Pietruszczak, Andrzej

Standardowe rachunki nazw z funktorem Leśniewskiego

Acta Universitatis Nicolai Copernici. Logika 1 (224), 5-29

1991

ACTA UNIVERSITATIS NICOLAI COPERNICI
LOGIKA I — NAUKI HUMANISTYCZNO-SPOŁECZNE — ZESZYT 224 — 1991

Katedra Logiki

Andrzej Pietruszczak

STANDARDOWE RACHUNKI NAZW Z FUNKTOREM LEŚNIEWSKIEGO

Do standardowych zaliczam te rachunki nazw, w alfabecie których nie występują kwantyfikatory wiążące zmienne nazwowe. Zatem nie zaliczę do nich ontologii Leśniewskiego, w której właściwości jedynego funktora pierwotnego (spójki 'jest') oraz definicje innych funktorów wyrażane są za pomocą kwantyfikatorów. W rachunkach nazw z kwantyfikatorami występują znane trudności z ich interpretacją.

1. WPROWADZENIE DO METATEORII RACHUNKU NAZW

Zbiory formuł badanych przez nas rachunków tworzymy za pomocą metody schematów logicznych. Metoda ta jest omówiona szerzej między innymi w [1], [2], [3], [4] i [6]. Możemy przyjąć, że schematy zdaniowe powstają wprost ze zdań języka naturalnego, na podstawie analizy ich struktury składniowej (powierzchniowej). Otrzymane w ten sposób schematy przydatne są w określeniu relacji wynikania pomiędzy zdaniami, w których składowymi zdaniami atomowymi są zdania kategoryczne, zdania jednostkowe w sensie Leśniewskiego oraz tzw. zdania egzystencjalne (rozważane w ontologii Leśniewskiego).

Niech 'S', 'P', 'M', 'S_1', 'S_2', 'S_3', ... itd. będą literami schematycznymi (tzw. zmiennymi nazwowymi) reprezentującymi (w sensie występowania zamiast) dowolne nazwy generalne języka naturalnego[1]. Zbiór tych liter oznaczy-

[1] Używam terminu 'nazwa generalna' zgodnie z „Małą encyklopedią logiki". Zatem nazwa generalna to taka „nazwa, która w zdaniu atomowym o budowie podmiotowo-orzecznikowej nadaje się na orzecznik. Nazwa generalna może być ogólna [tj. mieć więcej niż jeden desygnat (A. P.)], jednostkowa (tu należą deskrypcje ...) [tj. mieć dokładnie jeden desygnat (A. P.)] lub pusta [tj. nie mieć desygnatu (A. P.)]" (s. 183). Zgodnie z tym nazwy generalne na-

my przez '**N**'. Przyjmijmy, że litery '$\underline{S}$' '$\underline{P}$' oraz '$\underline{M}$' (z indeksami lub bez) są zmiennymi syntaktycznymi (tzw. metajęzykowymi) przebiegającymi zbiór **N**.

Niech 'a', 'i', 'e', 'o', 'ε' (zbiór tych symboli oznaczymy przez '$\mathbf{F}^2$') 'ex', 'ex!' oraz 'sol' (zbiór tych symboli oznaczymy przez '$\mathbf{F}^1$' i $\mathbf{F} = \mathbf{F}^1 \cup \mathbf{F}^2$) będą symbolizować odpowiednio funktory 'każde...jest...', 'pewne...jest...', 'żadne... nie jest...', 'pewne...nie jest...', '...jest...', 'istnieje przynajmniej jedno...', 'istnieje dokładnie jedno...' oraz 'co najwyżej jedno istnieje ...'

Niech $F_1 \subset \mathbf{F}^1$ oraz $F_2 \subset \mathbf{F}^2$. Wtedy zbiorem formuł zdaniowych wyznaczonym przez symbole z $F_1 \cup F_2$ jest **S** będący najmniejszym zbiorem spełniającym warunki:

— jeżeli $\underline{S} \in \mathbf{N}$ i $\delta \in F_1$, to $\ulcorner \delta\underline{S} \urcorner \in \mathbf{S}$,
— jeżeli $\underline{S}, \underline{P} \in \mathbf{N}$ i $\delta \in F_2$, to $\ulcorner \underline{S}\delta\underline{P} \urcorner \in \mathbf{S}$,
— jeżeli $\sigma \in \mathbf{S}$, to $\ulcorner \neg\sigma \urcorner \in \mathbf{S}$,
— jeżeli $\sigma_1, \sigma_2 \in \mathbf{S}$ i $\S \in \{`\&', `\vee', `\rightarrow', `\leftrightarrow'\}$, to $\ulcorner (\sigma_1 \S \sigma_2) \urcorner \in \mathbf{S}$,

gdzie '$\neg$', '$\vee$', '$\rightarrow$', '$\leftrightarrow$' symbolizują odpowiednio funktory zdaniotwórcze negacji, koniunkcji, alternatywy, implikacji materialnej i równoważności materialnej, rozumiane w tej pracy w sposób klasyczny.

Zbiór **S** służy do wyrażania tych związków logicznych pomiędzy zdaniami, które zależą jedynie od interpretacji funktorów reprezentowanych przez symbole z $F_1 \cup F_2$. Przy budowaniu danego rachunku nazw istotne jest założenie, czy przy stosowaniu jego tez dopuszczalne będzie podstawianie nazw pustych języka naturalnego.

Teoriomnogościową eksplikacją pojęcia podstawiania nazw za reprezentujące je litery, używaną w badaniach semantycznych, będzie pojęcie tzw. teoriomnogościowej interpretacji liter z **N**. Interpretacją liter z **N** jest dowolna para uporządkowana $\langle U, D \rangle$, w której U jest zbiorem (uniwersum interpretacji), zaś D jest funkcją interpretującą przyporządkowującą każdej literze ze zbioru **N** pewien podzbiór zbioru U[2].

---

dają się również na podmiot i orzecznik w zdaniach kategorycznych. Za Leśniewskim przyjmujemy, że nazwy generalne nadają się również na podmiot w zdaniu „atomowym o budowie podmiotowo-orzecznikowej".

S. Leśniewski nie stosował podziału nazw na indywidualne i generalne, lecz posługiwał się jedną kategorią nazw obejmującą oba rodzaje. Zatem dopuszczał, aby nazwy indywidualne występowały w podmiotach zdań kategorycznych oraz w orzecznikach wszystkich rozważanych zdań. Kwestia dopuszczalności nazw indywidualnych za litery schematyczne nie ma wpływu na zagadnienia formalne związane z rachunkami nazw. Dotyczy ona tylko kwestii stosowania tez tych rachunków.

[2] Konkretne podstawienie wyrażeń języka naturalnego za litery z **N**, przyporządkowuje dowolnej literze $\underline{S}$ pewną nazwę generalną v. Niech $Z(\mathrm{v})$ będzie zakresem nazwy v. Wtedy otrzymujemy ciąg odwzorowań $\underline{S} \mapsto \mathrm{v} \mapsto Z(\mathrm{v})$. Ponieważ we wszystkich określeniach semantycznych istotną rolę odgrywają jedynie zakresy nazw a nie same nazwy, więc w rozważaniach semantycznych (których nie należy mylić z kwestią stosowania rachunków nazw) możemy zrezygnować z podstawiania konkretnych nazw, przyporządkowując bezpośrednio literze $\underline{S}$ zbiór $D(\underline{S})$.

Każdy funktor reprezentowany przez jakiś symbol z **F** bądź któryś z symboli '$\neg$', '&, '$\vee$', '$\rightarrow$', '$\leftrightarrow$', traktujemy jako stałą logiczną o ustalonej interpretacji związanej z przyjętą logiką. Interpretacja ta polega na jednolitym przyporządkowaniu dowolnej interpretacji $I = \langle U, D \rangle$ pewnego podzbioru VER_I (**S**) zbioru **S**. Przyporządkowania tego dokonujemy w następujący sposób indukcyjny: dla dowolnych $\underline{\mathrm{S}}$, $\underline{\mathrm{P}}$ z **N** i σ, σ_1, σ_2 z **S**

$$
\begin{array}{lll}
\ulcorner \mathrm{ex}\underline{\mathrm{S}} \urcorner \in \mathrm{VER}_I(\mathbf{S}) & \text{wtw}^3 & D(\underline{\mathrm{S}}) \neq \varnothing \\
\ulcorner \mathrm{ex!}\underline{\mathrm{S}} \urcorner \in \mathrm{VER}_I(\mathbf{S}) & \text{wtw} & \mathrm{Card}\ D(\underline{\mathrm{S}}) = 1^4 \\
\ulcorner \mathrm{sol}\,\underline{\mathrm{S}} \urcorner \in \mathrm{VER}_I(\mathbf{S}) & \text{wtw} & \mathrm{Card}\ D(\underline{\mathrm{S}}) \leqslant 1 \\
\ulcorner \underline{\mathrm{S}}\,\mathrm{a}\,\underline{\mathrm{P}} \urcorner \in \mathrm{VER}_I(\mathbf{S}) & \text{wtw} & D(\underline{\mathrm{S}}) \subset D(\underline{\mathrm{P}}) \\
\ulcorner \underline{\mathrm{S}}\,\mathrm{i}\,\underline{\mathrm{P}} \urcorner \in \mathrm{VER}_I(\mathbf{S}) & \text{wtw} & D(\underline{\mathrm{S}}) \cap D(\underline{\mathrm{P}}) \neq \varnothing \\
\ulcorner \underline{\mathrm{S}}\,\mathrm{e}\,\underline{\mathrm{P}} \urcorner \in \mathrm{VER}_I(\mathbf{S}) & \text{wtw} & D(\underline{\mathrm{S}}) \cap D(\underline{\mathrm{P}}) = \varnothing \\
\ulcorner \underline{\mathrm{S}}\,\mathrm{o}\,\underline{\mathrm{P}} \urcorner \in \mathrm{VER}_I(\mathbf{S}) & \text{wtw} & D(\underline{\mathrm{S}}) \setminus D(\underline{\mathrm{P}}) \neq \varnothing \\
\ulcorner \underline{\mathrm{S}}\,\varepsilon\,\underline{\mathrm{P}} \urcorner \in \mathrm{VER}_I(\mathbf{S}) & \text{wtw} & \mathrm{Card}\ D(\underline{\mathrm{S}}) = 1 \ \text{ i } \ D(\underline{\mathrm{S}}) \subset D(\underline{\mathrm{P}}) \\
\ulcorner \neg\sigma \urcorner \in \mathrm{VER}_I(\mathbf{S}) & \text{wtw} & \sigma \notin \mathrm{VER}_I(\mathbf{S}) \\
\ulcorner (\sigma_1 \,\&\, \sigma_2) \urcorner \in \mathrm{VER}_I(\mathbf{S}) & \text{wtw} & \sigma_1 \in \mathrm{VER}_I(\mathbf{S}) \ \text{ i } \ \sigma_2 \in \mathrm{VER}_I(\mathbf{S}) \\
\ulcorner (\sigma_1 \vee \sigma_2) \urcorner \in \mathrm{VER}_I(\mathbf{S}) & \text{wtw} & \sigma_1 \in \mathrm{VER}_I(\mathbf{S}) \ \text{ lub } \ \sigma_2 \in \mathrm{VER}_I(\mathbf{S}) \\
\ulcorner (\sigma_1 \rightarrow \sigma_2) \urcorner \in \mathrm{VER}_I(\mathbf{S}) & \text{wtw} & \sigma_1 \notin \mathrm{VER}_I(\mathbf{S}) \ \text{ lub } \ \sigma_2 \in \mathrm{VER}_I(\mathbf{S}) \\
\ulcorner (\sigma_1 \leftrightarrow \sigma_2) \urcorner \in \mathrm{VER}_I(\mathbf{S}) & \text{wtw} & \sigma_1, \sigma_2 \in \mathrm{VER}_I(\mathbf{S}) \ \text{ lub } \ \sigma_1, \sigma_2 \notin \mathrm{VER}_I(\mathbf{S}).
\end{array}
$$

Zbiór $\mathrm{VER}_I(\mathbf{S})$ nazywamy 'zbiorem formuł z **S** prawdziwych w interpretacji I liter z **N**'.

W zbiorze $2^{\mathbf{S}} \times \mathbf{S}$ określimy relację konsekwencji semantycznej $\models$ warunkiem: dla π zawartego w **S** i σ z **S**

$\pi \models \sigma$ wtw dla każdej interpretacji I liter z **N** takiej, że $\pi \subset \mathrm{VER}_I(\mathbf{S})$, również $\sigma \in \mathrm{VER}_I(\mathbf{S})$.

Formuła σ z **S** jest tautologią wtw $\varnothing \models \sigma$, tj. gdy $\sigma \in \mathrm{VER}_I(\mathbf{S})$ dla każdej interpretacji I liter z **N**[5]. Przez 'Taut (**S**)' oznaczymy zbiór wszystkich tautologii należących do zbioru **S**.

---

[3] 'wtw' jest skrótem wyrażenia 'wtedy i tylko wtedy, gdy'.

[4] Card X to moc zbioru X; 'Card $X = 1$' znaczy 'zbiór X jest jednoelementowy' zaś 'Card $X \leqslant 1$' znaczy 'zbiór X jest pusty lub jednoelementowy'.

[5] Wyróżnienie interpretacji z niepustym uniwersum jest istotne tylko dla formuł, w których występują symbole reprezentujące nazwę uniwersalną (np. 'V') lub negację przynazwową (np. 'n'). Przykładowo formuły 'ViV', 'exS $\vee$ exnS' oraz '$\neg$(SanS & nSaS)' są prawdziwe w każdej interpretacji o niepustym uniwersum, lecz są fałszywe, gdy $U = \varnothing$, gdyż wtedy D('V'): $= U = \varnothing$ oraz D('nS'): $= U \setminus D(\underline{\mathrm{S}}) = \varnothing \setminus \varnothing = \varnothing$. Jeżeli σ z **S** (wyznaczonego przez pewne symbole z **F**) jest prawdziwa w każdej interpretacji o niepustym uniwersum, to σ jest również prawdziwa w interpretacji $\langle \varnothing, D_\varnothing \rangle$, gdzie $D_\varnothing : \underline{\mathrm{S}} \mapsto \varnothing$. Istotnie, na mocy założenia σ jest prawdziwa w interpretacji $\langle U, D_\varnothing \rangle$ dla dowolnego $U \neq \varnothing$.

Inna sytuacja jest w przypadku występowania 'V' lub 'n', gdyż dla $U \neq \varnothing$, $D_\varnothing$('V'): $= U \neq \varnothing$ oraz $D_\varnothing$('n$\underline{\mathrm{S}}$'): $= U \setminus D_\varnothing$('$\underline{\mathrm{S}}$') $= U \setminus \varnothing \neq \varnothing$, więc obraz rozszerzonej funkcji $D_\varnothing$ nie równa się $\{\varnothing\}$.

Niech $\delta \in \mathbf{F}^1$ (odp. $\mathbf{F}^2$) oraz niech $\delta_1, \ldots, \delta_n \in \mathbf{F}$ i będą różne od δ. Mówimy że funktor reprezentowany przez symbol δ jest wyrażany w zbiorze $\mathbf{S}$, wyznaczonym przez $\delta_1, \ldots, \delta_n$, przez funktory reprezentowane przez stałe $\delta_{i_1}, \ldots, \delta_{i_m}$ $(1 \leqslant i_1, \ldots, i_m \leqslant n)$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje nie będąca tautologią formuła σ należąca do $\mathbf{S}$, w której występują symbole $\delta_{i_1}, \ldots, \delta_{i_m}$ oraz litera 'S' (odp. 'S' oraz 'P'), lecz nie występują inne symbole z $\mathbf{F}$ i litery z $\mathbf{N}$, oraz taka, że formuła $\ulcorner \delta S \leftrightarrow \sigma \urcorner$ (odp. $\ulcorner S \delta P \leftrightarrow \sigma \urcorner$) jest tautologią. O symbolu δ mówimy wtedy, że jest definiowany przez symbole $\delta_{i_l}, \ldots, \delta_{i_m}$ w zbiorze $\mathbf{S}$.

Wprowadzamy umowę, że dla $\delta_l, \ldots, \delta_k \in \mathbf{F}^2$ $(k \geqslant l)$ i $\varrho_l, \ldots, \varrho_m \in \mathbf{F}^1$ $(m \geqslant 0)$ zbiór $\mathbf{S}$ wyznaczony przez symbole $\delta_l, \ldots, \delta_k, \varrho_l, \ldots, \varrho_m$ oznaczymy przez $\ulcorner \Sigma^{\delta_1, \ldots, \delta_k, \varrho_1, \ldots, \varrho_m} \urcorner$. W przypadku, gdy $\{\delta_l, \ldots, \delta_k, \varrho_l, \ldots, \varrho_m\} = \mathbf{F}$ zbiór $\mathbf{S}$ oznaczymy również przez 'Σ'. Zatem przez $\ulcorner \Sigma^{\delta_1, \ldots, \delta_k, \varrho_1, \ldots, \varrho_m} \urcorner$ oznaczymy zbiór tych formuł z Σ, w których nie występują symbole ze zbioru $\mathbf{F} \setminus \{\delta_l, \ldots, \delta_k, \varrho_l, \ldots, \varrho_m\}$.

