje zdań kategorycznych zbudowanych za pomocą zwrotów, których naturalne rozumienie pokrywa się w klasie nazw niepustych z naturalną interpretacją jednego z funktorów omawianych w części I. Ponieważ logika tradycyjna ograniczała stosowanie wyróżnionych przez siebie schematów do nazw niepustych, więc z jej punktu widzenia nie są rozróżnialne znaczeniowo funktory, których interpretacje pokrywają się w tej klasie nazw i równie dobrze każdy z nich mógłby występować w schematach. Można zatem problem przedstawiony w części I zamienić na następujący: czy można zmienić niektóre funktory na takie, których interpretacje pokrywają się z wyjściowymi w klasie nazw niepustych, tak aby była zachowana niezawodność omawianych schematów nawet przy dopuszczalnym podstawianiu nazw pustych.

Funktor ‘każde...jest...’ w znaczeniu mocnym zawiera implicite warunek niepustości podmiotu. T. Kotarbiński zaproponował w [1], aby „w języku potocznym można było odróżnić ... dwa sposoby użycia zdania ogólnego, zachowując np. formę ‘Każde *A* jest *B*’ dla zdania ogólnego w znaczeniu mocnym, ‘Wszelkie *A* jest *B*’ — dla zdania ogólnego w znaczeniu słabym” (s. 227). Skoro dokonał on takiego wyboru, to uważał, że w potocznym znaczeniu funktora ‘wszelkie...jest...’ nie zawarte jest, nawet implicite, zastrzeżenie o niepustości podmiotu. Jeżeli tak jest w istocie, to zastrzeżenie to musi być związane implicite ze zwrotem ‘każde’. Zamiast pojęcia mocnego i słabego rozumienia, T. Kotarbiński wprowadził dwa rodzaje zdań ogólno-twierdzących: mocne — z funktorem ‘każde...jest...’ (s. 233), oraz słabe

— z funktorem 'wszelkie...jest...' (s. 234). Oczywiście każdy z tych funktorów ma — po przyjęciu tej konwencji — tylko jedno znaczenie. Zauważmy, że przy ograniczeniu terminów do niepustych, omawiane funktory mają ten sam sens, gdyż to co ma być zawarte implicite w znaczeniu zwrotu 'każde' jest już zawarte explicite w założeniu nałożonym na terminy.

Podobnie można wprowadzić do języka potocznego trzy rodzaje zdań ogólno-przeczących: słabe, mocne i „super" mocne. Zdania słabe budować będziemy za pomocą zwrotu 'żadne...nie jest...', przyjmując dla niego jego naturalną interpretację. Dla dwóch dalszych typów należy znaleźć w języku potocznym zwroty, których naturalne rozumienie pokrywa się odpowiednio z mocną i „super" mocną interpretacją funktora 'żadne...nie jest...' Dla zdań mocnych zwrotem tym może być 'każde...nie jest...', zaś dla „super" mocnych — zwrot 'każde...nie jest... i odwrotnie' (wzorowany na funktorze 'wszelkie...jest... i odwrotnie' używanym przez T. Kotarbińskiego w zdaniu stwierdzającym równość zakresów podmiotu i orzecznika; s. 235). Wynika to z naszych poprzednich uwag dotyczących zwrotu 'każde'. Zauważmy ponadto, że przy ograniczeniu terminów do niepustych, omawiane funktory mają ten sam sens co funktor 'żadne...nie jest...', gdyż to ma być zawarte implicite w znaczeniu zwrotu 'każde' jest już zawarte explicite w założeniu nałożonym na terminy, oraz to co jest zawarte explicite w znaczeniu zwrotu 'i odwrotnie' jest też zawarte implicite w znaczeniu funktora 'żadne...nie jest...'

Funktor 'wszelkie...jest...' (rozumiany jak u Kotarbińskiego) będziemy dalej symbolizować tak samo jak funktor 'każde...jest...' interpretowany naturalnie (tj. słabo), czyli za pomocą litery 'a', zaś funktor 'każde...jest...' (rozumiany jak u Kotarbińskiego, tj. w sposób mocny) będziemy symbolizować za pomocą '$a^{\cdot}$'. Różne sposoby odczytywania symboli 'a' oraz '$a^{\cdot}$' pozwalają na ich porównywanie. Mogą one wtedy występować w jednym schemacie. Przykładowo poniższe schematy są niezawodne:

$Sa^{\cdot}P \Leftrightarrow (SiS \,\&\, SaP)$,
$SaP \Leftrightarrow (\neg Sa^{\cdot}S \vee Sa^{\cdot}P)$,
$Sa^{\cdot}S \Leftrightarrow SiS$.

Funktory główne słabych, mocnych i „super" mocnych zdań ogólno-przeczących będziemy dalej symbolizować odpowiednio przez: 'e', '$e^{\cdot}$' oraz '$e^{\cdot\cdot}$'.

Sprawdźmy teraz, na ile nowo wprowadzone funktory są przydatne przy rozwiązywaniu problemu przedstawionego w tej części.