Przy powyższych oznaczeniach łatwo zauważyć, że przykładowo 'ex' jest definiowalny w zbiorze Σ^{i}, 'ex!' jest definiowalny w zbiorach $\Sigma^{\mathrm{i, sol}}$, $\Sigma^{\mathrm{ex, sol}}$ i Σ^{ε}, zaś 'sol' w zbiorach $\Sigma^{\mathrm{i}, \varepsilon}$, $\Sigma^{\mathrm{ex, ex!}}$, $\Sigma^{\mathrm{i, ex!}}$ i $\Sigma^{\mathrm{ex}, \varepsilon}$, gdyż poniższe formuły są tautologiami:

(def ex)	$\mathrm{exS} \leftrightarrow \mathrm{SiS}$
(def_1 ex!)	$\mathrm{ex!S} \leftrightarrow (\mathrm{exS} \,\&\, \mathrm{solS})$
(def_2 ex!)	$\mathrm{ex!S} \leftrightarrow (\mathrm{SiS} \,\&\, \mathrm{solS})$
(def_3 ex!)	$\mathrm{ex!S} \leftrightarrow \mathrm{S} \varepsilon \mathrm{S}$
(def_1 sol)	$\mathrm{solS} \leftrightarrow (\neg \mathrm{exS} \vee \mathrm{ex!S})$
(def_2 sol)	$\mathrm{solS} \leftrightarrow (\neg \mathrm{SiS} \vee \mathrm{ex!S})$
(def_3 sol)	$\mathrm{solS} \leftrightarrow (\neg \mathrm{SiS} \vee \mathrm{S} \varepsilon \mathrm{S})$.

Podobnie 'o' jest definiowalny w Σ^{a}, 'e' w Σ^{i} oraz 'ε' jest definiowalny w zbiorach $\Sigma^{\mathrm{ex!, a}}$, $\Sigma^{\mathrm{ex!, i}}$, $\Sigma^{\mathrm{sol, i}}$ i $\Sigma^{\mathrm{a, ex, sol}}$, gdyż następujące formuły są tautologiami:

(def o)	$\mathrm{SoP} \leftrightarrow \neg \mathrm{SaP}$
(def e)	$\mathrm{SeP} \leftrightarrow \neg \mathrm{SiP}$
(def_1 ε)	$\mathrm{S} \varepsilon \mathrm{P} \leftrightarrow (\mathrm{ex!S} \,\&\, \mathrm{SaP})$
(def_2 ε)	$\mathrm{S} \varepsilon \mathrm{P} \leftrightarrow (\mathrm{exS} \,\&\, \mathrm{solS} \,\&\, \mathrm{SaP})$
(def_3 ε)	$\mathrm{S} \varepsilon \mathrm{P} \leftrightarrow (\mathrm{ex!S} \,\&\, \mathrm{SiP})$
(def_4 ε)	$\mathrm{S} \varepsilon \mathrm{P} \leftrightarrow (\mathrm{solS} \,\&\, \mathrm{SiP})$.

Niech $\mathbf{S}$ będzie wyznaczony przez symbole z pewnego podzbioru F zbioru $\mathbf{F}$. W zbiorze $\mathbf{2^S} \times \mathbf{S}$ określimy relację $\underset{\mathrm{S}}{\rhd}$ (wyprowadzalności) według poniższego schematu: dla dowolnego π zawartego w $\mathbf{S}$ oraz dowolnego σ z $\mathbf{S}$

$\pi \underset{\mathrm{S}}{\rhd} \sigma$ wtw istnieje ciąg $\langle \sigma_1, \ldots, \sigma_n \rangle$ formuł z $\mathbf{S}$, taki że $\sigma = \sigma_n$ oraz dla każdego $i \leqslant n: \sigma_i \in \pi$, lub σ_i jest podstawieniem jakiejś tautologii klasycznego rachunku zdań lub istnieją $j, k < i$ takie, że $\sigma_k = \ulcorner(\sigma_j \to \sigma_i)\urcorner$.

Identycznie jak dla rachunku zdań można dowieść, że:

(i) $\pi \cup \{\sigma_1\} \trianglerighteq_S \sigma_2$ wtw $\pi \trianglerighteq_S \ulcorner(\sigma_1 \rightarrow \sigma_2)\urcorner$,

(ii) jeżeli $\pi \trianglerighteq_S \sigma$ i $*$ jest dowolnym podstawieniem, to $\pi^* \trianglerighteq_S \sigma^*$ gdzie podstawieniem $*$ jest odwzorowanie z $\mathbf{N}$ w $\mathbf{N}$, oraz σ^* powstaje z σ po zamianie każdego egzemplarza każdej występującej w σ litery $\underline{S}$ z $\mathbf{N}$ na egzemplarz litery $\underline{S}^*$, zaś $\pi^* = \{\sigma^* : \sigma \in \pi\}$.

Niech sb będzie funkcją ze zbioru $\mathbf{S}$ w zbiór $\mathbf{2^S}$ określoną wzorem:
$sb(\sigma) := \{\sigma^* : * \text{ jest podstawieniem}\}$
zaś SB niech będzie funkcją z $\mathbf{2^S}$ w $\mathbf{2^S}$ określoną wzorem:

$$SB(\pi) := \bigcup_{\sigma \in \pi} sb(\sigma) = \{\sigma^* : \sigma \in \pi \text{ i } * \text{ jest podstawieniem}\}.$$

Funkcja SB ma własności: $\pi \subset SB(\pi)$, $SB(\pi) = SB(SB(\pi))$ oraz dla dowolnego podstawienia jest tak, że $SB(\pi)^* \subset SB(\pi)$.

W pracy tej będziemy zajmować się tzw. aksjomatycznymi rachunkami nazw. Rachunek nazw $\mathfrak{Z}$ zbudowany w zbiorze $\mathbf{S}$ jest wyznaczony przez wyróżnienie w tym zbiorze pewnego podzbioru $Ax_{\mathfrak{Z}}$, tzw. zbioru aksjomatów rachunku $\mathfrak{Z}$. W zbiorze $\mathbf{2^S} \times \mathbf{S}$ zdefiniujemy relację $\vdash_{\mathfrak{Z}}$ (wyprowadzenia danej formuły z jakiegoś zbioru formuł w rachunku $\mathfrak{Z}$) według poniższego schematu: dla dowolnego π zawartego w $\mathbf{S}$ i dowolnego σ z $\mathbf{S}$

$$\pi \vdash_{\mathfrak{Z}} \sigma \quad \text{wtw} \quad \pi \cup SB(Ax_{\mathfrak{Z}}) \trianglerighteq_S \sigma.$$

Łatwo można dowieść, że relacja $\vdash_{\mathfrak{Z}}$ ma własności:

(i′) $\pi \cup \{\sigma_1\} \vdash_{\mathfrak{Z}} \sigma_2$ wtw $\pi \vdash_{\mathfrak{Z}} \ulcorner(\sigma_1 \rightarrow \sigma_2)\urcorner$,

(ii′) jeżeli $\pi \vdash_{\mathfrak{Z}} \sigma$ i $*$ jest dowolnym podstawieniem, to $\pi^* \vdash_{\mathfrak{Z}} \sigma^*$

Mówimy, że formuła σ z $\mathbf{S}$ jest tezą rachunku $\mathfrak{Z}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\varnothing \vdash_{\mathfrak{Z}} \sigma$ (tj. $SB(Ax_{\mathfrak{Z}}) \trianglerighteq_S \sigma$). Przyjmijmy

$$\mathbf{V}(\mathfrak{Z}) := \{\sigma \in \mathbf{S} : \varnothing \vdash_{\mathfrak{Z}} \sigma\}.$$

Mówimy, że rachunek $\mathfrak{Z}$ zbudowany w $\mathbf{S}$ jest pełny wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego π zawartego w $\mathbf{S}$ i każdego σ z $\mathbf{S}$:

$$\pi \vdash_{\mathfrak{Z}} \sigma \quad \text{wtw} \quad \pi \models \sigma$$

Wtedy oczywiście $\mathbf{V}(\mathfrak{Z}) = \mathrm{Taut}(\mathbf{S})$.

Warunek wystarczający dla spełnienia implikacji prostej w równoważności definiującej pełność podaje poniższy lemat:

LEMAT 1. Niech $Ax_{\mathfrak{Z}} \subset \mathrm{Taut}(\mathbf{S})$. Wtedy
jeżeli $\pi \vdash_{\mathfrak{Z}} \sigma$, to $\pi \models \sigma$.

DOWÓD. Niech $\langle \sigma_1, \ldots, \sigma_n \rangle$ będzie wyprowadzeniem σ z π w rachunku $\mathfrak{Z}$ oraz niech I będzie dowolną interpretacją, przy której $\pi \subset \mathrm{VER}_I(\mathbf{S})$. Wtedy stosując indukcję po i $(1 \leqslant i \leqslant n)$, wykorzystując fakt, iż z $\sigma_j \in \mathrm{VER}_I(\mathbf{S})$ i $\ulcorner \sigma_j \to \sigma_i \urcorner \in \mathrm{VER}_I(\mathbf{S})$ wynika to, że $\sigma_i \in \mathrm{VER}_I(\mathbf{S})$ oraz fakt, że $SB(Ax_{\mathfrak{Z}}) \subset \mathrm{VER}_I(\mathbf{S})$, otrzymujemy tezę. □

Zbiór π formuł z $\mathbf{S}$ jest niesprzeczny w rachunku $\mathfrak{Z}$ wtedy i tylko wtedy, gdy nie istnieje taka formuła σ w $\mathbf{S}$, że zarówno $\pi \vdash_{\mathfrak{Z}} \sigma$ i $\pi \vdash_{\mathfrak{Z}} \ulcorner \neg \sigma \urcorner$. Jest oczywiste, że zbiór $\pi \cup \{\ulcorner \neg \sigma \urcorner\}$ jest sprzeczny wtedy i tylko wtedy, gdy $\pi \vdash_{\mathfrak{Z}} \sigma$. Udowodnimy teraz twierdzenie podające warunek wystarczający dla pełności danego rachunku nazw[6]:

TWIERDZENIE 1. Jeżeli $Ax_{\mathfrak{Z}} \subset \mathrm{Taut}(\mathbf{S})$ oraz dla każdego zbioru π zawartego w $\mathbf{S}$ i niesprzecznego w $\mathfrak{Z}$ istnieje taka interpretacja I, że $\pi \subset \mathrm{VER}_I(\mathbf{S})$, to rachunek $\mathfrak{Z}$ jest pełny.

DOWÓD. Załóżmy, że $\pi \vdash_{\mathfrak{Z}} \sigma$. Wtedy $\pi \models \sigma$ otrzymujemy z lematu 1.

Odwrotnie, niech $\pi \models \sigma$. Wtedy nie istnieje taka interpretacja I, że $\pi \cup \{\ulcorner \neg \sigma \urcorner\} \subset \mathrm{VER}_I(\mathbf{S})$. Zatem na mocy założenia zbiór $\pi \cup \{\ulcorner \neg \sigma \urcorner\}$ jest sprzeczny w $\mathfrak{Z}$. Stąd mamy $\pi \vdash_{\mathfrak{Z}} \sigma$. □

Rachunek $\mathfrak{Z}$ jest niesprzeczny wtedy i tylko wtedy, gdy zbiór $\varnothing$ jest niesprzeczny w $\mathfrak{Z}$. Jest to równoważne temu, że $\mathbf{V}(\mathfrak{Z}) \neq \mathbf{S}$. Poniższe twierdzenie podaje warunek wystarczający dla niesprzeczności danego rachunku nazw:

TWIERDZENIE 2. Jeżeli $Ax_{\mathfrak{Z}} \subset \mathrm{Taut}(\mathbf{S})$, to rachunek $\mathfrak{Z}$ jest niesprzeczny.

DOWÓD. Na mocy lematu 1 $\mathbf{V}(\mathfrak{Z}) \subset \mathrm{Taut}(\mathbf{S})$. Ponieważ dla dowolnego σ nieprawda, że zarazem $\sigma \in \mathrm{Taut}(\mathbf{S})$ i $\ulcorner \neg \sigma \urcorner \in \mathrm{Taut}(\mathbf{S})$, więc $\mathbf{V}(\mathfrak{Z}) \neq \mathbf{S}$. □

Zbiór π zawarty w $\mathbf{S}$ jest maksymalny w $\mathfrak{Z}$ wtedy i tylko wtedy, gdy π jest niesprzeczny w $\mathfrak{Z}$ oraz dla dowolnej formuły σ z $\mathbf{S}$ nie należącej do π zbiór $\pi \cup \{\sigma\}$ jest sprzeczny w $\mathfrak{Z}$. Dowolny maksymalny w $\mathfrak{Z}$ zbiór π ma następujące własności: dla każdego σ, σ_1, σ_2 z $\mathbf{S}$

(I) $\pi \vdash_{\mathfrak{Z}} \sigma$ wtw $\sigma \in \pi$

(II) $\mathbf{V}(\mathfrak{Z}) \subset \pi$

[6] Logika tradycyjna ograniczała stosowanie swoich praw do nazw niepustych. Zatem odpowiednie dla niej będą takie teoriomnogościowe eksplikacje pojęć semantycznych, w których dopuszczalne są jedynie tzw. interpretacje tradycyjne. Będą to te interpretacje $\langle U, D \rangle$, w których $U \neq \varnothing$ oraz wartościami funkcji D są jedynie zbiory niepuste. W zbiorze $\mathbf{2^S} \times \mathbf{S}$ określamy relację tradycyjnej konsekwencji semantycznej $\models_t$, dopuszczając w definicji relacji $\models$ tylko interpretacje tradycyjne. Podobnie, ograniczając interpretacje do tradycyjnych, określamy zbiór $\mathrm{Taut}_t(\mathbf{S})$ tautologii tradycyjnych należących do zbioru $\mathbf{S}$. Oczywiste jest, że dla każdego zbioru $\mathbf{S}$, $\models \subset \models_t$ oraz $\mathrm{Taut}(\mathbf{S}) \subset \mathrm{Taut}_t(\mathbf{S})$. Dla niektórych zbiorów $\mathbf{S}$ prawdziwe są również inkluzje odwrotne.

Oczywiste jest, że jeżeli $Ax_{\mathfrak{Z}} \subset \mathrm{Taut}_t(\mathbf{S})$ i $\pi \vdash_{\mathfrak{Z}} \sigma$, to $\pi \models_t \sigma$. Mówimy, że rachunek $\mathfrak{Z}$ jest pełny w sensie tradycyjnym, gdy $\pi \vdash_{\mathfrak{Z}} \sigma$ wtw $\pi \models_t \sigma$. Jeżeli $Ax_{\mathfrak{Z}} \subset \mathrm{Taut}_t(\mathbf{S})$ oraz dla każdego zbioru π niesprzecznego w $\mathfrak{Z}$ istnieje tradycyjna interpretacja I taka, że $\pi \subset \mathrm{VER}_I(\mathbf{S})$, to rachunek $\mathfrak{Z}$ jest pełny w sensie tradycyjnym.

(III)	$\ulcorner\neg\sigma\urcorner\in\pi$	wtw	nieprawda, że $\sigma\in\pi$
(IV)	$\ulcorner(\sigma_1\&\sigma_2)\urcorner\in\pi$	wtw	$\sigma_1\in\pi$ i $\sigma_2\in\pi$
(V)	$\ulcorner(\sigma_1\vee\sigma_2)\urcorner\in\pi$	wtw	$\sigma_1\in\pi$ lub $\sigma_2\in\pi$
(VI)	$\ulcorner(\sigma_1\rightarrow\sigma_2)\urcorner\in\pi$	wtw	nieprawda, że $\sigma_1\in\pi$ lub $\sigma_2\in\pi$
(VII)	$\ulcorner(\sigma_1\leftrightarrow\sigma_2)\urcorner\in\pi$	wtw	$\sigma_1,\sigma_2\in\pi$ lub $\sigma_1,\sigma_2\notin\pi$.

DOWÓD (I). Jeżeli $\sigma\notin\pi$, to wykorzystując fakt, iż π jest maksymalny w $\mathfrak{Z}$ dostajemy, że $\pi\cup\{\sigma\}$ jest sprzeczny w $\mathfrak{Z}$. Zatem $\pi\vdash_{\mathfrak{Z}}\ulcorner\neg\sigma\urcorner$. Stąd nieprawda, że $\pi\vdash_{\mathfrak{Z}}\sigma$. Implikacja odwrotna jest oczywista.

(II) Jeżeli $\sigma\in\mathbf{V}(\mathfrak{Z})$, to $\varnothing\vdash_{\mathfrak{Z}}\sigma$, więc również $\pi\vdash_{\mathfrak{Z}}\sigma$. Zatem na mocy (I) $\sigma\in\pi$.

(III) Implikacja prosta wynika z tego, iż π jest niesprzeczny w $\mathfrak{Z}$. Odwrotnie, jeżeli $\sigma\notin\pi$, to $\pi\cup\{\sigma\}$ jest sprzeczny w $\mathfrak{Z}$, więc $\pi\vdash_{\mathfrak{Z}}\ulcorner\neg\sigma\urcorner$. Zatem na mocy (I), $\ulcorner\neg\sigma\urcorner\in\pi$.