W przypadku, gdy w schematach logiki tradycyjnej symbol 'a' zastąpimy symbolem '$a^{\cdot}$', a symbol 'e' symbolem '$e^{\cdot}$', to przy dopuszczalnym podstawieniu nazw pustych stracą swoją niezawodność następujące ze schematów kwadratu logicznego, konwersji i sylogizmów:

(I)	$\neg SiP \Rightarrow SoP$	$\neg SoP \Rightarrow SiP$
(II)	$\neg Sa^{\cdot}P \Rightarrow SoP$	$\neg SoP \Rightarrow Sa^{\cdot}P$
(III)	$\neg SiP \Rightarrow Se^{\cdot}P$	$\neg Se^{\cdot}P \Rightarrow SiP$
	$Pa^{\cdot}M,\ Me^{\cdot}S \Rightarrow SoP$	$Pa^{\cdot}M,\ Me^{\cdot}S \Rightarrow Se^{\cdot}P$.

Jednak schematy (II) i (III) można zastąpić poniższymi niezawodnymi schematami:

$\neg\, Sa^{\cdot}P,\ SiS \Rightarrow SoP \qquad \neg\, SoP,\ SiS \Rightarrow Sa^{\cdot}P$

$\neg\, SiP,\ SiS \Rightarrow Se^{\cdot}P \qquad \neg\, Se^{\cdot}P,\ SiS \Rightarrow SiP.$

W przypadku, gdy w schematach logiki tradycyjnej symbol ‘a’ zastąpimy symbolem ‘$a^{\cdot}$’, a symbol ‘e’ symbolem ‘$e^{\cdot\cdot}$’, to przy dopuszczalnym podstawianiu nazw pustych stracą swoją niezawodność następujące z omawianych schematów: (I), (II) oraz

(IV) $\neg\, SiP \Rightarrow Se^{\cdot\cdot}P \qquad \neg\, Se^{\cdot\cdot}P \Rightarrow SiP$

przy czym (IV) możemy zastąpić poniższymi niezawodnymi schematami:

$\neg\, SiP,\ SiS,\ PiP \Rightarrow Se^{\cdot\cdot}P \qquad \neg\, Se^{\cdot\cdot}P,\ SiS,\ PiP \Rightarrow SiP.$

Pozostałe z omawianych schematów będą niezawodne w pełnej klasie nazw. Istotnie, obie litery schematyczne występujące we wniosku (tj. ‘S’ oraz ‘P’) występują również w przesłankach, dla prawdziwości których konieczna jest niepustość nazw podstawianych za ‘S’ oraz ‘P’ (również konieczna jest niepustość nazwy podstawianej za ‘M’, gdyż we wszystkich rozpatrywanych schematach występuje ona w przesłance ogólnej lub szczegółowo-twierdzącej). Zatem mamy zagwarantowaną prawdziwość wniosku, gdyż w pierwotnej postaci schematy te były niezawodne w klasie nazw niepustych.

3. RACHUNKI NAZW ZE STAŁYMI ‘a’, ‘$a^{\cdot}$’, ‘i’, ‘o’, ‘e’, ‘$e^{\cdot}$’ ORAZ ‘$e^{\cdot\cdot}$’

Związki logiczne zachodzące pomiędzy zdaniami kategorycznymi możemy również wyrażać za pomocą funkcji zdaniowych, będących schematami tych zdań języka naturalnego, w których zdaniami atomowymi są zdania kategoryczne. Funkcja tego rodzaju wyraża jakieś prawo logiczne, gdy jest tautologią, tj. gdy otrzymujemy z niej zdanie prawdziwe przy dowolnym podstawieniu nazw za litery schematyczne (oczywiście zakres tego pojęcia zależny jest od przyjętej interpretacji funktorów zdań kategorycznych i spójników zdaniowych, przy czym zakładamy, że te ostatnie będziemy interpretować w tej pracy w sposób klasyczny). Każdy schemat wnioskowania ma swój odpowiednik w postaci schematu zdaniowego. Oczywiste jest to, że niezawodność danego schematu wnioskowania jest równoważna tautologiczności jego odpowiednika. W odpowiednich zbiorach schematów zdaniowych możemy budować tzw. aksjomatyczne rachunki nazw, w których z wyróżnionych tautologii (tzw. aksjomatów) wyprowadzamy inne tautologie za pomocą określonej relacji.

Aparatura pojęciowa używana w tej części pracy przedstawiona jest w [2] część I.

Niech Σ będzie zbiorem formuł zdaniowych wyznaczonym przez symbole ze zbioru $\underline{F} := \{‘a’, ‘a^{\cdot}’, ‘i’, ‘o’, ‘e’, ‘e^{\cdot}’, ‘e^{\cdot\cdot}’\}$. Przez $\ulcorner\Sigma^{\delta_1,\ldots,\delta_k}\urcorner$ oznaczymy zbiór tych formuł z Σ, w których nie występują symbole ze zbioru $\underline{F}\setminus\{\delta_1,\ldots,\delta_k\}$ $(k \geqslant 1)$.