(IV) Niech $\ulcorner(\sigma_1\&\sigma_2)\urcorner\in\pi$. Ponieważ $\ulcorner(\sigma_1\&\sigma_2)\rightarrow\sigma_1\urcorner$ i $\ulcorner(\sigma_1\&\sigma_2)\rightarrow\sigma_2\urcorner$ są podstawieniami tautologii klasycznego rachunku zdań, więc $\pi\vDash_{\mathrm{S}}\sigma_1$ oraz $\pi\vDash_{\mathrm{S}}\sigma_2$. Zatem na mocy (I) $\sigma_1\in\pi$ oraz $\sigma_2\in\pi$. Odwrotnie niech $\sigma_1\in\pi$ i $\sigma_2\in\pi$. Ponieważ $\ulcorner\sigma_1\rightarrow(\sigma_2\rightarrow(\sigma_1\&\sigma_2))\urcorner$ jest podstawieniem tautologii klasycznego rachunku zdań, więc $\pi\vDash_{\mathrm{S}}\ulcorner\sigma_1\&\sigma_2\urcorner$. Zatem $\ulcorner\sigma_1\&\sigma_2\urcorner\in\pi$.

(V) Jeżeli $\sigma_1\in\pi$ lub $\sigma_2\in\pi$, to ponieważ $\ulcorner\sigma_1\rightarrow(\sigma_1\vee\sigma_2)\urcorner$ oraz $\ulcorner\sigma_2\rightarrow(\sigma_1\vee\sigma_2)\urcorner$ są podstawieniami tautologii klasycznego rachunku zdań, więc $\pi\vDash_{\mathrm{S}}\ulcorner\sigma_1\vee\sigma_2\urcorner$. Zatem na mocy (I) $\ulcorner\sigma_1\vee\sigma_2\urcorner\in\pi$. Odwrotnie niech $\ulcorner\sigma_1\vee\sigma_2\urcorner\in\pi$. Ponieważ $\ulcorner(\sigma_1\vee\sigma_2)\rightarrow(\neg\sigma_1\rightarrow\sigma_2)\urcorner$ jest podstawieniem tautologii klasycznego rachunku zdań, więc jeżeli $\sigma_1\notin\pi$ (wtedy na mocy (III) $\ulcorner\neg\sigma_1\urcorner\in\pi$), to $\pi\vDash_{\mathrm{S}}\sigma_2$.

(VI) i (VII) Oczywisty wniosek z (III) i (IV), $\ulcorner(\sigma_1\rightarrow\sigma_2)\leftrightarrow\neg(\sigma_1\&\neg\sigma_2)\urcorner$ i $\ulcorner(\sigma_1\leftrightarrow\sigma_2)\leftrightarrow(\neg(\sigma_1\&\neg\sigma_2)\&\neg(\sigma_2\&\neg\sigma_1))\urcorner$ są podstawieniami tautologii klasycznego rachunku zdań. Również (V) podobnie wynikało z (III) i (IV). □

Udowodnimy teraz lemat Lindenbauma wykorzystywany w dowodzie faktu, iż dany rachunek spełnia podany w twierdzeniu 1 warunek wystarczający dla jego pełności:

LEMAT 2. Każdy niesprzeczny w $\mathfrak{Z}$ zbiór jest podzbiorem pewnego zbioru maksymalnego w $\mathfrak{Z}$.

DOWÓD. Niech π będzie dowolnym zbiorem niesprzecznym w $\mathfrak{Z}$. Zdefiniujemy nieskończony ciąg $\langle\pi_0,\pi_1,\dots,\pi_n,\dots\rangle$ podzbiorów zbioru **S** jak następuje:

Ponieważ zbiór **S** jest przeliczalny, więc możemy ustawić jego elementy w ciąg $\langle\sigma_1,\sigma_2,\dots,\sigma_n,\dots\rangle$. Niech $\pi_0:=\pi$ oraz niech

$$\pi_{n+1}:=\begin{cases}\pi_n\cup\{\sigma_{n+1}\}, & \text{gdy } \pi_n\cup\{\sigma_{n+1}\} \text{ jest niesprzeczny w } \mathfrak{Z}\\ \pi_n, & \text{w przeciwnym wypadku.}\end{cases}$$

Łatwo udowodnić, że zbiór $\pi_\omega := \bigcup_{i=0}^{\infty} \pi_i$ jest niesprzeczny w $\mathfrak{Z}$. Pokażemy, że π_ω jest maksymalny w $\mathfrak{Z}$. Załóżmy, że $\sigma_n \notin \pi_\omega$, wtedy zbiór $\pi_{n-1} \cup \{\sigma_n\}$ jest sprzeczny w $\mathfrak{Z}$ (inaczej σ_n należałoby do π_ω). Stąd istnieje formuła σ taka, że $\pi_{n-1} \cup \{\sigma_n\} \vdash_{\mathfrak{Z}} \sigma$ oraz $\pi_{n-1} \cup \{\sigma_n\} \vdash_{\mathfrak{Z}} \ulcorner\neg\sigma\urcorner$. Stąd na mocy $\pi_{n-1} \subset \pi_\omega$ wynika, że również $\pi_\omega \cup \{\sigma_n\}$ jest sprzeczny w $\mathfrak{Z}$. □

Rachunek $\mathfrak{Z}'$ jest rozszerzeniem rachunku $\mathfrak{Z}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathbf{S} \subset \mathbf{S}'$ oraz dla dowolnych $\pi \subset \mathbf{S}$ i $\sigma \in \mathbf{S}$, jeżeli $\pi \vdash_{\mathfrak{Z}} \sigma$, to $\pi \vdash_{\mathfrak{Z}'} \sigma$. Oczywiście aby tak było, potrzeba i wystarcza, aby $Ax_{\mathfrak{Z}} \subset \mathbf{V}(\mathfrak{Z}')$. Rachunki $\mathfrak{Z}$ i $\mathfrak{Z}'$ są równoważne, gdy $\mathfrak{Z}$ jest rozszerzeniem $\mathfrak{Z}'$ i $\mathfrak{Z}'$ jest rozszerzeniem $\mathfrak{Z}$. Wtedy $\mathbf{V}(\mathfrak{Z}') = \mathbf{V}(\mathfrak{Z})$.

Konserwatywnym rozszerzeniem rachunku $\mathfrak{Z}$ jest takie rozszerzenie $\mathfrak{Z}'$ rachunku $\mathfrak{Z}$, że dla dowolnych $\pi \subset \mathbf{S}$ i $\sigma \in \mathbf{S}$, jeżeli $\pi \vdash_{\mathfrak{Z}'} \sigma$, to $\pi \vdash_{\mathfrak{Z}} \sigma$. Wtedy $\mathbf{V}(\mathfrak{Z}) = \mathbf{V}(\mathfrak{Z}') \cap \mathbf{S}$. Wprost z definicji wynikają lematy:

LEMAT 3a. Jeżeli $\mathfrak{Z}'$ jest konserwatywnym rozszerzeniem $\mathfrak{Z}$ i $\mathfrak{Z}'$ jest pełny, to również $\mathfrak{Z}$ jest pełny.

3b. Niech $\mathbf{S} \subset \mathbf{S}'$. Jeżeli rachunki $\mathfrak{Z}'$ zbudowany w $\mathbf{S}'$ i $\mathfrak{Z}$ zbudowany w $\mathbf{S}$ są pełne, to $\mathfrak{Z}'$ jest konserwatywnym rozszerzeniem rachunku $\mathfrak{Z}$.

Niech $\mathbf{S}$ będzie dowolnym zbiorem formuł wyznaczonym przez symbole ze zbioru F zawartego w $\mathbf{F}$. Dla uproszczenia rozważań zakładamy, że dowolny rachunek nazw $\mathfrak{Z}$ zbudowany w zbiorze $\mathbf{S}$ ma niepusty zbiór aksjomatów, do którego nie należą podstawienia tautologii klasycznego rachunku zdań, oraz ponadto każdy symbol z F występuje w co najmniej jednym aksjomacie rachunku $\mathfrak{Z}$.

Mówimy, że symbol δ z $\mathbf{F}^1$ (odp. $\mathbf{F}^2$) jest zdefiniowany w rachunku $\mathfrak{Z}$ wtedy i tylko wtedy, gdy σ występuje jedynie w tych aksjomatach rachunku $\mathfrak{Z}$, które mają następujące własności:

— mają postać $\ulcorner\delta\underline{S} \leftrightarrow \sigma\urcorner$ (odp. $\ulcorner\underline{S}\delta\underline{P} \leftrightarrow \sigma\urcorner$), gdzie $\underline{S} \in \mathbf{N}$ (odp. $\underline{S}$, $\underline{P} \in \mathbf{N}$ i $\underline{S} \neq \underline{P}$), zaś σ jest formułą z $\mathbf{S}$, w której występuje $\underline{S}$ (odp. $\underline{S}$ i $\underline{P}$), lecz nie występują inne litery z $\mathbf{N}$ oraz symbol δ,

— jeżeli formuły $\ulcorner\delta\underline{S}_1 \leftrightarrow \sigma_1\urcorner$ i $\ulcorner\delta\underline{S}_2 \leftrightarrow \sigma_2\urcorner$ (odp. $\ulcorner\underline{S}_1\delta\underline{P}_1 \leftrightarrow \sigma_1\urcorner$ i $\ulcorner\underline{S}_2\delta\underline{P}_2 \leftrightarrow \sigma_2\urcorner$) należą do omawianych aksjomatów, to różnią się jedynie tym, że jedna jest podstawieniem drugiej.

Formuły o postaci powyżej omówionej nazywamy definicjami w rachunku $\mathfrak{Z}$.

Niech $F_1, F_2 \subset \mathbf{F}$ oraz $F_1 \cap F_2 = \varnothing$. Niech $\mathfrak{Z}$ będzie rachunkiem zbudowanym w zbiorze $\mathbf{S}$ wyznaczonym przez symbole z F_1, zaś $\mathfrak{Z}'$ będzie rachunkiem zbudowanym w zbiorze $\mathbf{S}'$ wyznaczonym przez symbole z $F_1 \cup F_2$. Mówimy, że $\mathfrak{Z}'$ jest definicyjnym rozszerzeniem rachunku $\mathfrak{Z}$, gdy $Ax_{\mathfrak{Z}'}$ jest sumą zbioru $Ax_{\mathfrak{Z}}$ i zbioru definicji wszystkich symboli z F_2 w rachunku $\mathfrak{Z}'$.

Zdefiniujmy indukcyjnie funkcję t (tłumaczenia z $\mathfrak{Z}'$ na $\mathfrak{Z}$) ze zbioru $\mathbf{S}'$ na zbiór $\mathbf{S}$, gdy $\mathfrak{Z}'$ jest definicyjnym rozszerzeniem $\mathfrak{Z}$:

— jeżeli σ jest formułą atomową w $\mathbf{S}$, to $t(\sigma) = \sigma$,

— jeżeli σ jest formułą atomową należącą do $\mathbf{S}' \setminus \mathbf{S}$ (tj. zbudowana jest za pomocą symbolu zdefiniowanego w $\mathfrak{Z}'$), to $t(\sigma) = \sigma^t$, gdzie σ^t jest tak dobrana, aby formuła $\ulcorner \sigma \leftrightarrow \sigma^t \urcorner$ była podstawieniem pewnej definicji w $\mathfrak{Z}'$,

— $t(\ulcorner \neg \sigma \urcorner) = \ulcorner \neg t(\sigma) \urcorner$ dla σ z $\mathbf{S}'$

— $t(\ulcorner \sigma_1 \S \sigma_2 \urcorner) = \ulcorner t(\sigma_1) \S t(\sigma_2) \urcorner$ dla $\S$ z {'&', '$\vee$', '$\rightarrow$', '$\leftrightarrow$'}, σ_1, σ_2 z $\mathbf{S}'$

Funkcja t ma następujące właściwości syntaktyczne:

LEMAT 4. Dla każdego π zawartego w $\mathbf{S}'$ i σ z $\mathbf{S}'$:

a) formuła $\ulcorner \sigma \leftrightarrow t(\sigma) \urcorner$ jest tezą rachunku $\mathfrak{Z}'$,

b) $\pi \vdash_{\mathfrak{Z}'} \sigma$ wtw $t(\pi) \vdash_{\mathfrak{Z}} t(\sigma)$.

DOWÓD 4a. Niech φ będzie dowolną formułą rachunku zdań zbudowaną ze zmiennych zdaniowych $p_1, ..., p_n$, zaś $\varphi[p_1/q_1, ..., p_n/q_n]$ niech będzie formułą rachunku zdań powstałą z φ po podstawieniu za każdy egzemplarz zmiennej p_i egzemplarza zmiennej q_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$, przy czym $p_i \neq q_j$ dla $i, j = 1, ..., n$. Wtedy formuła

$$(+) \qquad \ulcorner((p_1 \leftrightarrow q_1) \,\&\, ... \,\&\, (p_n \leftrightarrow q_n)) \rightarrow (\varphi \leftrightarrow \varphi[p_1/q_1, ..., p_n/q_n])$$

jest tautologią klasycznego rachunku zdań.

Dla każdej formuły σ z $\mathbf{S}'$ istnieją formuły atomowe $\sigma_1, ..., \sigma_n$ z $\mathbf{S}'$ i formuła rachunku zdań φ_σ zbudowana ze zmiennych $p_1, ..., p_n$ takie, że $\sigma = \varphi_\sigma[p_1/\sigma_1, ..., p_n/\sigma_n]$. Podstawmy w (+) dla $\varphi_\sigma: p_1/\sigma_1, ..., p_n/\sigma_n$, $q_1/t(\sigma_1), ..., q_n/t(\sigma_n)$. Otrzymamy wtedy formułę $\ulcorner((\sigma_1 \leftrightarrow t(\sigma_1)) \,\&\, ... \,\&\, (\sigma_n \leftrightarrow t(\sigma_n))) \rightarrow (\sigma \leftrightarrow t(\sigma))\urcorner$ należącą do $\mathbf{S}'$. Ponieważ formuła $\ulcorner \sigma_i \leftrightarrow t(\sigma_i) \urcorner$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ jest albo podstawieniem tautologii rachunku zdań '$p \leftrightarrow p$' albo podstawieniem definicji w rachunku $\mathfrak{Z}'$, więc $\ulcorner \sigma \leftrightarrow t(\sigma) \urcorner$ jest tezą rachunku $\mathfrak{Z}'$ gdyż jest wyprowadzalna z definicji w rachunku $\mathfrak{Z}'$.

4b. Niech $\pi \vdash_{\mathfrak{Z}'} \sigma$, tj. istnieje ciąg $\langle \sigma_1, ..., \sigma_n \rangle$ formuł z $\mathbf{S}'$ będący wyprowadzeniem σ z $\pi \cup SB(Ax_{\mathfrak{Z}'})$. Łatwo wykazać, że ciąg $\langle t(\sigma_1), ..., t(\sigma_n) \rangle$ formuł z $\mathbf{S}$ jest wyprowadzeniem $t(\sigma)$ ze zbioru $t(\pi) \cup SB(Ax_{\mathfrak{Z}})$. Wynika to z tego, iż dla każdego i $(1 \leqslant i \leqslant n)$: jeżeli $\sigma_i \in SB(Ax_{\mathfrak{Z}})$ (tj. $\sigma_i \in SB(Ax_{\mathfrak{Z}'})$, lecz nie jest definicją w $\mathfrak{Z}'$ ani podstawieniem definicji), to $t(\sigma_i) = \sigma_i$; jeżeli σ_i jest definicją w $\mathfrak{Z}'$ lub podstawieniem definicji, to $t(\sigma_i)$ jest podstawieniem tautologii '$p \leftrightarrow p$'; jeżeli $\sigma_i \in \pi$, to $t(\sigma_i) \in t(\pi)$; jeżeli istnieją takie $j, k < i$, że $\sigma_k = \ulcorner \sigma_j \rightarrow \sigma_i \urcorner$, to $t(\sigma_k) = t(\ulcorner \sigma_j \rightarrow \sigma_i \urcorner) = \ulcorner t(\sigma_j) \rightarrow t(\sigma_i) \urcorner$.

Odwrotnie, niech $\pi \subset \mathbf{S}'$, $\sigma \in \mathbf{S}'$ oraz $t(\pi) \vdash_{\mathfrak{Z}} t(\sigma)$. Wtedy istnieje skończony podzbiór $\{\sigma_1, ..., \sigma_k\}$ zbioru $\mathbf{S}'$ oraz ciąg $\langle \sigma'_1, ..., \sigma'_n \rangle$ formuł z $\mathbf{S}$ będący wyprowadzeniem $t(\sigma)$ ze zbioru $t(\{\sigma_1, ..., \sigma_k\}) \cup SB(Ax_{\mathfrak{Z}})$. Niech C_i będzie wyprowadzeniem formuły $\ulcorner \sigma_i \rightarrow t(\sigma_i) \urcorner$ $(1 \leqslant i \leqslant k)$, zaś C wyprowadzeniem $\ulcorner t(\sigma) \rightarrow \sigma \urcorner$ z definicji w rachunku $\mathfrak{Z}'$. Wtedy ciąg $\langle \sigma_1, ..., \sigma_k, \; C_1, ..., C_k, \sigma'_1, ..., \sigma'_n, C, \sigma \rangle$ jest wyprowadzeniem formuły σ z $\pi \cup SB(Ax_{\mathfrak{Z}'})$. $\square$

Dla π zawartego w **S** i σ należącego do **S** mamy $t(\pi) = \pi$ i $t(\sigma) = \sigma$. Zatem z lematu 4b wyciągamy wniosek:

WNIOSEK 1. Każde definicyjne rozszerzenie jest rozszerzeniem konserwatywnym.

Ponadto funkcja t ma następujące właściwości semantyczne:

LEMAT 5. Jeżeli wszystkie definicje są tautologiami, to dla każdego π zawartego w S′ i każdego σ z S′ mamy:

a) dla każdej interpretacji I:

$\sigma \in \mathrm{VER}_I(\mathbf{S}')$ wtw $t(\sigma) \in \mathrm{VER}_I(\mathbf{S})$

b) $\pi \models \sigma$ wtw $t(\pi) \models t(\sigma)$

stąd $\sigma \in \mathrm{Taut}(\mathbf{S}')$ wtw $t(\sigma) \in \mathrm{Taut}(\mathbf{S})$.

Z lematów 4b i 5b wynika wniosek:

WNIOSEK 2. Niech $\mathfrak{Z}'$ będzie definicyjnym rozszerzeniem rachunku $\mathfrak{Z}$. Wtedy $\mathfrak{Z}'$ jest pełny wtw $\mathfrak{Z}$ jest pełny i wszystkie definicje w rachunku $\mathfrak{Z}'$ są tautologiami.

Mówimy, że rachunki $\mathfrak{Z}_1$ i $\mathfrak{Z}_2$ są definicyjnie równoważne wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją ich definicyjne rozszerzenia wzajemnie równoważne. Z wniosku 2 otrzymujemy wniosek:

WNIOSEK 3. Jeżeli rachunki $\mathfrak{Z}_1$ i $\mathfrak{Z}_2$ są definicyjnie równoważne i wszystkie definicje użyte do rozszerzeń definicyjnych są tautologiami, to $\mathfrak{Z}_1$ jest pełny wtw $\mathfrak{Z}_2$ jest pełny.

Dalej omawiane będą tylko takie rachunki nazw, które są zbudowane w zbiorach formuł wyznaczonych przez pewne symbole z **F**, pomiędzy którymi występuje ‘ε’. Niektóre z tych zbiorów zawierać mogą inne wyznaczone przez takie symbole, do których nie należy już ‘ε’, lecz jest w nich definiowalny. Właśnie od tego przypadku zaczniemy nasze rozważania.

2. RACHUNKI ZE ZDEFINIOWANYM SYMBOLEM ‘ε’

Jak wiemy z części pierwszej, symbol ‘ε’ jest definiowalny w zbiorach $\Sigma^{\mathrm{a,\,ex!}}$, $\Sigma^{\mathrm{i,\,ex!}}$, $\Sigma^{\mathrm{a,\,ex,\,sol}}$ i $\Sigma^{\mathrm{i,\,sol}}$. Zatem jest również definiowalny w zbiorach $\Sigma^{\mathrm{a,\,i,\,ex!}}$ i $\Sigma^{\mathrm{a,\,i,\,sol}}$, w których są definiowalne również wszystkie pozostałe symbole z **F**. W wymienionych powyżej zbiorach zbudujemy rachunki, których zbiory tez pokrywać się będą odpowiednio ze zbiorami $\mathrm{Taut}(\Sigma^{\mathrm{a,\,ex!}})$, $\mathrm{Taut}(\Sigma^{\mathrm{i,\,ex!}})$, $\mathrm{Taut}(\Sigma^{\mathrm{a,\,ex,\,sol}})$, $\mathrm{Taut}(\Sigma^{\mathrm{i,\,sol}})$, $\mathrm{Taut}(\Sigma^{\mathrm{a,\,i,\,ex!}})$ i $\mathrm{Taut}(\Sigma^{\mathrm{a,\,i,\,sol}})$. Na mocy wniosku 2, definicyjne rozszerzenia tych rachunków wykonane za pomocą tautologii (def ex)–(def$_4$ ε), również są pełne.

§ 1. W zbiorze $\Sigma^{\mathrm{a,\,ex!}}$ definiujemy symbol ‘ε’ za pomocą tautologii (def$_1$ ε).

W zbiorze tym zbudujemy rachunek $\mathbf{R}_{a,\,ex!}$, którego aksjomatami są poniższe tautologie[7]:

(1) SaS

(2) (SaM & MaP) $\to$ SaP

(3) (ex!S & SaP) $\to$ (PaS $\leftrightarrow$ ex!P)

(4) ($\neg$ex!S & SaP & ex!P) $\to$ SaM

Udowodnimy, że $\mathbf{R}_{a,\,ex!}$ spełnia warunek wystarczający dla pełności podany w twierdzeniu 1:

LEMAT (o interpretacji liter z **N**). Dla każdego zbioru π zawartego w $\Sigma^{a,\,ex!}$ i niesprzecznego w $\mathbf{R}_{a,\,ex!}$ istnieje taka interpretacja I, że $\pi \subset \mathrm{VER}_I(\Sigma^{a,\,ex!})$.

DOWÓD. Niech π będzie dowolnym zbiorem zawartym w $\Sigma^{a,\,ex!}$ i niesprzecznym w $\mathbf{R}_{a,\,ex!}$. Na mocy lematu 2 istnieje pewien maksymalny w $\mathbf{R}_{a,\,ex!}$ zbiór π_ω zawierający π.

W zbiorze $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$ zdefiniujemy relację równoważności wzorem:

$$\underline{S} \underset{\pi_\omega}{\sim} \underline{P} \quad \text{wtw} \quad \ulcorner \underline{S}\mathrm{a}\underline{P} \;\&\; \underline{P}\mathrm{a}\underline{S} \urcorner \in \pi_\omega.$$

Z aksjomatów (1) i (2) otrzymujemy, że jest to relacja równoważności. Ponadto z aksjomatów (2) i (3) wynika, że jeżeli $\underline{S} \underset{\pi_\omega}{\sim} \underline{P}$, to $\ulcorner \mathrm{ex!}\underline{S} \urcorner \in \pi_\omega$ wtw $\ulcorner \mathrm{ex!}\underline{P} \urcorner \in \pi_\omega$ oraz dla każdego $\underline{M}$, $\ulcorner \underline{M}\mathrm{a}\underline{S} \urcorner \in \pi_\omega$ wtw $\ulcorner \underline{M}\mathrm{a}\underline{P} \urcorner \in \pi_\omega$ oraz $\ulcorner \underline{S}\mathrm{a}\underline{M} \urcorner \in \pi_\omega$ wtw $\ulcorner \underline{P}\mathrm{a}\underline{M} \urcorner \in \pi_\omega$. Niech $\underline{S}^\circ$ będzie klasą abstrakcji litery $\underline{S}$ w relacji $\underset{\pi_\omega}{\sim}$, tj. $\underline{S}^\circ := \{\underline{M} : \underline{M} \underset{\pi_\omega}{\sim} \underline{S}\}$, oraz niech $\mathbf{N}^\circ := \{\underline{S}^\circ : \underline{S} \in \mathbf{N}\}$.

Uniwersum szukanej interpretacji I_0 będzie zbiór $U_0 := \mathbf{N}^\circ \cup \{\alpha\}$, gdzie α jest dowolnym przedmiotem nie należącym do $\mathbf{N}^\circ$. Funkcję D_0 z $\mathbf{N}$ w $\mathbf{2}^{U_0}$ określimy w następujący sposób:

$$D_0(\underline{S}) := \begin{cases} \emptyset, \text{ gdy } \ulcorner \neg \mathrm{ex!}\underline{S} \urcorner \in \pi_\omega \text{ i istnieje takie } \underline{M}, \text{ że } \ulcorner \mathrm{ex!}\underline{M} \;\&\; \underline{S}\mathrm{a}\underline{M} \urcorner \in \pi_\omega \\ \{\underline{S}^\circ\}, \text{ gdy } \ulcorner \mathrm{ex!}\underline{S} \urcorner \in \pi_\omega \\ \{\underline{M}^\circ : \ulcorner \underline{M}\mathrm{a}\underline{S} \urcorner \in \pi_\omega\} \cup \{\alpha\}, \text{ gdy jest inaczej.} \end{cases}$$

Dla wykazania prawdziwości tezy wystarczyłoby pokazać, że $\pi_\omega \subset \mathrm{VER}_{I_0}(\Sigma^{a,\,ex!})$, jednak dowód będziemy przeprowadzać w sposób indukcyjny względem ilości spójników '$\neg$', '&', '$\vee$', '$\to$', '$\leftrightarrow$', a w krokach indukcyjnych potrzebna nam będzie inkluzja odwrotna.

Chcemy teraz pokazać, że $\ulcorner \underline{S}\mathrm{a}\underline{P} \urcorner \in \pi_\omega$ pociąga za sobą $D_0(\underline{S}) \subset D_0(\underline{P})$. Najpierw zauważmy, że jeżeli $\ulcorner \underline{S}\mathrm{a}\underline{P} \urcorner \in \pi_\omega$ i $D_0(\underline{P}) = \emptyset$, to również $D_0(\underline{S}) = \emptyset$. Istotnie, warunek $D_0(\underline{P}) = \emptyset$ pociąga za sobą to, że

---

[7] Łatwo pokazać, że rachunek $\mathbf{R}_a$ zbudowany w zbiorze Σ^a i oparty na aksjomatach (1) i (2), jest pełny w sensie tradycyjnym. W tym celu w dowodzie lematu o interpretacji liter z **N** dla $\mathbf{R}_a$ wystarczy przyjąć tradycyjną interpretację $I_0 = \langle U_0, D_0 \rangle$, gdzie $U_0 := \mathbf{N}$ oraz $D_0(\underline{S}) := \{\underline{M} : \ulcorner \underline{M}\mathrm{a}\underline{S} \urcorner \in \pi_\omega\}$. Stąd ponieważ (1) i (2) są tautologiami oraz $\models \subset \models_t$, na mocy lematu 1 otrzymujemy, że $\mathbf{R}_a$ jest również pełny. Zatem $\mathrm{Taut}(\Sigma^a) = \mathrm{Taut}_t(\Sigma^a)$.

$\ulcorner\neg ex!\underline{P}\urcorner\in\pi_\omega$ oraz istnieje takie $\underline{M}_0$, że $\ulcorner ex!\underline{M}_0\,\&\,\underline{P}a\underline{M}_0\urcorner\in\pi_\omega$. Wykorzystując własności (I)–(VII) zbioru π_ω oraz aksjomat (4) dostajemy $\ulcorner\underline{P}a\underline{S}\urcorner\in\pi_\omega$. A więc na mocy aksjomatu (3), z $\ulcorner\neg ex!\underline{P}\,\&\,\underline{S}a\underline{P}\,\&\,\underline{P}a\underline{S}\urcorner\in\pi_\omega$ otrzymujemy $\ulcorner\neg ex!\underline{S}\urcorner\in\pi_\omega$. Ponadto z założenia, że $\ulcorner\underline{S}a\underline{P}\urcorner\in\pi_\omega$ oraz aksjomatu (2) dostajemy $\ulcorner ex!\underline{M}_0\,\&\,\underline{S}a\underline{M}_0\urcorner\in\pi_\omega$. Zatem $D_0(\underline{S})=\varnothing$.

Niech $\ulcorner\underline{S}a\underline{P}\urcorner\in\pi_\omega$. Jeżeli $\underline{M}^0\in D_0(\underline{S})$, to z określenia funkcji D_0, relacji $\tilde{\pi}_\omega$ i z aksjomatu (1), mamy $\ulcorner\underline{M}a\underline{S}\urcorner\in\pi_\omega$. Zatem z założenia na mocy aksjomatu (2) dostajemy $\ulcorner\underline{M}a\underline{P}\urcorner\in\pi_\omega$. Musimy wykazać, że w przypadku tym $\underline{M}^0\in D_0(\underline{P})$. Wykazaliśmy już, że przy powyższych założeniach $D_0(\underline{P})\neq\varnothing$. Zatem mogą zachodzić tylko dwa przypadki:

1° $D_0(\underline{P})=\{\underline{P}^0\}$, tj. $\ulcorner ex!\underline{P}\urcorner\in\pi_\omega$: Wykażemy, że wtedy również $\ulcorner ex!\underline{S}\urcorner\in\pi_\omega$. Istotnie, w tym przypadku $\ulcorner ex!\underline{P}\,\&\,\underline{S}a\underline{P}\urcorner\in\pi_\omega$, więc z założenia, że $D_0(\underline{S})\neq\varnothing$ (oczywisty jest przypadek: $D_0(\underline{S})=\varnothing\subset D_0(\underline{P})$) oraz z określenia funkcji D_0 dostajemy $\ulcorner ex!\underline{S}\urcorner\in\pi_\omega$. Zatem z $\ulcorner ex!\underline{S}\,\&\,\underline{S}a\underline{P}\,\&\,ex!\underline{P}\urcorner\in\pi_\omega$ na mocy (3) otrzymujemy $\ulcorner\underline{P}a\underline{S}\urcorner\in\pi_\omega$ czyli $\underline{S}^0=\underline{P}^0$.

2° $D_0(\underline{P})=\{\underline{M}^0:\ulcorner\underline{M}a\underline{P}\urcorner\in\pi_\omega\}\cup\{\alpha\}$: W tym przypadku oczywiste jest, że $\underline{M}^0\in D_0(\underline{P})$.

Ponadto, jeżeli $\alpha\in D_0(\underline{S})$, to wykazaliśmy już, że $D_0(\underline{P})\neq\varnothing$. Dodatkowo na mocy określenia funkcji D_0, nie istnieje takie $\underline{M}$, że $\ulcorner ex!\underline{M}\,\&\,\underline{S}a\underline{M}\urcorner\in\pi_\omega$. Ale skoro $\ulcorner\underline{S}a\underline{P}\urcorner\in\pi_\omega$, więc $\ulcorner ex!\underline{P}\urcorner\notin\pi_\omega$. Stąd i z $D_0(\underline{P})\neq\varnothing$ mamy, że $\alpha\in D_0(\underline{P})$.

Odwrotnie, niech $D_0(\underline{S})\subset D_0(\underline{P})$. Zbadajmy dwa przypadki:

1° $D_0(\underline{S})=\varnothing$: Wtedy $\ulcorner\neg ex!\underline{S}\urcorner\in\pi_\omega$ oraz istnieje takie $\underline{M}$, że $\ulcorner ex!\underline{M}\,\&\,\underline{S}a\underline{M}\urcorner\in\pi_\omega$. Stąd na mocy aksjomatu (4), $\ulcorner\underline{S}a\underline{P}\urcorner\in\pi_\omega$.

2° $D_0(\underline{S})\neq\varnothing$: Wtedy na mocy (1), $\underline{S}^0\in D_0(\underline{S})$. Zatem na mocy założenia $\underline{S}^0\in D_0(\underline{P})$, czyli $\ulcorner\underline{S}a\underline{P}\urcorner\in\pi_\omega$ lub nawet $\underline{S}^0=\underline{P}^0$.

Zatem wykazaliśmy, że $\ulcorner\underline{S}a\underline{P}\urcorner\in\pi_\omega$ wtw $\ulcorner\underline{S}a\underline{P}\urcorner\in VER_{I_0}(\Sigma^{a,ex!})$.

Z określenia funkcji D_0 i z (1), wynika:

$$\ulcorner ex!\underline{S}\urcorner\in\pi_\omega \quad\text{wtw}\quad \mathrm{Card}\,D_0(\underline{S})=1 \quad\text{wtw}\quad \ulcorner ex!\underline{S}\urcorner\in VER_{I_0}(\Sigma^{a,ex!}).$$

Przez indukcję względem ilości symboli '$\neg$', '&', '$\vee$', '$\rightarrow$', '$\leftrightarrow$' w formule σ wykażemy, że $\sigma\in\pi_\omega$ wtw $\sigma\in VER_{I_0}(\Sigma^{a,ex!})$. Krok wyjściowy dla formuł atomowych został już udowodniony. Załóżmy, że nasze stwierdzenie jest prawdziwe dla każdej formuły, która ma mniej niż k symboli reprezentujących spójniki (hipoteza indukcyjna). Wykorzystując odpowiednie właściwości (II)–(VII) zbioru π_ω łatwo udowodnimy, że jest ono prawdziwe również dla każdej formuły mającej k spójników. □ [8]

---

[8] Stosując pewne uproszczenia w dowodzie, możemy wykazać, że rachunek $\mathbf{R}^{t}_{a,ex!}$ zbudowany w $\Sigma^{a,ex!}$ i oparty na (1), (2), '(ex!S & SaP & PaS) → ex!P' oraz tradycyjnej tautologii '(SaP & ex!P) → (ex!S & PaS)', jest pełny w sensie tradycyjnym. Na mocy lematu 3b, rachunki $\mathbf{R}_{a,ex!}$ i $\mathbf{R}^{t}_{a,ex!}$ są konserwatywnymi rozszerzeniami rachunku $\mathbf{R}_{a}$.