Każdy funktor reprezentowany przez jakiś symbol z $\underline{\mathrm{F}}$ bądź któryś z symboli '$\neg$', '&', '$\vee$', '$\rightarrow$', '$\leftrightarrow$', traktujemy jako stałą logiczną o ustalonej interpretacji. Polega ona na jednolitym przyporządkowaniu dowolnej interpretacji $I = \langle U, D\rangle$ liter z $\underline{\mathrm{N}}$ pewnego podzbioru $\mathrm{VER}_I(\Sigma)$ zbioru Σ. Przyporządkowania tego dokonujemy w następujący sposób indukcyjny: dla dowolnych $\underline{\mathrm{S}}$, $\underline{\mathrm{P}}$ z $\underline{\mathrm{N}}$ oraz σ, σ_1, σ_2 z Σ

$\ulcorner \underline{\mathrm{S}}\,\mathrm{a}\,\underline{\mathrm{P}} \urcorner \in \mathrm{VER}_I(\Sigma)$ wtw $D(\underline{\mathrm{S}}) \subset D(\underline{\mathrm{P}})$
$\ulcorner \underline{\mathrm{S}}\,\mathrm{a}^{\cdot}\underline{\mathrm{P}} \urcorner \in \mathrm{VER}_I(\Sigma)$ wtw $D(\underline{\mathrm{S}}) \neq \varnothing$ i $D(\underline{\mathrm{S}}) \subset D(\underline{\mathrm{P}})$
$\ulcorner \underline{\mathrm{S}}\,\mathrm{i}\,\underline{\mathrm{P}} \urcorner \in \mathrm{VER}_I(\Sigma)$ wtw $D(\underline{\mathrm{S}}) \cap D(\underline{\mathrm{P}}) \neq \varnothing$
$\ulcorner \underline{\mathrm{S}}\,\mathrm{e}\,\underline{\mathrm{P}} \urcorner \in \mathrm{VER}_I(\Sigma)$ wtw $D(\underline{\mathrm{S}}) \cap D(\underline{\mathrm{P}}) = \varnothing$
$\ulcorner \underline{\mathrm{S}}\,\mathrm{e}^{\cdot}\underline{\mathrm{P}} \urcorner \in \mathrm{VER}_I(\Sigma)$ wtw $D(\underline{\mathrm{S}}) \neq \varnothing$ i $D(\underline{\mathrm{S}}) \cap D(\underline{\mathrm{P}}) = \varnothing$
$\ulcorner \underline{\mathrm{S}}\,\mathrm{e}^{\cdot\cdot}\underline{\mathrm{P}} \urcorner \in \mathrm{VER}_I(\Sigma)$ wtw $D(\underline{\mathrm{S}}) \neq \varnothing$ i $D(\underline{\mathrm{P}}) \neq \varnothing$ i $D(\underline{\mathrm{S}}) \cap D(\underline{\mathrm{P}}) = \varnothing$
$\ulcorner \underline{\mathrm{S}}\,\mathrm{o}\,\underline{\mathrm{P}} \urcorner \in \mathrm{VER}_I(\Sigma)$ wtw $D(\underline{\mathrm{S}}) \setminus D(\underline{\mathrm{P}}) \neq \varnothing$
$\ulcorner \neg\sigma \urcorner \in \mathrm{VER}_I(\Sigma)$ wtw nieprawda, że $\sigma \in \mathrm{VER}_I(\Sigma)$
$\ulcorner (\sigma_1 \,\&\, \sigma_2) \urcorner \in \mathrm{VER}_I(\Sigma)$ wtw $\sigma_1 \in \mathrm{VER}_I(\Sigma)$ i $\sigma_2 \in \mathrm{VER}_I(\Sigma)$
$\ulcorner (\sigma_1 \vee \sigma_2) \urcorner \in \mathrm{VER}_I(\Sigma)$ wtw $\sigma_1 \in \mathrm{VER}_I(\Sigma)$ lub $\sigma_2 \in \mathrm{VER}_I(\Sigma)$
$\ulcorner (\sigma_1 \rightarrow \sigma_2) \urcorner \in \mathrm{VER}_I(\Sigma)$ wtw $\ulcorner \neg\sigma_1 \urcorner \in \mathrm{VER}_I(\Sigma)$ lub $\sigma_2 \in \mathrm{VER}_I(\Sigma)$
$\ulcorner (\sigma_1 \leftrightarrow \sigma_2) \urcorner \in \mathrm{VER}_I(\Sigma)$ wtw $\sigma_1, \sigma_2 \in \mathrm{VER}_I(\Sigma)$ lub $\ulcorner \neg\sigma_1 \urcorner, \ulcorner \neg\sigma_2 \urcorner \in \mathrm{VER}_I(\Sigma)$.

Zbiór $\mathrm{VER}_I(\Sigma)$ nazywamy 'zbiorem formuł prawdziwych w interpretacji I liter z $\underline{\mathrm{N}}$'.

Przez '$\mathrm{Taut}(\Sigma)$' oznaczymy zbiór tautologii z Σ, tj. formuł z Σ prawdziwych w każdej interpretacji liter z $\underline{\mathrm{N}}$. Przyjmujemy, że $\mathrm{Taut}(\Sigma^{\delta_1, \ldots, \delta_k}) = \mathrm{Taut}(\Sigma) \cap \Sigma^{\delta_1, \ldots, \delta_k}$ dla $\delta_1, \ldots, \delta_k$ należących do $\underline{\mathrm{F}}$.