§ 2. W zbiorze $\Sigma^{a,\,ex,\,sol}$ definiujemy symbol ‘ε’ za pomocą tautologii (def_2 ε). Rachunek $\mathbf{R}_{a,\,ex,\,sol}$ zbudowany w zbiorze $\Sigma^{a,\,ex,\,sol}$ ma następujące aksjomaty będące tautologiami[9]: (1), (2) i

(5) $(\mathrm{ex}S \,\&\, SaP) \rightarrow \mathrm{ex}P$

(6) $\neg\mathrm{ex}S \rightarrow SaP$

(7) $(SaP \,\&\, \mathrm{sol}P) \rightarrow \mathrm{sol}S$

(8) $(\mathrm{ex}S \,\&\, SaP \,\&\, \mathrm{sol}P) \rightarrow PaS$

(9) $\neg\mathrm{ex}S \rightarrow \mathrm{sol}S$

LEMAT (o interpretacji liter z N). Dla każdego zbioru π zawartego w $\Sigma^{a,\,ex,\,sol}$ i niesprzecznego w $\mathbf{R}_{a,\,ex,\,sol}$ istnieje taka interpretacja I, że $\pi \subset \mathrm{VER}_I(\Sigma^{a,\,ex,\,sol})$.

DOWÓD. Niech π_ω będzie nadzbiorem maksymalnym w $\mathbf{R}_{a,\,ex,\,sol}$ dla niesprzecznego π. W zbiorze $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$ określamy relację $\underset{\pi_\omega}{\sim}$ identycznie jak w § 1. Uniwersum szukanej interpretacji I_0 jest również takie samo jak w § 1, zaś funkcję D_0 z $\mathbf{N}$ w $\mathbf{2}^{U_0}$ określimy wzorem:

$$D_0(\underline{S}) := \begin{cases} \varnothing, \text{ gdy } \ulcorner\neg\mathrm{ex}\underline{S}\urcorner \in \pi_\omega \\ \{\underline{S}^\circ\}, \text{ gdy } \ulcorner\mathrm{ex}\underline{S} \,\&\, \mathrm{sol}\underline{S}\urcorner \in \pi_\omega \\ \{\underline{M}^\circ : \ulcorner\underline{M}a\underline{S}\urcorner \in \pi_\omega\} \cup \{\alpha\}, \text{ w przeciwnym wypadku.} \end{cases}$$

Ponieważ dowód przeprowadzimy według identycznego schematu jak w § 1, więc udowodnimy jedynie wyjściowy krok indukcyjny dla formuł atomowych.

Chcemy pokazać, że $\ulcorner\underline{S}a\underline{P}\urcorner \in \pi_\omega$ pociąga $D_0(\underline{S}) \subset D_0(\underline{P})$. Jeżeli $\underline{M}^0 \in D_0(\underline{S})$, to z określenia funkcji D_0, relacji $\underset{\pi_\omega}{\sim}$ i z (1) otrzymujemy $\ulcorner\underline{M}a\underline{S}\urcorner \in \pi_\omega$. Musimy wykazać, że $\underline{M}^0 \in D_0(\underline{P})$. Istotnie, ponieważ z założenia $D_0(\underline{S}) \neq \varnothing$, więc $\ulcorner\mathrm{ex}\underline{S}\urcorner \in \pi_\omega$. Zatem na mocy (5) mamy $\ulcorner\mathrm{ex}\underline{P}\urcorner \in \pi_\omega$, tj. $D_0(\underline{P}) \neq \varnothing$. Zatem zachodzić mogą jedynie dwa przypadki:

1° $D_0(\underline{P}) = \{\underline{P}^0\}$, tj. $\ulcorner\mathrm{ex}\underline{P} \,\&\, \mathrm{sol}\underline{P}\urcorner \in \pi_\omega$: Wtedy na mocy (7) dostajemy $\ulcorner\mathrm{sol}\underline{S}\urcorner \in \pi_\omega$. Stąd i z założenia, że $D_0(\underline{S}) \neq \varnothing$, mamy $\ulcorner\mathrm{ex}\underline{S} \,\&\, \mathrm{sol}\underline{S}\urcorner \in \pi_\omega$.

---

[9] Można wykazać, że rachunek $\mathbf{R}_{a,\,ex}$ zbudowany w $\Sigma^{a,\,ex}$ i oparty na (1), (2), (5) i (6) jest pełny. W tym celu w dowodzie lematu o interpretacji dla $\mathbf{R}_{a,\,ex}$ wystarczy przyjąć $U_0 := \mathbf{N}$ oraz $D_0(\underline{S}) := \varnothing$ gdy $\ulcorner\neg\mathrm{ex}\underline{S}\urcorner \in \pi_\omega$, zaś w przeciwnym wypadku $D_0(\underline{S}) := \{\underline{M} : \ulcorner\underline{M}a\underline{S}\urcorner \in \pi_\omega\}$ (bądź przyjąć $D_0(\underline{S}) := \{\underline{M} : \ulcorner\underline{M}a\underline{S} \,\&\, \mathrm{ex}\underline{M}\urcorner \in \pi_\omega\}$). Stosując tę samą metodę można pokazać, że rachunek $\mathbf{R}^t_{a,\,ex}$ oparty na (1), (2) i tradycyjnej tautologii ‘exS’, jest pełny w sensie tradycyjnym.

Ponadto można wykazać, że rachunek $\mathbf{R}_{a,\,sol}$ zbudowany w $\Sigma^{a,\,sol}$ i oparty na (1), (2), (7) i ‘$(SaP \,\&\, \mathrm{sol}P \,\&\, \neg PaS) \rightarrow SaM$’, jest pełny. W tym celu w dowodzie lematu o interpretacji dla $\mathbf{R}_{a,\,sol}$ wystarczy przyjąć U_0 to samo co w § 1, oraz określić funkcję D_0 warunkami: $D_0(\underline{S}) := \varnothing$, gdy $\ulcorner\underline{S}a\underline{P} \,\&\, \mathrm{sol}\underline{P} \,\&\, \neg\underline{P}a\underline{S}\urcorner \in \pi_\omega$ dla pewnej litery $\underline{P}$, zaś w przeciwnym przypadku, gdy $\ulcorner\mathrm{sol}\underline{S}\urcorner \in \pi_\omega$, to $D_0(\underline{S}) := \{\underline{S}^0\}$, a gdy $\ulcorner\neg\mathrm{sol}\underline{S}\urcorner \in \pi_\omega$, to $D_0(\underline{S}) := \{\underline{M}^0 : \ulcorner\underline{M}a\underline{S}\urcorner \in \pi_\omega\} \cup \{\alpha\}$.

Zauważmy, że ‘$\mathrm{ex!}S \leftrightarrow \mathrm{sol}S$’ jest tradycyjną tautologią, więc w logice tradycyjnej funktory reprezentowane przez symbole ‘ex!’ i ‘sol’ są nieodróżnialne.

Zatem $D_0(\underline{S}) = \{\underline{S}^0\}$, lecz na mocy (8) z $\ulcorner ex\underline{S} \,\&\, \underline{S}a\underline{P} \,\&\, sol\underline{P}\urcorner \in \pi_\omega$ wynika, że $\ulcorner \underline{P}a\underline{S}\urcorner \in \pi_\omega$. Zatem $\underline{S}^0 = \underline{P}^0$.

2° $D_0(\underline{P}) = \{\underline{M}^0 : \ulcorner \underline{M}a\underline{P}\urcorner \in \pi_\omega\} \cup \{\alpha\}$: W tym wypadku jest oczywiste, że $\underline{M}^0 \in D_0(\underline{P})$.

Ponadto jeżeli $\alpha \in D_0(\underline{S})$, to ponieważ wykazaliśmy już, że $D_0(\underline{S}) \neq \varnothing$ i $\ulcorner \underline{S}a\underline{P}\urcorner \in \pi_\omega$ pociąga $D_0(\underline{P}) \neq \varnothing$, więc na mocy (7) i określenia funkcji D_0 otrzymujemy $\ulcorner ex\underline{P} \,\&\, \neg sol\underline{P}\urcorner \in \pi_\omega$. Stąd $\alpha \in D_0(\underline{P})$.

Niech $D_0(\underline{S}) \subset D_0(\underline{P})$. Rozpatrzymy dwa przypadki:

1° $D_0(\underline{S}) = \varnothing$, tj. $\ulcorner \neg ex\underline{S}\urcorner \in \pi_\omega$: Wtedy na mocy (6) mamy $\ulcorner \underline{S}a\underline{P}\urcorner \in \pi_\omega$;

2° $D_0(\underline{S}) \neq \varnothing$: Wtedy na mocy aksjomatu (1), $\underline{S}^0 \in D_0(\underline{S})$. Stąd na mocy założenia mamy $\ulcorner \underline{S}a\underline{P}\urcorner \in \pi_\omega$ lub nawet $\underline{S}^0 = \underline{P}^0$.

Zatem $\ulcorner \underline{S}a\underline{P}\urcorner \in \pi_\omega$ wtw $\ulcorner \underline{S}a\underline{P}\urcorner \in \mathrm{VER}_{I_0}(\Sigma^{a,\,ex,\,sol})$.

Z określenia funkcji D_0 oczywiste jest, że

$\ulcorner ex\underline{S}\urcorner \in \pi_\omega$ wtw $D_0(\underline{S}) \neq \varnothing$ wtw $\ulcorner ex\underline{S}\urcorner \in \mathrm{VER}_{I_0}(\Sigma^{a,\,ex,\,sol})$.

Z określenia funkcji D_0 i z (9) wynika, że

$\ulcorner sol\underline{S}\urcorner \in \pi_\omega$ wtw $\mathrm{Card}\, D_0(\underline{S}) \leqslant 1$ wtw $\ulcorner sol\underline{S}\urcorner \in \mathrm{VER}_{I_0}(\Sigma^{a,\,ex,\,sol})$. □[10]

Definicyjne rozszerzenie $\mathbf{R}_{a,\,ex,\,sol,\,ex!}$ w zbiorze $\Sigma^{a,\,ex!,\,ex,\,sol}$ rachunku $\mathbf{R}_{a,\,ex,\,sol}$ za pomocą definicji (tautologii) (def_1 ex!) jest konserwatywnym rozszerzeniem rachunku $\mathbf{R}_{a,\,ex!}$. Wynika to z wniosku 2 i lematu 3b.

§ 3. W zbiorze $\Sigma^{i,\,ex!}$ definiujemy symbol 'ε' za pomocą tautologii (def_3 ε). W zbiorze tym budujemy rachunek $\mathbf{R}_{i,\,ex!}$ mający poniższe tautologie za aksjomaty[11]:

(10) SiP → SiS

(11) SiP → PiS

(12) ex!S → SiS

(13) (ex!M & MiS & MiP) → SiP

LEMAT (o interpretacji). Dla każdego zbioru π zawartego w $\Sigma^{i,\,ex!}$ i niesprzecznego w $\mathbf{R}_{i,\,ex!}$ istnieje taka interpretacja I, że $\pi \subset \mathrm{VER}_I(\Sigma^{i,\,ex!})$.

---

[10] Stosując pewne uproszczenia w dowodzie, można pokazać, że rachunek $\mathbf{R}^{!}_{a,\,ex,\,sol}$ oparty na (1), (2), (7) oraz tradycyjnych tautologiach 'exS' i '(SaP & solP) → PaS' jest pełny w sensie tradycyjnym.

Zauważmy, że w dowodach przeprowadzonych w § 1 i § 2 można również przyjąć interpretację $I_1 = \langle U_1, D_1\rangle$, dla której U_1 określimy podobnie jak U_0, zastępując jedynie zbiór klas abstrakcji $\mathbf{N}^0$ przez zbiór „filtrów głównych wyznaczonych w $\mathbf{N}$ przez zbiór π_ω", tj. zbiór $\{[\underline{S}] : \underline{S} \in \mathbf{N}\}$, gdzie $[\underline{S}] := \{\underline{M} : \ulcorner \underline{S}a\underline{M}\urcorner \in \pi_\omega\}$. Funkcję D_1 określamy również podobnie jak D_0, zastępując tylko klasę abstrakcji $\underline{S}^0$ filtrem głównym $[\underline{S}]$.

[11] Łatwo pokazać, że rachunek $\mathbf{R}_i$ zbudowany w Σ^i i oparty na (10) i (11) jest pełny, zaś rachunek $\mathbf{R}^{!}_i$ oparty na (11) i tradycyjnej tautologii 'SiS' jest pełny w sensie tradycyjnym. W tym celu wystarczy przyjąć w dowodzie lematów o interpretacji $U_0 := \mathbf{2}^{\mathbf{N}}$ oraz $D_0(\underline{S}) := \{\{\underline{M}, \underline{P}\} : \ulcorner \underline{M}i\underline{P}\urcorner \in \pi_\omega$ i $\underline{S} \in \{\underline{M}, \underline{P}\}\}$.

DOWÓD. Niech π_ω będzie nadzbiorem maksymalnym dla dowolnie wybranego niesprzecznego w $\mathbf{R}_{i,ex!}$ zbioru π. W zbiorze $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$ określimy relację równoważności wzorem:

$\underline{S} \overset{\sim}{\pi_\omega} \underline{P}$ wtw $\ulcorner ex!\underline{S} \,\&\, \underline{S}i\underline{P} \,\&\, ex!\underline{P}\urcorner \in \pi_\omega$ lub $\underline{S} = \underline{P}$.

Niech $\underline{S}^0$ będzie klasą abstrakcji litery $\underline{S}$ w relacji $\overset{\sim}{\pi_\omega}$.

Uniwersum szukanej interpretacji I_0 będzie zbiór $U_0 := \mathbf{2}^{\mathbf{N}} \cup \mathbf{N}$, zaś funkcję D_0 z $\mathbf{N}$ w $\mathbf{2}^{U_0}$ określamy wzorem:

$$D_0(\underline{S}) := \begin{cases} \emptyset, \text{ gdy } \ulcorner \neg \underline{S}i\underline{S}\urcorner \in \pi_\omega \\ \{\underline{S}^0\}, \text{ gdy } \ulcorner ex!\underline{S}\urcorner \in \pi_\omega \\ \{\{\underline{M}, \underline{P}\} : \ulcorner \underline{M}i\underline{P}\urcorner \in \pi_\omega \text{ i } \underline{S} \in \{\underline{M}, \underline{P}\}\} \cup \\ \cup \{\underline{M}^0 : \ulcorner ex!\underline{M} \,\&\, \underline{M}i\underline{S}\urcorner \in \pi_\omega\} \cup \{\underline{S}\}, \text{ w przeciwnym wypadku.} \end{cases}$$

Oczywiście na mocy (12), $\ulcorner \neg \underline{S}i\underline{S}\urcorner \in \pi_\omega$ pociąga $\ulcorner \neg ex!\underline{S}\urcorner \in \pi_\omega$.

Niech $\ulcorner \underline{S}i\underline{P}\urcorner \in \pi_\omega$. Wtedy na mocy (10) i (11) zarówno $\ulcorner \underline{S}i\underline{S}\urcorner \in \pi_\omega$ i $\ulcorner \underline{P}i\underline{P}\urcorner \in \pi_\omega$. Zatem $D_0(\underline{S}) \neq \emptyset \neq D_0(\underline{P})$ oraz mogą zachodzić tylko cztery przypadki:

1° $\ulcorner ex!\underline{S} \,\&\, ex!\underline{P}\urcorner \in \pi_\omega$: Wtedy na mocy założenia $\underline{S}^0 = \underline{P}^0$. Zatem z określenia funkcji D_0 mamy $D_0(\underline{S}) = D_0(\underline{P}) \neq \emptyset$.

2° $\ulcorner \neg ex!\underline{S} \,\&\, \neg ex!\underline{P}\urcorner \in \pi_\omega$: Ponieważ wtedy również $\ulcorner \underline{S}i\underline{S} \,\&\, \underline{P}i\underline{P}\urcorner \in \pi_\omega$ więc $\{\underline{S}, \underline{P}\} \in D_0(\underline{S}) \cap D_0(\underline{P})$.

3° $\ulcorner ex!\underline{S} \,\&\, \neg ex!\underline{P}\urcorner \in \pi_\omega$: Wtedy $\underline{S}^0 \in D_0(\underline{S}) \cap D_0(\underline{P})$.

4° $\ulcorner \neg ex!\underline{S} \,\&\, ex!\underline{P}\urcorner \in \pi_\omega$: $\underline{P}^0 \in D_0(\underline{S}) \cap D_0(\underline{P})$.

Odwrotnie załóżmy, że $D_0(\underline{S}) \cap D_0(\underline{P}) \neq \emptyset$. Rozpatrzymy trzy przypadki:

1° $\{\underline{M}_1, \underline{M}_2\} \in D_0(\underline{S}) \cap D_0(\underline{P})$: Wtedy $\ulcorner \underline{M}_1 i \underline{M}_2\urcorner \in \pi_\omega$, oraz $\underline{S} \in \{\underline{M}_1, \underline{M}_2\}$ i $\underline{P} \in \{\underline{M}_1, \underline{M}_2\}$. Zatem lub $\underline{S} = \underline{M}_1$ i $\underline{P} = \underline{M}_1$ lub $\underline{S} = \underline{M}_1$ i $\underline{P} = \underline{M}_2$ lub $\underline{S} = \underline{M}_2$ i $\underline{P} = \underline{M}_1$ lub $\underline{S} = \underline{M}_2$ i $\underline{P} = \underline{M}_2$. Stąd na mocy (10) i (11) mamy $\ulcorner \underline{S}i\underline{P}\urcorner \in \pi_\omega$.