Zauważmy, że symbole 'a' oraz 'i' mają tę własność, iż przy ich użyciu definiowalne są wszystkie pozostałe symbole z $\underline{\mathrm{F}}$. Istotnie, poniższe formuły z Σ są tautologiami:

(def a$^{\cdot}$) $\mathrm{Sa^{\cdot}P} \leftrightarrow (\mathrm{SiS} \,\&\, \mathrm{SaP})$
(def$_1$ o) $\mathrm{SoP} \leftrightarrow \neg\,\mathrm{SaP}$
(def e) $\mathrm{SeP} \leftrightarrow \neg\,\mathrm{SiP}$
(def e$^{\cdot}$) $\mathrm{Se^{\cdot}P} \leftrightarrow (\mathrm{SiS} \,\&\, \neg\,\mathrm{SiP})$
(def e$^{\cdot\cdot}$) $\mathrm{Se^{\cdot\cdot}P} \leftrightarrow (\mathrm{SiS} \,\&\, \mathrm{PiP} \,\&\, \neg\,\mathrm{SiP})$.

W zbiorze $\Sigma^{\mathrm{a,i}}$ możemy zbudować pełny rachunek nazw $\mathbf{R}_{\mathrm{Sh}}$ mający jako aksjomaty poniższe tautologie (omawiam go w [2], cz. II, § 5):

(1) SaS
(2) $(\mathrm{SaM} \,\&\, \mathrm{MaP}) \rightarrow \mathrm{SaP}$
(3) $(\mathrm{MiS} \,\&\, \mathrm{MaP}) \rightarrow \mathrm{SiP}$
(4) $\mathrm{SiP} \rightarrow \mathrm{SiS}$
(5) $\neg\,\mathrm{SiS} \rightarrow \mathrm{SaP}$.

Na mocy wniosku 2 z [2], definicyjne rozszerzenia rachunku $\mathbf{R}_{\mathrm{Sh}}$ wykonane za pomocą tautologii (def a$^{\cdot}$)–(def e$^{\cdot\cdot}$), również są pełne. Zatem zbiór tez rachunku $\mathbf{R}_1^{\max}$ będącego definicyjnym rozszerzeniem w zbiorze Σ rachunku $\mathbf{R}_{\mathrm{Sh}}$, pokrywa się ze zbiorem $\mathrm{Taut}(\Sigma)$.

Podobną własność jak para 'a', 'i' ma druga para 'a'', 'i'. Przy ich użyciu możemy zdefiniować wszystkie pozostałe symbole z $\underline{F}$, gdyż poniższe formuły są tautologiami:

(def a) $\quad SaP \leftrightarrow (\neg Sa^{\cdot}S \vee Sa^{\cdot}P)$

(def$_2$ o) $\quad SoP \leftrightarrow (Sa^{\cdot}S \,\&\, \neg Sa^{\cdot}P)$.

W zbiorze $\Sigma^{a^{\cdot}, i}$ zbudujemy rachunek $\mathbf{R}_{rSł}$, którego aksjomatami są poniższe tautologie:

(2$^{\cdot}$) $\quad (Sa^{\cdot}M \,\&\, Ma^{\cdot}P) \rightarrow Sa^{\cdot}P$

(6) $\quad SiP \rightarrow PiS$

(7$^{\cdot}$) $\quad (SiM \,\&\, Ma^{\cdot}P) \rightarrow SiP$

(8$^{\cdot}$) $\quad Sa^{\cdot}P \rightarrow SiP$

(9$^{\cdot}$) $\quad SiP \rightarrow Sa^{\cdot}S$.

Układ (2$^{\cdot}$), (6), (7$^{\cdot}$), (8$^{\cdot}$) jest rekonstrukcją w zbiorze $\Sigma^{a^{\cdot}, i}$ rachunku nazw J. Słupeckiego, przedstawionego w [3]. Łatwo wykazać, że aksjomaty rachunku $\mathbf{R}_{rSł}$ są niezależne. Zatem rachunek Słupeckiego nie jest pełny. W rachunku tym nie są wyprowadzalne również tautologie (4), '$Sa^{\cdot}P \rightarrow SiS$' oraz '$Sa^{\cdot}P \rightarrow Sa^{\cdot}S$' i '$Sa^{\cdot}P \rightarrow Pa^{\cdot}P$'[3]. Być może J. Słupeckiemu chodziło o to, aby rachunek nie posiadał tez mających w następniku implikacji formuły przypominające Łukasiewiczowskie aksjomaty 'SaS' i 'SiS'. Jednak stwierdzenie takie jest niezgodne z przyjętym przez J. Słupeckiego założeniem, że funktor 'każde...jest...' jest interpretowany w jego rachunku w sposób mocny (podaje nawet dla niego definicję w ontologii Leśniewskiego, z której wyprowadzamy — na mocy samych aksjomatów logicznych, bez użycia specyficznego aksjomatu ontologii — formuły niewyprowadzalne w rachunku Słupeckiego) oraz z tym, że formuła '$Sa^{\cdot}P \rightarrow PiP$' jest wyprowadzalna z (6), (7$^{\cdot}$) i (8$^{\cdot}$).

Możemy wykazać pełność rachunku $\mathbf{R}_{rSł}$ dowodząc dla niego odpowiedni lemat o interpretacji ([2] cz. I) identyczną metodą jak dla rachunku $\mathbf{R}_{Sh}$ (przedstawioną w [2], UWAGA w cz. II, § 5). Pełność rachunku $\mathbf{R}_{rSł}$ wynika również z wniosku 3 ([2] cz. I) i poniższego lematu:

LEMAT. Rachunki $\mathbf{R}_{rSł}$ i $\mathbf{R}_{Sh}$ są definicyjnie równoważne i wszystkie użyte definicje do rozszerzeń definicyjnych są tautologiami.

DOWÓD. W zbiorze $\Sigma^{a, a^{\cdot}, i}$ budujemy za pomocą tautologii (def a$^{\cdot}$) definicyjne rozszerzenie $\mathbf{R}_{Sh, a^{\cdot}}$ rachunku $\mathbf{R}_{Sh}$, oraz za pomocą tautologii (def a) definicyjne rozszerzenie $\mathbf{R}_{rSł, a}$ rachunku $\mathbf{R}_{rSł}$. Ponieważ rachunek $\mathbf{R}_{Sh}$ jest pełny, więc na mocy wniosku 2 ([2] cz. I) pełny jest również rachunek $\mathbf{R}_{Sh, a^{\cdot}}$. Zatem na mocy lematu 1 ([2] cz. I), rachunek $\mathbf{R}_{Sh, a^{\cdot}}$ jest rozszerzeniem rachunku $\mathbf{R}_{rSh, a}$ (można oczywiście łatwo wyprowadzić bezpośrednio formuły (2$^{\cdot}$), (6), (7$^{\cdot}$)–(9$^{\cdot}$), (def a) z formuł (1)–(5), (def a$^{\cdot}$)).

[3] Te dwie ostatnie razem z (2$^{\cdot}$) tworzą pełną aksjomatykę dla zbioru Taut($\Sigma^{a^{\cdot}}$). Można tego dowieść posługując się metodą przedstawioną w [2] przypis 7.

Pokażemy, że również rachunek $\mathbf{R}_{\mathrm{rSł,a}}$ jest rozszerzeniem rachunku $\mathbf{R}_{\mathrm{Sh,a^{\cdot}}}$, czyli że oba są równoważne. W tym celu wystarczy pokazać, że każdy aksjomat rachunku $\mathbf{R}_{\mathrm{Sh,a^{\cdot}}}$ jest wyprowadzalny z aksjomatów rachunku $\mathbf{R}_{\mathrm{rSł,a}}$:

— wyprowadzenie (1):

1. $\neg S a^{\cdot} S \vee S a^{\cdot} S$	podst. taut. klas. rach. zdań
2. $S a S$	z 1, (def a) i taut. klas. rach. zdań

— wyprowadzenie (2):

1. $S a M$	zał.
2. $M a P$	
3. $\neg S a^{\cdot} S \vee S a^{\cdot} M$	z 1, (def a) i taut. klas. rach. zdań
4. $\neg M a^{\cdot} M \vee M a^{\cdot} P$	z 2, (def a) i taut. klas. rach. zdań
5a. $\neg S a^{\cdot} S$	zał. dodatkowe z 3
6a. $\neg S a^{\cdot} S \vee S a^{\cdot} P$	z 5a i taut. klas. rach. zdań
7a. $S a P$	z 6a, (def a) i taut. klas. rach. zdań
5b. $S a^{\cdot} M$	zał. dodatkowe z 3
6b. $S i M$	z 5b i (8˙)
7b. $M i S$	z 6b i (6)
8b. $M a^{\cdot} M$	z 7b i (9˙)
9b. $M a^{\cdot} P$	z 4, 8b i taut. klas. rach. zdań
10b. $S a^{\cdot} P$	z 5b, 9b i (2˙)
11b. $\neg S a^{\cdot} S \vee S a^{\cdot} P$	z 10b i taut. klas. rach. zdań
12b. $S a P$	z 11b i (def a)

— wyprowadzenie (3):

1. $M i S$	zał.
2. $M a P$	
3. $M a^{\cdot} M$	z 1 i (9˙)
4. $\neg M a^{\cdot} M \vee M a^{\cdot} P$	z 2, (def a) i taut. klas. rach. zdań
5. $M a^{\cdot} P$	z 3 i 4
6. $S i M$	z 1 i (6)
7. $S i P$	z 5, 6 i (7˙)

— wyprowadzenie (4):

1. $S i P$	zał.
2. $S a^{\cdot} S$	z 1 i (9˙)
3. $S i S$	z 2 i (8˙)

— wyprowadzenie (5):