2° $\underline{M}^0 \in D_0(\underline{S}) \cap D_0(\underline{P})$: Wtedy $\ulcorner ex!\underline{M} \,\&\, \underline{M}i\underline{S} \,\&\, \underline{M}i\underline{P}\urcorner \in \pi_\omega$, więc na mocy (13) otrzymujemy $\ulcorner \underline{S}i\underline{P}\urcorner \in \pi_\omega$.

3° $\underline{M} \in D_0(\underline{S}) \cap D_0(\underline{P})$: Wtedy $\underline{S} = \underline{P} = \underline{M}$. Na mocy założenia mamy $D_0(\underline{S}) \neq \emptyset$. Zatem z określenia funkcji dostajemy $\ulcorner \underline{S}i\underline{S}\urcorner \in \pi_\omega$.

Zatem wykazaliśmy, że $\ulcorner \underline{S}i\underline{P}\urcorner \in \pi_\omega$ wtw $\ulcorner \underline{S}i\underline{P}\urcorner \in \mathrm{VER}_{I_0}(\Sigma^{i,ex!})$.

Jeżeli $\ulcorner ex!\underline{S}\urcorner \in \pi_\omega$, to $D_0(\underline{S}) = \{\underline{S}^0\}$, czyli Card $D_0(\underline{S}) = 1$. Odwrotnie, jeżeli $\ulcorner \neg ex!\underline{S}\urcorner \in \pi_\omega$, to w przypadku, gdy $\ulcorner \neg \underline{S}i\underline{S}\urcorner \in \pi_\omega$, otrzymujemy Card $D_0(\underline{S}) = 0$, zaś w przypadku, gdy $\ulcorner \underline{S}i\underline{S}\urcorner \in \pi_\omega$, dostajemy $D_0(\underline{S}) \supset \{\{\underline{S}\}, \underline{S}\}$, tj. Card $D_0(\underline{S}) > 1$.

Zatem wykazaliśmy, że $\ulcorner ex!\underline{S}\urcorner \in \pi_\omega$ wtw Card $D_0(\underline{S}) = 1$ wtw $\ulcorner ex!\underline{S}\urcorner \in \mathrm{VER}_{I_0}(\Sigma^{i,ex!})$. □ [12]

---

[12] Stosując odpowiednie uproszczenia można pokazać, że rachunek $\mathbf{R}^{!}_{i,ex!}$ oparty na (11), (13) i 'SiS', jest pełny w sensie tradycyjnym.

§ 4. W zbiorze $\Sigma^{i,sol}$ definiujemy symbol ‘ε’ za pomocą tautologii (def$_4$ ε). W zbiorze tym budujemy rachunek $\mathbf{R}_{i,sol}$ opierając się na tautologiach: (10), (11) oraz

(14) $\neg\, \mathrm{SiS} \rightarrow \mathrm{sol\,S}$

(15) $(\mathrm{sol\,M} \,\&\, \mathrm{MiS} \,\&\, \mathrm{MiP}) \rightarrow \mathrm{SiP}$.

Możemy oczywiście wykazać pełność rachunku $\mathbf{R}_{i,sol}$ dowodząc dla niego lemat o interpretacji podobnymi metodami jak dla $\mathbf{R}_{i,ex!}$. Uniwersum szukanej interpretacji byłoby to samo, zaś w określeniu funkcji D_0 zmieniony byłby warunek ‘$\ulcorner \mathrm{ex!S} \urcorner \in \pi_\omega$’ na warunek ‘$\ulcorner \mathrm{SiS} \,\&\, \mathrm{sol\,S} \urcorner \in \pi_\omega$’. Jednak pójdziemy inną drogą, gdyż pełność rachunku $\mathbf{R}_{i,sol}$ wynika z wniosku 3 i poniższego lematu:

LEMAT. Rachunki $\mathbf{R}_{i,ex!}$ i $\mathbf{R}_{i,sol}$ są definicyjnie równoważne i wszystkie definicje użyte do rozszerzeń definicyjnych są tautologiami.

DOWÓD. W zbiorze $\Sigma^{i,sol,ex!}$ budujemy za pomocą (def$_2$ ex!) definicyjne rozszerzenie $\mathbf{R}_{i,sol,ex!}$ rachunku $\mathbf{R}_{i,sol}$, oraz za pomocą tautologii (def$_2$ sol), definicyjne rozszerzenie[13] $\mathbf{R}_{i,ex!,sol}$ rachunku $\mathbf{R}_{i,ex!}$. Ponieważ $\mathbf{R}_{i,ex!}$ jest pełny, więc na mocy wniosku 2, rachunek $\mathbf{R}_{i,ex!,sol}$ jest również pełny. Zatem na mocy lematu 1, $\mathbf{R}_{i,ex!,sol}$ jest rozszerzeniem rachunku $\mathbf{R}_{i,sol,ex!}$. Pokażemy, że również $\mathbf{R}_{i,sol,ex!}$ jest rozszerzeniem rachunku $\mathbf{R}_{i,ex!,sol}$, czyli że oba są równoważne. Zatem wystarczy pokazać, że każdy aksjomat rachunku $\mathbf{R}_{i,ex!,sol}$ jest wyprowadzalny z aksjomatów rachunku $\mathbf{R}_{i,sol,ex!}$

— wyprowadzenie (12):

1.	ex!S	zał.
2.	SiS & solS	z 1, (def$_2$ ex!) i taut. klas. rach. zdań
3.	SiS	z 2 i taut. klas. rach. zdań

— wyprowadzenie (13):

1.	ex!M	zał.
2.	MiS	zał.
3.	MiP	zał.
4.	solM	z 1, (def$_2$ ex!) i taut. klas. rach. zdań
5.	SiP	z 2, 3, 4 i (15)

— wyprowadzenie (def$_2$ sol):

1a.	solS	zał.
2a.	$\mathrm{sol\,S} \rightarrow (\mathrm{SiS} \rightarrow \mathrm{ex!S})$	z (def$_2$ ex!) i taut. klas. rach. zdań
3a.	$\neg\, \mathrm{SiS} \vee \mathrm{ex!S}$	z 2a i taut. klas. rach. zdań
1b.	$\neg\, \mathrm{SiS} \vee \mathrm{ex!S}$	zał.
2ba.	$\neg\, \mathrm{SiS}$	zał. dodatkowe
3ba.	solS	z 2ba i (14)
2bb.	ex!S	zał. dodatkowe
3bb.	solS	z 2bb, (def$_2$ ex!) i taut. rach. zdań □

[13] Dolne indeksy są częścią nazwy danego rachunku, zatem zmiana kolejności składników zmienia nazwę na mającą inny desygnat (inaczej jest z nazwami zbiorów formuł, gdzie różne nazwy mogą mieć ten sam desygnat).

§ 5. Rozpatrzmy rachunek $\mathbf{R}_{\mathrm{Sh,ex!}}$ zbudowany w zbiorze $\Sigma^{\mathrm{a,i,ex!}}$ (w którym można zdefiniować symbol 'ε' za pomocą tautologii (def_1 ε) bądź (def_3 ε)) i mający jako aksjomaty następujące tautologie: (1), (2), (10), (12) oraz

(16) $(\mathrm{MiS} \,\&\, \mathrm{MaP}) \rightarrow \mathrm{SiP}$

(17) $\neg \mathrm{SiS} \rightarrow \mathrm{SaP}$

(18) $(\mathrm{ex!S} \,\&\, \mathrm{SiP}) \rightarrow \mathrm{SaP}$

(19) $(\mathrm{SiS} \,\&\, \mathrm{SaP} \,\&\, \mathrm{ex!P}) \rightarrow \mathrm{ex!S}$.

Rachunek $\mathbf{R}_{\mathrm{Sh}}$ zbudowany w zbiorze $\Sigma^{\mathrm{a,i}}$ i oparty na aksjomatach (1), (2), (10), (16), (17) ma zbiór tez równy $\mathrm{Taut}(\Sigma^{\mathrm{a,i}})$. Udowodnił to J. C. Shepherdson w [5], utożsamiając rachunek $\mathbf{R}_{\mathrm{Sh}}$ z pewną teorią elementarną.

LEMAT (o interpretacji). Dla każdego zbioru π zawartego w $\Sigma^{\mathrm{a,i,ex!}}$ i niesprzecznego w $\mathbf{R}_{\mathrm{Sh,ex!}}$ istnieje taka interpretacja I, że $\pi \subset \mathrm{VER}_I(\Sigma^{\mathrm{a,i,ex!}})$.

DOWÓD. Niech π_ω będzie nadzbiorem maksymalnym dla dowolnie wybranego niesprzecznego w $\mathbf{R}_{\mathrm{Sh,ex!}}$ zbioru π. Niepusty podzbiór ∇ zbioru $\mathbf{N}$ nazywamy filtrem wyznaczonym przez zbiór π_ω wtedy i tylko wtedy, gdy dla wszystkich $\underline{S}$, $\underline{P}$ z $\mathbf{N}$ spełnione są warunki:

jeżeli $\underline{S} \in \nabla$ i $\ulcorner \underline{S}\mathrm{a}\underline{P} \urcorner \in \pi_\omega$, to $\underline{P} \in \nabla$

jeżeli $\underline{S} \in \nabla$ i $\underline{P} \in \nabla$, to $\ulcorner \underline{S}\mathrm{i}\underline{P} \urcorner \in \pi_\omega$.

Uniwersum szukanej interpretacji I_0 jest zbiór $U_0 := \{\nabla : \nabla$ jest filtrem wyznaczonym przez $\pi_\omega\} \cup \mathbf{N}$, zaś funkcja D_0 z $\mathbf{N}$ w $\mathbf{2}^{U_0}$ określona jest wzorem:

$$D_0(\underline{S}) := \begin{cases} \{\nabla : \underline{S} \in \nabla\}, & \text{gdy } \ulcorner \mathrm{ex!}\underline{S} \urcorner \in \pi_\omega \\ \{\nabla : \underline{S} \in \nabla\} \cup \{\underline{M} : \ulcorner \underline{M}\mathrm{i}\underline{M} \,\&\, \underline{M}\mathrm{a}\underline{S} \urcorner \in \pi_\omega\}, & \text{w wypadku innym.} \end{cases}$$

Wykażemy wyjściowe kroki indukcyjne dla formuł atomowych. W dowodzie tym kilkakrotnie będziemy posługiwać się własnościami:

(i) $\ulcorner \underline{S}\mathrm{i}\underline{P} \urcorner \in \pi_\omega$ wtw zbiór $[\underline{S}, \underline{P}] := \{\underline{M} : \ulcorner \underline{S}\mathrm{a}\underline{M} \vee \underline{P}\mathrm{a}\underline{M} \urcorner \in \pi_\omega\}$ jest filtrem. $\underline{S}, \underline{P} \in [\underline{S}, \underline{P}]$.

(ii) $\ulcorner \underline{S}\mathrm{i}\underline{S} \urcorner \in \pi_\omega$ wtw $[\underline{S}] := [\underline{S}, \underline{S}]$ jest filtrem. $\underline{S} \in [\underline{S}]$.

(iii) $\ulcorner \underline{S}\mathrm{i}\underline{S} \urcorner \in \pi_\omega$ wtw $D_0(\underline{S}) \neq \varnothing$.

(iv) jeżeli $\ulcorner \underline{S}\mathrm{i}\underline{S} \urcorner \in \pi_\omega$ i $\ulcorner \mathrm{ex!}\underline{S} \urcorner \notin \pi_\omega$, to $\{[\underline{S}], \underline{S}\} \subset D_0(\underline{S})$.

(v) $\ulcorner \mathrm{ex!}\underline{S} \urcorner \in \pi_\omega$ wtw $D_0(\underline{S}) = \{[\underline{S}]\}$.

(vi) jeżeli $\mathrm{Card}\, D_0(\underline{S}) = 1$, to $\ulcorner \mathrm{ex!}\underline{S} \urcorner \in \pi_\omega$.

DOWÓD (i). Niech $\ulcorner \underline{S}\mathrm{i}\underline{P} \urcorner \in \pi_\omega$. Wtedy:

1° jeżeli $\underline{M}_1 \in [\underline{S}, \underline{P}]$ i $\ulcorner \underline{M}_1\mathrm{a}\underline{M}_2 \urcorner \in \pi_\omega$, to zarazem $\ulcorner \underline{S}\mathrm{a}\underline{M}_1 \urcorner \in \pi_\omega$ lub $\ulcorner \underline{P}\mathrm{a}\underline{M}_1 \urcorner \in \pi_\omega$ i $\ulcorner \underline{M}_1\mathrm{a}\underline{M}_2 \urcorner \in \pi_\omega$. Zatem na mocy (2), $\ulcorner \underline{S}\mathrm{a}\underline{M}_2 \urcorner \in \pi_\omega$ lub $\ulcorner \underline{P}\mathrm{a}\underline{M}_2 \urcorner \in \pi_\omega$, czyli $\underline{M}_2 \in [\underline{S}, \underline{P}]$.

2° jeżeli $\underline{M}_1 \in [\underline{S}, \underline{P}]$ i $\underline{M}_2 \in [\underline{S}, \underline{P}]$, to zarazem $\ulcorner \underline{S}\mathrm{a}\underline{M}_1 \urcorner \in \pi_\omega$ lub $\ulcorner \underline{P}\mathrm{a}\underline{M}_1 \urcorner \in \pi_\omega$ i $\ulcorner \underline{S}\mathrm{a}\underline{M}_2 \urcorner \in \pi_\omega$ lub $\ulcorner \underline{P}\mathrm{a}\underline{M}_2 \urcorner \in \pi_\omega$. Stąd otrzymujemy, że lub $\ulcorner \underline{S} a \underline{M}_1 \,\&\, \underline{S} a \underline{M}_2 \urcorner \in \pi_\omega$ lub $\ulcorner \underline{S} a \underline{M}_1 \,\&\, \underline{P} a \underline{M}_2 \urcorner \in \pi_\omega$ lub $\ulcorner \underline{S} a \underline{M}_2 \,\&$ $\&\, \underline{P} a \underline{M}_1 \urcorner \in \pi_\omega$ lub $\ulcorner \underline{P} a \underline{M}_1 \,\&\, \underline{P} a \underline{M}_2 \urcorner \in \pi_\omega$. Zatem z założenia na mocy (10) oraz tez (11) i '$(\mathrm{M i P} \,\&\, \mathrm{M a S_1} \,\&\, \mathrm{P i S_2}) \to \mathrm{S_1 i S_2}$' mamy $\ulcorner \underline{M}_1 i \underline{M}_2 \urcorner \in \pi_\omega$.

Odwrotnie załóżmy, że $[\underline{S}, \underline{P}]$ jest filtrem. Wtedy na mocy (1) otrzymamy $\underline{S}, \underline{P} \in [\underline{S}, \underline{P}]$. Zatem z określenia filtru dostajemy, iż $\ulcorner \underline{S} i \underline{P} \urcorner \in \pi_\omega$.

(iii) jeżeli $\ulcorner \underline{S} i \underline{S} \urcorner \in \pi_\omega$, to na mocy (ii), $[\underline{S}]$ jest filtrem.

Stąd $D_0(\underline{S}) \neq \emptyset$. Odwrotnie, jeżeli $\ulcorner \underline{S} i \underline{S} \urcorner \notin \pi_\omega$, to na mocy określenia filtru, $\underline{S}$ nie należy do żadnego filtru. Ponadto na mocy (10) i (11) oraz $(\mathrm{M i M} \,\&\, \mathrm{M a S}) \to \mathrm{M i S}$' dostajemy, że $\{\underline{M} : \ulcorner \underline{M} i \underline{M} \,\&\, \underline{M} a \underline{S} \urcorner \in \pi_\omega\} = \emptyset$. Zatem $D_0(\underline{S}) = \emptyset$.

(v) Niech $\ulcorner \mathrm{ex!}\, \underline{S} \urcorner \in \pi_\omega$, wtedy na mocy (12) mamy $\ulcorner \underline{S} i \underline{S} \urcorner \in \pi_\omega$.

Wykażemy, że dla każdego filtru ∇: jeżeli $\underline{S} \in \nabla$, to $\nabla = [\underline{S}]$. Istotnie, niech $\underline{S} \in \nabla$ i $\underline{M} \in \nabla$. Wtedy z określenia filtru mamy $\ulcorner \underline{S} i \underline{M} \urcorner \in \pi_\omega$. Zatem na mocy (18) otrzymujemy $\ulcorner \underline{S} a \underline{M} \urcorner \in \pi_\omega$, tj. $\underline{M} \in [\underline{S}]$. Odwrotnie, jeżeli $\underline{S} \in \nabla$ i $\underline{M} \in [\underline{S}]$, to z określenia filtru otrzymamy, że $\underline{M} \in \nabla$.