1. $\neg S i S$	zał.
2. $\neg S a^{\cdot} S$	z 1, (8˙) i taut. klas. rach. zdań
3. $\neg S a^{\cdot} S \vee S a^{\cdot} P$	z 2 i taut. klas. rach. zdań
4. $S a P$	z 3, (def a) i taut. klas. rach. zdań

— wyprowadzenie (def a˙):

1a. $S a^{\cdot} P$	zał.
2a. $S i P$	z 1a i (8˙)

3a. $Sa^{\cdot}S$	z 2a i (9˙)
4a. SiS	z 3a i (8˙)
5a. SaP	z 1, (def a) i taut. klas. rach. zdań
6a. $SiS \,\&\, SaP$	z 4a, 5a i taut. klas. rach. zdań
1b. SiS	zał.
2b. SaP	zał.
3b. $Sa^{\cdot}S$	z 1b i (8˙)
4b. $Sa^{\cdot}P$	z 2b, 3b, (def a) i taut. klas. rach. zdań

Łatwo zauważyć, że rachunek $\mathbf{R}_{\mathrm{rS}ł}$ jest równoważny następującym rachunkom zbudowanym w zbiorze $\Sigma^{a^{\cdot},i}$:

— opartemu na aksjomatach: (2˙), (6), (7˙), (9˙) oraz

(10˙) $Sa^{\cdot}P \rightarrow SiS$

— opartemu na aksjomatach: (2˙), (8˙), (9˙) oraz

(3˙) $(MiS \,\&\, Ma^{\cdot}P) \rightarrow SiP$[4]

— opartemu na aksjomatach: (2˙), (3˙), (9˙), (10˙).

Istotnie, z (6) i (7˙) wyprowadzimy (3˙), zaś z (9˙) i (3˙) wyprowadzimy (6) i dalej z (3˙) i (6) wyprowadzimy (7˙). Ponadto z (8˙) i (9˙) wyprowadzimy (10˙), zaś z (3˙) i (10˙) wyprowadzimy (8˙).

Na mocy wniosku 2 z [2], rachunek $\mathbf{R}_2^{max}$ zbudowany w Σ, będący definicyjnym rozszerzeniem rachunku $\mathbf{R}_{\mathrm{rS}ł}$ za pomocą tautologii (def a), (def$_2$ o), (def e)–(def e˙˙), jest pełny. Zatem rachunki $\mathbf{R}_1^{max}$ i $\mathbf{R}_2^{max}$ są równoważne.

4. TŁUMACZENIE FORMUŁ RACHUNKU NAZW NA UPROSZCZONY JĘZYK RACHUNKU KWANTYFIKATORÓW

Sens stałych pierwotnych rachunku Słupeckiego został „ustalony" przez autora za pomocą pewnych definicji na gruncie ontologii Leśniewskiego. Z nich to jako tezy ontologii możemy uzyskać formuły (2˙), (6), (7˙) i (8˙). Jednak przy wyprowadzaniu tych formuł nie korzysta się ani z aksjomatu specyficznego ontologii, ani z tego, iż w teorii tej wszystkie zmienne należą do jednej kategorii i mogą występować w obu argumentach ontologicznej stałej 'ε' (reprezentującej spójkę 'jest'), oraz mogą być wiązane kwantyfikatorami. Zatem do podobnych analiz w ogóle nie potrzeba stosować ontologii Leśniewskiego, gdyż wystarczałaby jej uproszczona wersja, w której języku byłyby dwie kategorie zmiennych: — $\underline{N}$: = {'S', 'P', 'M', 'S_1', ...}. Zmienne należące do $\underline{N}$ występowałyby tylko w drugim argumencie stałej 'ε' i nie podlegałyby wiązaniu przez kwantyfikatory; — $\underline{Var}$: = {'x', 'y', 'z', 'x_1', ...}.

---

[4] Jednak z (2˙), (3˙) i (8˙) nie wyprowadzimy ani (6) ani (7˙). Zatem rachunek oparty na aksjomatach (2˙), (3˙), (8˙) jest słabszy od rachunku Słupeckiego.

Zmienne należące do $\underline{\mathrm{Var}}$ występowałyby tylko jako pierwszy argument stałej 'ε' i byłyby wiązane przez kwantyfikatory. Wtedy fragment $\ulcorner \varepsilon\, \underline{\mathrm{S}} \urcorner$ formuły atomowej $\ulcorner \underline{\mathrm{x}}\, \varepsilon\, \underline{\mathrm{S}} \urcorner$ (gdzie $\underline{\mathrm{x}}$ i $\underline{\mathrm{S}}$ są dowolnymi zmiennymi odpowiednio z $\underline{\mathrm{Var}}$ i $\underline{\mathrm{N}}$) pełni jedynie rolę schematu jednoargumentowych predykatów zbudowanych ze spójki 'jest' i pewnej nazwy generalnej (mówiąc obrazowo: 'ε' znika po prostu w predykacie), zaś zmienne nazwowe z $\underline{\mathrm{N}}$ są w istocie jedynie literami schematycznymi reprezentującymi dowolne nazwy generalne. Zatem do podobnych analiz możemy użyć tzw. uproszczonego języka rachunku kwantyfikatorów, którego zbiór formuł zdaniowych Φ jest najmniejszym zbiorem spełniającym poniższe warunki:

— jeżeli $\underline{\mathrm{x}} \in \underline{\mathrm{Var}}$ i $\underline{\mathrm{S}} \in \underline{\mathrm{N}}$, to $\ulcorner(\underline{\mathrm{x}}\, \mathit{est}\, \underline{\mathrm{S}})\urcorner \in \Phi$,

— jeżeli $\varphi \in \Phi$ i $\underline{\mathrm{x}} \in \underline{\mathrm{Var}}$, to $\ulcorner \neg \varphi \urcorner \in \Phi$, $\ulcorner \forall \underline{\mathrm{x}}\, \varphi \urcorner \in \Phi$ oraz $\ulcorner \exists \underline{\mathrm{x}}\, \varphi \urcorner \in \Phi$,

— jeżeli $\varphi, \psi \in \Phi$ i $\S \in \{\text{'\&'}, \text{'}\vee\text{'}, \text{'}\to\text{'}, \text{'}\leftrightarrow\text{'}\}$, to $\ulcorner(\varphi \,\S\, \psi)\urcorner \in \Phi$.

Moglibyśmy wyróżnić obok formuł zdaniowych również formuły predykatowe. Byłyby to formuły $\ulcorner \mathit{est}\, \underline{\mathrm{S}} \urcorner$ (dla dowolnego $\underline{\mathrm{S}}$ z $\underline{\mathrm{N}}$), które symbolizowałyby jednoargumentowe predykaty zbudowane ze spójki 'jest' i pewnej nazwy generalnej. Formuły predykatowe '$\mathit{est}\,\mathrm{S}$', '$\mathit{est}\,\mathrm{P}$', '$\mathit{est}\,\mathrm{M}$', ... itd., zajmują miejsca liter predykatowych w forułach jednoargumentowego rachunku kwantyfikatorów.

Niech $I = \langle U, D \rangle$ będzie interpretacją liter z $\underline{\mathrm{N}}$ o niepustym uniwersum, tj. U jest dowolnym niepustym zbiorem, zaś $D\colon \underline{\mathrm{N}} \to 2^U$. Wartościowaniem zmiennych z $\underline{\mathrm{Var}}$ w interpretacji I jest dowolna funkcja z $\underline{\mathrm{Var}}$ w U. W sposób indukcyjny definiujemy zbiór $\mathrm{SAT}_I^w(\Phi)$ formuł z Φ spełnionych w interpretacji I przez wartościowanie w. Dla formuł atomowych:

$\ulcorner \underline{\mathrm{x}}\, \mathit{est}\, \underline{\mathrm{S}} \urcorner \in \mathrm{SAT}_I^w(\Phi)$ wtw $w(\underline{\mathrm{x}}) \in D(\underline{\mathrm{S}})$.

Dla innych formuł z Φ: za pomocą klasycznej interpretacji spójników zdaniowych i kwantyfikatorów.

Dalej definiujemy zbiór $\mathrm{VER}_I(\Phi)$ formuł z Φ prawdziwych w interpretacji I oraz zbiór $\mathrm{Taut}(\Phi)$ tautologii z Φ:

$\varphi \in \mathrm{VER}_I(\Phi)$ wtw dla każdego wartościowania w: $\varphi \in \mathrm{SAT}_I^w(\Phi)$

$\varphi \in \mathrm{Taut}(\Phi)$ wtw dla każdej interpretacji I: $\varphi \in \mathrm{VER}_I(\Phi)$.

Niech $\delta \in \underline{\mathrm{F}}$, oraz $\underline{\mathrm{S}}, \underline{\mathrm{P}} \in \underline{\mathrm{N}}$. Odpowiednikiem formuły $\ulcorner \underline{\mathrm{S}}\, \delta\, \underline{\mathrm{P}} \urcorner$ jest taka domknięta formuła φ z Φ, że dla każdej interpretacji I: $\ulcorner \underline{\mathrm{S}}\, \delta\, \underline{\mathrm{P}} \urcorner \in \mathrm{VER}_I(\Sigma)$ wtw $\varphi \in \mathrm{VER}_I(\Phi)$. Łatwo zauważyć, że:

$\ulcorner \underline{\mathrm{S}}\,\mathrm{a}\,\underline{\mathrm{P}} \urcorner$ odpowiada $\ulcorner \forall \mathrm{x}\,(\mathrm{x}\, \mathit{est}\, \underline{\mathrm{S}} \to \mathrm{x}\, \mathit{est}\, \underline{\mathrm{P}})\urcorner$

$\ulcorner \underline{\mathrm{S}}\,\mathrm{a}^{\cdot}\,\underline{\mathrm{P}} \urcorner$ odpowiada $\ulcorner \exists \mathrm{x}\,(\mathrm{x}\, \mathit{est}\, \underline{\mathrm{S}})\ \&\ \forall \mathrm{x}\,(\mathrm{x}\, \mathit{est}\, \underline{\mathrm{S}} \to \mathrm{x}\, \mathit{est}\, \underline{\mathrm{P}})\urcorner$

$\ulcorner \underline{\mathrm{S}}\,\mathrm{i}\,\underline{\mathrm{P}} \urcorner$ odpowiada $\ulcorner \exists \mathrm{x}\,(\mathrm{x}\, \mathit{est}\, \underline{\mathrm{S}}\ \&\ \mathrm{x}\, \mathit{est}\, \underline{\mathrm{P}})\urcorner$

$\ulcorner \underline{\mathrm{S}}\,\mathrm{o}\,\underline{\mathrm{P}} \urcorner$ odpowiada $\ulcorner \exists \mathrm{x}\,(\mathrm{x}\, \mathit{est}\, \underline{\mathrm{S}}\ \&\ \neg\, \mathrm{x}\, \mathit{est}\, \underline{\mathrm{P}})\urcorner$

$\ulcorner \underline{\mathrm{S}}\,\mathrm{e}\,\underline{\mathrm{P}} \urcorner$ odpowiada $\ulcorner \neg\, \exists \mathrm{x}\,(\mathrm{x}\, \mathit{est}\, \underline{\mathrm{S}}\ \&\ \mathrm{x}\, \mathit{est}\, \underline{\mathrm{P}})\urcorner$

$\ulcorner \underline{\mathrm{S}}\,\mathrm{e}^{\cdot}\,\underline{\mathrm{P}} \urcorner$ odpowiada $\ulcorner \neg\, \exists \mathrm{x}\,(\mathrm{x}\, \mathit{est}\, \underline{\mathrm{S}}\ \&\ \mathrm{x}\, \mathit{est}\, \underline{\mathrm{P}})\ \&\ \exists \mathrm{x}\,(\mathrm{x}\, \mathit{est}\, \underline{\mathrm{S}})\urcorner$

$\ulcorner \underline{\mathrm{S}}\,\mathrm{e}^{\cdot\cdot}\,\underline{\mathrm{P}} \urcorner$ odpowiada $\ulcorner \neg\, \exists \mathrm{x}\,(\mathrm{x}\, \mathit{est}\, \underline{\mathrm{S}}\ \&\ \mathrm{x}\, \mathit{est}\, \underline{\mathrm{P}})\ \&\ \exists \mathrm{x}\,(\mathrm{x}\, \mathit{est}\, \underline{\mathrm{S}})\ \&\ \exists \mathrm{x}\,(\mathrm{x}\, \mathit{est}\, \underline{\mathrm{P}})\urcorner$.

Tłumaczeniem formuł rachunku nazw na uproszczony język rachunku kwantyfikatorów jest funkcja $\underline{t}$ z Σ w Φ, zdefiniowana w sposób indukcyjny:

— jeżeli σ jest formułą atomową w Σ, to $\underline{t}(\sigma)$ jest odpowiednikiem formuły σ,

— $\underline{t}(\ulcorner\neg\sigma\urcorner) = \ulcorner\neg\,\underline{t}(\sigma)\urcorner$, $\underline{t}(\ulcorner\sigma_1 \,\S\, \sigma_2\urcorner) = \ulcorner\underline{t}(\sigma_1) \,\S\, \underline{t}(\sigma_2)\urcorner$;
$\S \in \{\text{‘}\&\text{’}, \text{‘}\vee\text{’}, \text{‘}\rightarrow\text{’}, \text{‘}\leftrightarrow\text{’}\}$.

Funkcja $\underline{t}$ ma następujące własności:

TWIERDZENIE

a. Dla każdej interpretacji I o niepustym uniwersum[5]:
$\sigma \in \mathrm{VER}_I(\Sigma)$ wtw $\underline{t}(\sigma) \in \mathrm{VER}_I(\Phi)$.

b. $\sigma \in \mathrm{Taut}(\Sigma)$ wtw $\underline{t}(\sigma) \in \mathrm{Taut}(\Phi)$.

Zatem na mocy pełności rachunków $\mathbf{R}_1^{\max}$ i $\mathbf{R}_2^{\max}$ otrzymujemy, że: σ jest ich tezą wtw $\underline{t}(\sigma) \in \mathrm{Taut}(\Phi)$. Ponieważ zbiór $\mathrm{Taut}(\Phi)$ jest rozstrzygalny (jako „izomorficzny" ze zbiorem tautologii jednoargumentowego rachunku kwantyfikatorów), więc rozstrzygalne są również wszystkie rozpatrywane przez nas rachunki nazw.

LITERATURA

[1] Kotarbiński T., *Elementy teorii poznania, logiki formalnej i metodologii nauk*, wyd. 2, Wrocław, 1961.

[2] Pietruszczak A., *Standardowe rachunki nazw z funktorem Leśniewskiego*, w tym zeszycie.

[3] Słupecki J., *Uwagi o sylogistyce Arystotelesa*, Annales UMCS, Lublin 1946, vol. 1/3, (sectio F).

[5] Jak pokazano w [2] przypis 5, dopuszczenie interpretacji o pustym uniwersum nie ma wpływu na wielkość zbioru $\mathrm{Taut}(\Sigma)$.