Zatem na mocy określenia funkcji D_0 mamy $D_0(\underline{S}) = \{[\underline{S}]\}$. □

Załóżmy, że $\ulcorner \underline{S} a \underline{P} \urcorner \in \pi_\omega$. Jeżeli $\nabla \in D_0(\underline{S})$, tj. gdy $\underline{S} \in \nabla$, to również $\underline{P} \in \nabla$, tj. $\nabla \in D_0(\underline{P})$. Ponadto w przypadku gdy $\ulcorner \mathrm{ex!}\, \underline{S} \urcorner \notin \pi_\omega$, jeżeli $\underline{M} \in D_0(\underline{S})$, tj. gdy $\ulcorner \underline{M} i \underline{M} \,\&\, \underline{M} a \underline{S} \urcorner \in \pi_\omega$, to również $\ulcorner \underline{M} i \underline{M} \,\&\, \underline{M} a \underline{P} \urcorner \in \pi_\omega$. Musimy wykazać, że w tym przypadku $\underline{M} \in D_0(\underline{P})$. Fakt ten zachodzi, gdy $\ulcorner \underline{P} i \underline{P} \urcorner \in \pi_\omega$ zaś $\ulcorner \mathrm{ex!}\, \underline{P} \urcorner \notin \pi_\omega$. Rzeczywiście jest tak na mocy aksjomatu (19) i faktu, że formuła '$(\mathrm{M i M} \,\&\, \mathrm{M a P}) \to \mathrm{P i P}$' jest tezą rachunku $\mathbf{R}_{\mathrm{Sh}}$.

Odwrotnie, załóżmy, że $D_0(\underline{S}) \subset D_0(\underline{P})$. Mogą zachodzić wtedy dwa przypadki:

1° $D_0(\underline{S}) = \emptyset$: Wtedy na mocy (iii) mamy $\ulcorner \neg \underline{S} i \underline{S} \urcorner \in \pi_\omega$, więc na mocy aksjomatu (17) dostajemy $\ulcorner \underline{S} a \underline{P} \urcorner \in \pi_\omega$.

2° $D_0(\underline{S}) \neq \emptyset$: Wtedy na mocy (iii) i (ii) $[\underline{S}]$ jest filtrem oraz $\underline{S} \in [\underline{S}]$. Zatem $[\underline{S}] \in D_0(\underline{S})$. Ponieważ $D_0(\underline{S}) \subset D_0(\underline{P})$, więc $[\underline{S}] \in D_0(\underline{P})$. Stąd dostajemy, że $\underline{P} \in [\underline{S}]$, tj. $\ulcorner \underline{S} a \underline{P} \urcorner \in \pi_\omega$.

Niech $\ulcorner \underline{S} i \underline{P} \urcorner \in \pi_\omega$. Wtedy na mocy (i), $[\underline{S}, \underline{P}]$ jest filtrem, i ponadto $\underline{S}, \underline{P} \in [\underline{S}, \underline{P}]$. Stąd $D_0(\underline{S}) \cap D_0(\underline{P}) \neq \emptyset$. Odwrotnie, niech $D_0(\underline{S}) \cap$ $\cap\, D_0(\underline{P}) \neq \emptyset$. Wtedy mogą zachodzić dwa przypadki:

1° Istnieje taki filtr ∇, że $\nabla \in D_0(\underline{S})$ i $\nabla \in D_0(\underline{P})$: Wtedy z określenia filtru dostajemy $\ulcorner \underline{S} i \underline{P} \urcorner \in \pi_\omega$.

2° Istnieje taka litera $\underline{M}$, że $\ulcorner \underline{M} i \underline{M} \,\&\, \underline{M} a \underline{S} \,\&\, \underline{M} a \underline{P} \urcorner \in \pi_\omega$: Wtedy ponieważ formuła '$(\mathrm{M i M} \,\&\, \mathrm{M a S} \,\&\, \mathrm{M a P}) \to \mathrm{S i P}$' jest tezą $\mathbf{R}_{\mathrm{Sh}}$, więc $\ulcorner \underline{S} i \underline{P} \urcorner \in \pi_\omega$.

Z (v) i (vi) mamy, że $\ulcorner \mathrm{ex!}\, \underline{S} \urcorner \in \pi_\omega$ wtw $\mathrm{Card}\, D_0(\underline{S}) = 1$.

Zatem wykazaliśmy, że:

$\ulcorner \underline{S} a \underline{P} \urcorner \in \pi_\omega$ wtw $\ulcorner \underline{S} a \underline{P} \urcorner \in \mathrm{VER}_{I_0}(\Sigma^{\mathrm{a,\, i,\, ex!}})$

$\ulcorner \underline{S} i \underline{P} \urcorner \in \pi_\omega$ wtw $\ulcorner \underline{S} i \underline{P} \urcorner \in \mathrm{VER}_{I_0}(\Sigma^{\mathrm{a,\, i,\, ex!}})$

$\ulcorner \mathrm{ex!}\, \underline{S} \urcorner \in \pi_\omega$ wtw $\ulcorner \mathrm{ex!}\, \underline{S} \urcorner \in \mathrm{VER}_{I_0}(\Sigma^{\mathrm{a,\, i,\, ex!}})$. □

UWAGA. Aby podać dowód lematu o interpretacji dla rachunku $\mathbf{R}_{\mathrm{Sh}}$ wystarczy powtórzyć powyższe rozumowanie z oczywistymi uproszczeniami (nie zmieniając określenia filtru, należy przyjąć $U_0 := \{\nabla : \nabla$ jest filtrem$\}$ i $D_0(\underline{S}) := \{\nabla : \underline{S} \in \nabla\}$)[14]. J. C. Shepherdson, który utożsamił rachunek $\mathbf{R}_{\mathrm{Sh}}$ z pewną teorią elementarną, dowodząc dla niej twierdzenie o reprezentacji, korzystał z lematu Kuratowskiego-Zerna (dokładniej, twierdzenie to było wnioskiem z twierdzenia ogólniejszego, w dowodzie którego używano ten lemat).

Z lematu 3b wynika, że rachunek $\mathbf{R}_{\mathrm{Sh,ex!}}$ jest konserwatywnym rozszerzeniem rachunków $\mathbf{R}_{\mathrm{Sh}}$, $\mathbf{R}_{\mathrm{a,ex!}}$ oraz $\mathbf{R}_{\mathrm{i,ex!}}$.

Definicyjne rozszerzenie $\mathbf{R}_1^{\max}$ w zbiorze Σ rachunku $\mathbf{R}_{\mathrm{Sh,ex!}}$ za pomocą tautologii (def ex), (def_2 sol), (def o), (def e) oraz (def_1 ε) bądź (def_3 ε), którego zbiór tez pokrywa się ze zbiorem $\mathrm{Taut}(\Sigma)$, jest konserwatywnym *rozszerzeniem wszystkich rozpatrywanych dotąd rachunków.*

§ 6. Zbadajmy rachunek $\mathbf{R}_{\mathrm{Sh,sol}}$ zbudowany w zbiorze $\Sigma^{\mathrm{a,i,sol}}$ (w którym możemy zdefiniować symbol 'ε' za pomocą tautologii (def_4 ε) i posiadający jako aksjomaty następujące tautologie: (1), (2), (7), (10), (14), (16), (17), oraz

(20) (sol S & SiP) → SaP.

Można oczywiście wykazać pełność rachunku $\mathbf{R}_{\mathrm{Sh,sol}}$ dowodząc dla niego lemat o interpretacji podobnymi metodami jak dla $\mathbf{R}_{\mathrm{Sh,ex!}}$. Uniwersum szukanej interpretacji byłoby to samo co dla $\mathbf{R}_{\mathrm{Sh,ex!}}$, zaś w określeniu funkcji D_0 zmieniony by był warunek '$\ulcorner$ex!$\underline{S}\urcorner \in \pi_\omega$' na warunek '$\ulcorner\underline{S}i\underline{S}$ & sol$\underline{S}\urcorner \in \pi_\omega$'. Pełność rachunku $\mathbf{R}_{\mathrm{Sh,sol}}$ wynika również z wniosku 3 i poniższego lematu:

LEMAT. Rachunki $\mathbf{R}_{\mathrm{Sh,ex!}}$ i $\mathbf{R}_{\mathrm{Sh,sol}}$ są definicyjnie równoważne i wszystkie definicje użyte do rozszerzeń definicyjnych są tautologiami.

DOWÓD. W zbiorze $\Sigma^{\mathrm{a,i,sol,ex!}}$ budujemy za pomocą tautologii (def_2 ex!) definicyjne rozszerzenie $\mathbf{R}_{\mathrm{Sh,sol,ex!}}$ rachunku $\mathbf{R}_{\mathrm{Sh,sol}}$, oraz za pomocą tautologii (def_2 sol) definicyjne rozszerzenie $\mathbf{R}_{\mathrm{Sh,ex!,sol}}$ rachunku $\mathbf{R}_{\mathrm{Sh,ex!}}$. Ponieważ $\mathbf{R}_{\mathrm{Sh,ex!}}$ jest pełny, więc na mocy wniosku 2, rachunek $\mathbf{R}_{\mathrm{Sh,ex!,sol}}$ jest również pełny. Zatem na mocy lematu 1, $\mathbf{R}_{\mathrm{Sh,ex!,sol}}$ jest rozszerzeniem rachunku $\mathbf{R}_{\mathrm{Sh,sol,ex!}}$. Pokażemy, że również rachunek $\mathbf{R}_{\mathrm{Sh,sol,ex!}}$ jest rozszerzeniem rachunku $\mathbf{R}_{\mathrm{Sh,ex!,sol}}$, czyli że oba rachunki są równoważne. W tym celu wystarczy pokazać, że każdy aksjomat rachunku $\mathbf{R}_{\mathrm{Sh,ex!,sol}}$ jest wyprowadzalny z aksjomatów rachunku $\mathbf{R}_{\mathrm{Sh,sol,ex!}}$:

— wyprowadzenie aksjomatów (12) i (def_2 sol): tak jak w § 4.

— wyprowadzenie aksjomatu (18):

---

[14] Podobnie przeprowadzimy dowód tego, że rachunek $\mathbf{R}_{\text{Ł}}$ (Łukasiewicza) oparty na (1), (2), (16) i 'SiS' jest pełny w sensie tradycyjnym.

Ponadto sosując pewne uproszczenia w dowodzie lematu o interpretacji dla $\mathbf{R}_{\mathrm{Sh,ex!}}$ można pokazać, że rachunek $\mathbf{R}_{\text{Ł,ex!}}$ oparty na (1), (2), (16), (18) i tradycyjnych tautologiach 'SiS' oraz '(SaP & ex!P) → ex!S', jest pełny w sensie tradycyjnym.

1. ex! S
2. S i P — zał.
3. sol S — z 1, (def_2 ex!) i taut. klas. rach. zdań
4. S a P — z 2, 3 i (20)

— wyprowadzenie aksjomatu (19):

1. S i S
2. S a P — zał.
3. ex! P
4. sol P — z 3, (def_2 ex!) i taut. klas. rach. zdań
5. sol S — z 2, 4 i (7)
6. ex! S — z 1, 5, (def_2 ex!) i taut. klas. rach. zdań □

Z lematu 3b wynika, że rachunek $\mathbf{R}_{Sh,sol}$ jest konserwatywnym rozszerzeniem rachunków $\mathbf{R}_{Sh}$ i $\mathbf{R}_{i,sol}$.

Na mocy wniosku 2 definicyjne rozszerzenie $\mathbf{R}_2^{max}$ w zbiorze Σ rachunku $\mathbf{R}_{Sh,sol}$ za pomocą tautologii (def ex), (def_2 ex!), (def o), (def e) oraz (def_4 ε), jest rachunkiem pełnym. Zatem rachunki $\mathbf{R}_1^{max}$ i $\mathbf{R}_2^{max}$ są równoważne.

3. RACHUNKI Z PIERWOTNYM SYMBOLEM 'ε'

§ 1. Zbadajmy w zbiorze Σ^{ε} rachunek $\mathbf{R}_{\varepsilon}$ mający jako aksjomaty poniższe tautologie:

(21) $S\varepsilon P \to S\varepsilon S$

(22) $(S\varepsilon P \,\&\, P\varepsilon P) \to P\varepsilon S$

(23) $(S\varepsilon M \,\&\, M\varepsilon P) \to S\varepsilon P$.

Opierając się na wyniku M. Takano z [7] (utożsamiając rachunek $\mathbf{R}_{\varepsilon}$ z pewną teorią elementarną, dla której Takano udowodnił twierdzenie o reprezentacji charakteryzujące jej modele) można pokazać, że rachunek $\mathbf{R}_{\varepsilon}$ jest pełny. W pracy tej wzmocnimy powyższy wynik. Pokażemy mianowicie, że rachunek $\mathbf{R}_{\varepsilon}$ jest pełny również względem tzw. tradycyjnej konsekwencji semantycznej (w definicji konsekwencji semantycznej dopuszczamy jedynie te interpretacje liter z **N**, które mają niepuste uniwersa oraz przyporządkowują literom z **N** niepuste podzbiory uniwersum). Ponieważ każdy aksjomat rachunku $\mathbf{R}_{\varepsilon}$ jest tautologią oraz relacja konsekwencji semantycznej zawiera się w relacji tradycyjnej konsekwencji semantycznej, więc na mocy lematu 1 z pełności rachunku $\mathbf{R}_{\varepsilon}$ względem tradycyjnej relacji konsekwencji wynika pełność rachunku $\mathbf{R}_{\varepsilon}$.

Zatem kwestia dopuszczalności podstawień nazw pustych w tezach rachunku $\mathbf{R}_{\varepsilon}$ jest nieistotna oraz zbiór $\mathrm{Taut}(\Sigma^{\varepsilon})$ pokrywa się ze zbiorem tzw. tradycyjnych tautologii należących do Σ^{ε}.

LEMAT (o interpretacji). Dla każdego zbioru π zawartego w Σ^{ε} i niesprzecznego w $\mathbf{R}_{\varepsilon}$ istnieje taka interpretacja $I = \langle U, D\rangle$ o niepustym uniwersum, że $\pi \subset \mathrm{VER}_I(\Sigma^{\varepsilon})$ oraz dla każdej litery $\underline{S}$ z $\mathbf{N}: D(\underline{S}) \neq \varnothing$.

DOWÓD. Niech π_ω będzie nadzbiorem maksymalnym w $\mathbf{R}_\varepsilon$ dla dowolnie wybranego niesprzecznego w $\mathbf{R}_\varepsilon$ zbioru π. W zbiorze $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$ zdefiniujmy relację równoważności $\tilde{\pi}_\omega$ poniższym wzorem:

$$\underline{S} \, \tilde{\pi}_\omega \, \underline{P} \quad \text{wtw} \quad \ulcorner \underline{S} \varepsilon \underline{P} \,\&\, \underline{P} \varepsilon \underline{S} \urcorner \in \pi_\omega \quad \text{lub} \quad \underline{S} = \underline{P}.$$

Niech $\underline{S}^0 := \{\underline{M} : \underline{M} \, \tilde{\pi}_\omega \, \underline{S}\}$ oraz $\mathbf{N}^0 := \{\underline{S}^0 : \underline{S} \in \mathbf{N}\}$.

Uniwersum szukanej interpretacji I_0 będzie zbiór $U_0 := \mathbf{N}^0 \cup \{\alpha, \beta\}$, gdzie $\alpha, \beta \notin \mathbf{N}^0$ oraz $\alpha \neq \beta$. Funkcję D_0 z $\mathbf{N}$ w $\mathbf{2}^{U_0}$ określamy wzorem:

$$D_0(\underline{S}) := \begin{cases} \{\underline{S}^0\}, & \text{gdy } \ulcorner \underline{S} \varepsilon \underline{S} \urcorner \in \pi_\omega \\ \{\underline{M}^0 : \ulcorner \underline{M} \varepsilon \underline{S} \urcorner \in \pi_\omega\} \cup \{\alpha, \beta\}, & \text{w przeciwnym wypadku.} \end{cases}$$

Wykażemy wyjściowy krok indukcyjny dla formuł atomowych. W tym celu pokażemy, że funkcja D_0 spełnia poniższe warunki: dla dowolnych $\underline{S}, \underline{P}$ z $\mathbf{N}$

(i) $\ulcorner \underline{S} \varepsilon \underline{P} \urcorner \in \pi_\omega$ wtw $\underline{S}^0 \in D_0(\underline{P})$

(ii) $\ulcorner \underline{S} \varepsilon \underline{S} \urcorner \in \pi_\omega$ wtw $\operatorname{Card} D_0(\underline{S}) = 1$.

Istotnie, (ii) jest oczywiste, jak również implikacja odwrotna w (i). Załóżmy zatem, że $\ulcorner \underline{S} \varepsilon \underline{P} \urcorner \in \pi_\omega$. W przypadku, gdy $\ulcorner \underline{P} \varepsilon \underline{P} \urcorner \in \pi_\omega$, na mocy aksjomatu (22) mamy $\ulcorner \underline{P} \varepsilon \underline{S} \urcorner \in \pi_\omega$. Zatem $\underline{S}^0 = \underline{P}^0$, czyli $\underline{S}^0 \in D_0(\underline{P})$. W przypadku, gdy $\ulcorner \neg \underline{P} \varepsilon \underline{P} \urcorner \in \pi_\omega$, wprost z określenia funkcji D_0 dostajemy $\underline{S}^0 \in D_0(\underline{P})$.

Niech $\ulcorner \underline{S} \varepsilon \underline{P} \urcorner \in \pi_\omega$. Wtedy na mocy aksjomatu (21) również $\ulcorner \underline{S} \varepsilon \underline{S} \urcorner \in \pi_\omega$. Zatem $D_0(\underline{S}) = \{\underline{S}^0\} \subset D_0(\underline{P})$, na mocy określenia funkcji D_0 oraz (i). Odwrotnie, niech $\operatorname{Card} D_0(\underline{S}) = 1$ i $D_0(\underline{S}) \subset D_0(\underline{P})$. Wtedy $D_0(\underline{S}) = \{\underline{S}^0\}$, czyli $\underline{S}^0 \in D_0(\underline{P})$. Stąd $\ulcorner \underline{S} \varepsilon \underline{P} \urcorner \in \pi_\omega$.

Wykazaliśmy, że $\ulcorner \underline{S} \varepsilon \underline{P} \urcorner \in \pi_\omega$ wtw $\ulcorner \underline{S} \varepsilon \underline{P} \urcorner \in \mathrm{VER}_{I_0}(\Sigma^\varepsilon)$. □[15]

§ 2. W zbiorze $\Sigma^{a,\varepsilon}$ zbudujemy rachunek $\mathbf{R}_{a,\varepsilon}$ mający jako aksjomaty następujące tautologie: (1), (2) oraz

(24) $S \varepsilon P \leftrightarrow (S \varepsilon S \,\&\, S a P)$

(25) $S \varepsilon P \rightarrow (P a S \leftrightarrow P \varepsilon P)$

(26) $(\neg S \varepsilon S \,\&\, S a P \,\&\, P \varepsilon P) \rightarrow S a M$

Możemy oczywiście wykazać pełność rachunku $\mathbf{R}_{a,\varepsilon}$ dowodząc dla niego lemat o interpretacji. Uniwersum szukanej interpretacji byłoby tak samo utworzone jak dla rachunku $\mathbf{R}_{a,ex!}$, zaś w określeniu funkcji D_0 zmieniamy

---

[15] Aksjomat (23) był potrzebny tylko do stwierdzenia, że relacja $\tilde{\pi}_\omega$ jest równoważnością, czyli że $\underline{S} \, \tilde{\pi}_\omega \, \underline{P}$ wtw $\underline{S}^0 = \underline{P}^0$ (w szczególności jeżeli $\ulcorner \underline{S} \varepsilon \underline{P} \,\&\, \underline{P} \varepsilon \underline{S} \urcorner \in \pi_\omega$, to $\underline{S}^0 = \underline{P}^0$).

Zauważmy, że podobny dowód można przeprowadzić dla interpretacji $I_1 = \langle U_1, D_1 \rangle$, dla której U_1 określamy podobnie jak U_0, zastępując jedynie zbiór klas abstrakcji $\mathbf{N}^0$ zbiorem „filtrów głównych w $\mathbf{N}$ wyznaczonych przez zbiór π_ω", tj. zbiór $\{[\underline{S}] : \underline{S} \in \mathbf{N}\}$, gdzie $[\underline{S}] := \{\underline{M} : \ulcorner \underline{S} \varepsilon \underline{M} \urcorner \in \pi_\omega\}$. Funkcję D_1 określimy podobnie jak D_0 zastępując tylko klasę abstrakcji $\underline{S}^0$ filtrem głównym $[\underline{S}]$. Wtedy na mocy aksjomatu (23) jeżeli $\ulcorner \underline{S} \varepsilon \underline{P} \,\&\, \underline{P} \varepsilon \underline{S} \urcorner \in \pi_\omega$, to $D_1(\underline{S}) = D_1(\underline{P})$.

jedynie warunek '$\ulcorner$ex!$\underline{S}\urcorner \in \pi_\omega$' na warunek '$\ulcorner \underline{S}\varepsilon\underline{S}\urcorner \in \pi_\omega$'. Pełność rachunku $\mathbf{R}_{a,\varepsilon}$ wynika również z wniosku 3 i poniższego lematu[16]:

LEMAT. Rachunki $\mathbf{R}_{a,\varepsilon}$ i $\mathbf{R}_{a,ex!}$ są definicyjnie równoważne i wszystkie definicje użyte do definicyjnych rozszerzeń są tautologiami.

DOWÓD. W zbiorze $\Sigma^{a,\varepsilon,ex!}$ budujemy za pomocą tautologii (def$_1$ ε) rachunek $\mathbf{R}_{a,ex!,\varepsilon}$ będący definicyjnym rozszerzeniem rachunku $\mathbf{R}_{a,ex!}$ oraz rachunek $\mathbf{R}_{a,\varepsilon,ex!}$ będący definicyjnym rozszerzeniem rachunku $\mathbf{R}_{a,\varepsilon}$ za pomocą definicji (def$_3$ ex!). Ponieważ rachunek $\mathbf{R}_{a,ex!}$ jest pełny, więc również rachunek $\mathbf{R}_{a,ex!,\varepsilon}$ jest pełny. Zatem na mocy lematu 1, rachunek $\mathbf{R}_{a,ex!,\varepsilon}$ jest rozszerzeniem rachunku $\mathbf{R}_{a,\varepsilon,ex!}$. Pokażemy, że również $\mathbf{R}_{a,\varepsilon,ex!}$ jest rozszerzeniem rachunku $\mathbf{R}_{a,ex!,\varepsilon}$, czyli że oba rachunki są równoważne. W tym celu wystarczy pokazać, że każdy aksjomat rachunku $\mathbf{R}_{a,ex!,\varepsilon}$ jest wyprowadzalny z aksjomatów rachunku $\mathbf{R}_{a,\varepsilon,ex!}$:

— wyprowadzenie (3):

1.	ex! S	zał.
2.	S a P	
3.	S ε S	z 1, (def$_3$ ex!) i taut. klas. rach. zdań
4.	S ε P	z 2, 3 i (24)
5a.	P a S	zał. dodatkowe
6a.	P ε P	z 5a, 4 i (25)
7a.	ex! P	z 6a i (def$_3$ ex!)
5b.	ex! P	zał. dodatkowe
6b.	P ε P	z 5b, (def$_3$ ex!) i taut. klas. rach. zdań
7b.	P a S	z 4, 6b i (25)

— wyprowadzenie (4): z (def$_3$ ex!) i (26)

— wyprowadzenie (def$_1$ ε): z (def$_3$ ex!) i (24). □

Z lematu 3b wynika, że rachunek $\mathbf{R}_{a,\varepsilon}$ jest konserwatywnym rozszerzeniem rachunków $\mathbf{R}_\varepsilon$ i $\mathbf{R}_a$ (o aksjomatach (1) i (2)).

§ 3. W zbiorze $\Sigma^{i,\varepsilon}$ zbudujemy rachunek $\mathbf{R}_{i,\varepsilon}$ mający jako aksjomaty następujące tautologie: (10), (11), (21) oraz

(27) $(S\varepsilon S \;\&\; SiP) \rightarrow S\varepsilon P$

(28) $(M\varepsilon S \;\&\; M\varepsilon P) \rightarrow SiP$.

Możemy wykazać pełność rachunku $\mathbf{R}_{i,\varepsilon}$ dowodząc dla niego lemat o realizacji. Pełność ta wynika również z wniosku 3 i poniższego lematu[17]:

LEMAT. Rachunki $\mathbf{R}_{i,ex!}$ i $\mathbf{R}_{i,\varepsilon}$ są definicyjnie równoważne i wszystkie definicje użyte do definicyjnych rozszerzeń są tautologiami.

---

[16] Można pokazać, że rachunek $\mathbf{R}^{!}_{a,\varepsilon}$ oparty na aksjomatach (1), (2), (22), (24) i tradycyjnej tautologii '$(SaP \;\&\; P\varepsilon P) \rightarrow S\varepsilon S$' jest pełny w sensie tradycyjnym.

[17] Można pokazać, że rachunek $\mathbf{R}^{!}_{i,\varepsilon}$ oparty na (11), (21), (27), (28) i 'SiS' jest pełny w sensie tradycyjnym.

DOWÓD. W zbiorze $\Sigma^{i,\varepsilon,ex!}$ budujemy definicyjne rozszerzenie $\mathbf{R}_{i,ex!,\varepsilon}$ rachunku $\mathbf{R}_{i,ex!}$ za pomocą tautologii (def$_3$ ε), oraz za pomocą tautologii (def$_3$ ex!) definicyjne rozszerzenie $\mathbf{R}_{i,\varepsilon,ex!}$ rachunku $\mathbf{R}_{i,\varepsilon}$. Ponieważ rachunek $\mathbf{R}_{i,ex!}$ jest pełny, więc również rachunek $\mathbf{R}_{i,ex!,\varepsilon}$ jest pełny. Zatem na mocy lematu 1, rachunek $\mathbf{R}_{i,ex!,\varepsilon}$ jest rozszerzeniem rachunku $\mathbf{R}_{i,\varepsilon,ex!}$. Pokażemy, że również $\mathbf{R}_{i,\varepsilon,ex!}$ jest rozszerzeniem rachunku $\mathbf{R}_{i,ex!,\varepsilon}$, czyli że są to rachunki równoważne. W tym celu wystarczy pokazać, że każdy aksjomat rachunku $\mathbf{R}_{i,ex!,\varepsilon}$ jest wyprowadzalny z aksjomatów rachunku $\mathbf{R}_{i,\varepsilon,ex!}$:

— wyprowadzenie (12):

1.	ex!S	zał.
2.	SεS	z (def$_3$ ex!), 1 i taut. klas. rach. zdań
3.	SiS	z 2, (28) i taut. klas. rach. zdań

— wyprowadzenie (13):

1.	ex!M	$\left.\begin{matrix} \\ \\ \\ \end{matrix}\right\}$ zał.
2.	MiS	
3.	MiP	
4.	MεM	z 1, (def$_3$ ex!) i taut. klas. rach. zdań
5.	MεS	z 2, 4 i (27)
6.	MεP	z 3, 4 i (27)
7.	SiP	z 5, 6 i (28)

— wyprowadzenie (def$_3$ ε):

1a.	SεP	zał.
2a.	SεS	z 1a i (21)
3a.	ex!S	z 2a, (def$_3$ ex!) i taut. klas. rach. zdań
4a.	SiP	z 2a, 1a i (28)
5a.	ex!S & SiP	z 3a, 4a i taut. klas. rach. zdań
1b.	ex!S & SiP	zał.
2b.	SεS & SiP	z 1b, (def$_3$ ex!) i taut. klas. rach. zdań
3b.	SεP	z 2b i (27). □

Z lematu 3b wynika, że $\mathbf{R}_{i,\varepsilon}$ jest konserwatywnym rozszerzeniem rachunków $\mathbf{R}_{\varepsilon}$ i $\mathbf{R}_{i}$ (o aksjomatach (10) i (11)).

§ 4. W zbiorze $\Sigma^{a,i,\varepsilon}$ można zdefiniować wszystkie pozostałe symbole z **F** za pomocą tautologii (def ex), (def$_3$ sol), (def$_3$ ex!), (def o) oraz (def e). Zbudujemy w nim rachunek $\mathbf{R}_{Sh,\varepsilon}$ mający jako aksjomaty następujące tautologie: (1), (2), (10), (16), (17), (21) oraz

(29) $S\varepsilon P \to SaP$

(30) $S\varepsilon S \to SiS$

(31) $(SaM \,\&\, M\varepsilon M \,\&\, SiP) \to S\varepsilon P$.

Można wykazać pełność rachunku $\mathbf{R}_{Sh,\varepsilon}$, dowodząc dla niego lemat o interpretacji. Pełność ta wynika również z wniosku 3 i poniższego lematu:

LEMAT. Rachunki $\mathbf{R}_{\mathrm{Sh},\varepsilon}$ i $\mathbf{R}_{\mathrm{Sh},\mathrm{ex!}}$ są definicyjnie równoważne i wszystkie definicje użyte do definicyjnych rozszerzeń są tautologiami.

DOWÓD. W zbiorze $\Sigma^{\mathrm{a},\mathrm{i},\varepsilon,\mathrm{ex!}}$ budujemy definicyjne rozszerzenie $\mathbf{R}_{\mathrm{Sh},\mathrm{ex!},\varepsilon}$ rachunku $\mathbf{R}_{\mathrm{Sh},\mathrm{ex!}}$ za pomocą tautologii (def$_1$ ε) (bądź (def$_3$ ε)), oraz za pomocą tautologii (def$_3$ ex!) definicyjne rozszerzenie $\mathbf{R}_{\mathrm{Sh},\varepsilon,\mathrm{ex!}}$ rachunku $\mathbf{R}_{\mathrm{Sh},\varepsilon}$. Ponieważ rachunek $\mathbf{R}_{\mathrm{Sh},\mathrm{ex!}}$ jest pełny, więc również $\mathbf{R}_{\mathrm{Sh},\mathrm{ex!},\varepsilon}$ jest pełny. Zatem na mocy lematu 1, rachunek $\mathbf{R}_{\mathrm{Sh},\mathrm{ex!},\varepsilon}$ jest rozszerzeniem rachunku $\mathbf{R}_{\mathrm{Sh},\varepsilon,\mathrm{ex!}}$. Pokażemy, że również $\mathbf{R}_{\mathrm{Sh},\varepsilon,\mathrm{ex!}}$ jest rozszerzeniem rachunku $\mathbf{R}_{\mathrm{Sh},\mathrm{ex!},\varepsilon}$, czyli że są to rachunki równoważne. W tym celu wystarczy pokazać, że każdy aksjomat rachunku $\mathbf{R}_{\mathrm{Sh},\mathrm{ex!},\varepsilon}$ jest wyprowadzalny z aksjomatów rachunku $\mathbf{R}_{\mathrm{Sh},\varepsilon,\mathrm{ex!}}$:

— wyprowadzenie (12): tak jak w § 3

— wyprowadzenie (18):

1.	ex!S	zał.
2.	SiP	zał.
3.	SεS	z 1, (def$_3$ ex!) i taut. klas. rach. zdań
4.	SεP	z 2, 3, (1) i (31)
5.	SaP	z 4 i (29)

— wyprowadzenie (19):

1.	SiS	zał.
2.	SaP	zał.
3.	ex!P	zał.
4.	SiP	z 1, 2 i (16)
5.	PεP	z 3, (def$_3$ ex!) i taut. klas. rach. zdań
6.	SεP	z 2, 4, 5 i (31)
7.	SεS	z 6 i (21)
8.	ex!S	z 7, (def$_3$ ex!) i taut. klas. rach. zdań

— wyprowadzenie (def$_1$ ε):

1a.	SεP	zał.
2a.	SεS & SaP	z 1a, (21), (29) i taut. klas. rach. zdań
3a.	ex!S & SaP	z 2a, (def$_3$ ex!) i taut. klas. rach. zdań
1b.	ex!S & SaP	zał.
2b.	SεS	z 1b, (def$_3$ ex!) i taut. klas. rach. zdań
3b.	SiS	z 2b i (30)
4b.	SiP	z 1b, 3b, (16) i taut. klas. rach. zdań
5b.	SεP	z 2b, 4b, (1) i (31). □

Łatwo zauważyć, że rachunek $\mathbf{R}_{\mathrm{Sh},\varepsilon}$ jest równoważny[18] następującym rachunkom zbudowanym w zbiorze $\Sigma^{\mathrm{a},\mathrm{i},\varepsilon}$:

[18] Można pokazać, że rachunek $\mathbf{R}_{\text{Ł},\varepsilon}$ oparty na (1), (2), (16), (21), (29), (31) i 'SiS', jest pełny w sensie tradycyjnym. Jest on równoważny następującym rachunkom:
— opartemu na: (1), (2), (16), (24), (18'), 'SiS', '(SaP & PεP) → SεS',
— opartemu na: (1), (2), (16), (21), (27), 'SiS' i '(SaP & PεP) → SεS'.

— opartemu na aksjomatach: (1), (2), (10), (16), (17), (24), (30) oraz
(18') $(S \varepsilon S \,\&\, S i P) \rightarrow S a P$
(19') $(S i S \,\&\, S a P \,\&\, P \varepsilon P) \rightarrow S \varepsilon S$
— opartemu na aksjomatach: (1), (2), (10), (16), (17), (21), (27), (29), (30), (19')
— opartemu na aksjomatach: (1), (2), (10), (16), (17), (21), (27), (29), (30) oraz
(32) $(S a P \,\&\, P \varepsilon S) \rightarrow S \varepsilon S$.

Wszystkie rozpatrywane w tym paragrafie rachunki są konserwatywnymi rozszerzeniami rachunków $\mathbf{R}_a$, $\mathbf{R}_i$, $\mathbf{R}_\varepsilon$, $\mathbf{R}_{Sh}$, $\mathbf{R}_{a,\varepsilon}$ i $\mathbf{R}_{i,\varepsilon}$. Ponadto ich definicyjne rozszerzenia w zbiorze Σ za pomocą tautologii (def ex), (def$_3$ ex!), (def$_3$ sol), (def o) oraz (def e), są pełne.

LITERATURA

[1] Morawiec A., *Podstawy logiki nazw*, Studia Logica, 12, s. 145–170.

[2] Quine W. V. O., *Methods of Logic*, New York 1950.

[3] Quine W. V. O., *Logika i reifikacja uniwersaliów*, [w:] *Z punktu widzenia logiki*, Warszawa 1969.

[4] Quine W. V. O., *Filozofia logiki*, Warszawa 1977.

[5] Shepherdson J. C., *On the Interpretation of Aristotelian Syllogistic*, Journal of Symbolic Logic, 21, 2, s. 137–147.

[6] Suszko R., *Concerning the method of logical schemes, the notion of logical calculus and the role of consequence relations*, Studia Logica, 11, s. 185–214.

[7] Takano M., *A semantical investigation into Leśniewski's axiom and his ontology*, Studia Logica, 22, 1, s. 71–77.