ACTA UNIVERSITATIS NICOLAI COPERNICI
LOGIKA II — NAUKI HUMANISTYCZNO-SPOŁECZNE — ZESZYT 235 — 1991

Katedra Logiki

Andrzej Pietruszczak

RACHUNEK ZDAŃ Z IMPLIKACJĄ KONEKTYWNĄ REICHENBACHA

I. FUNKTORY KONEKTYWNE REICHENBACHA

Hans Reichenbach w [3] wprowadził dwie interpretacje poniższych „tabel prawdziwościowych dla operacji propozycjonalnych":

a	$\neg a$
$\underline{t}$	$\underline{f}$
$\underline{f}$	$\underline{t}$

a	b	$a \& b$	$a \vee b$	$a \supset b$	$a \equiv b$
$\underline{t}$	$\underline{t}$	$\underline{t}$	$\underline{t}$	$\underline{t}$	$\underline{t}$
$\underline{t}$	$\underline{f}$	$\underline{f}$	$\underline{t}$	$\underline{f}$	$\underline{f}$
$\underline{f}$	$\underline{t}$	$\underline{f}$	$\underline{t}$	$\underline{t}$	$\underline{f}$
$\underline{f}$	$\underline{f}$	$\underline{f}$	$\underline{f}$	$\underline{t}$	$\underline{t}$

Definiuje on te interpretacje w następujący sposób:

„Powyższe tabele prawdziwości można czytać w dwóch kierunkach. Pierwszy od prawej do lewej.... Tabele te ustalają wówczas, że o ile prawdziwe jest zdanie złożone, to prawdziwy jest jeden z przypadków $\underline{t}$. (Przez przypadek $\underline{t}$ sądu złożonego rozumiemy każdą z tych kombinacji sądów elementarnych, której jest przyporządkowane '$\underline{t}$' w kolumnie sądu złożonego).... Drugi kierunek biegnie od lewej do prawej.... Tabele ustalają wówczas, że jeśli jeden z przypadków $\underline{t}$ zachodzi, to odpowiadająca mu operacja jest prawdziwa. ...

Interpretację, przy której tabele prawdziwości czyta się w obu kierunkach nazywać będziemy i n t e r p r e t a c j ą   a d i u n k t y w n ą tabel prawdziwości. Interpretację, przy której tabele czyta się tylko... od prawej do lewej, nazywamy i n t e r p r e t a c j ą   k o n e k t y w n ą tabel prawdziwości" (s. 33).

Zdanie zbudowane za pomocą jakiejś „operacji propozycjonalnej" interpretowanej konektywnie „ustala związek, czyli k o n e k s j ę między przypadkami $\underline{t}$ [tej operacji, *A. P.*] — w taki sposób, że jeśli jeden z przypadków

$\underline{t}$ nie zajdzie, to jeden z pozostałych przypadków $\underline{t}$ zajść musi" ([3], s. 34). Operacją, którą stosujemy przeważnie w interpretacji konektywnej, jest implikacja. ... Implikacji adiunktywnej rzadko kiedy używa się w języku potocznym. Podobnie równoważność... bywa stosowana przeważnie w sensie konektywnym. Alternatywy inkluzywnej 'lub' używamy w obu interpretacjach, 'i' przeważnie w interpretacji adiunktywnej. 'i' — w przeciwieństwie do innych operacji — ma jeden tylko przypadek $\underline{t}$; dlatego nie można tu mówić o związku, czyli koneksji między przypadkami $\underline{t}$. Istnieje jednak także i konektywna interpretacja 'i', w tym znaczeniu, że nie może się zdarzyć żaden inny przypadek. Podobnie jak 'i', również negacji używa się przeważnie adiunktywnie; w interpretacji konektywnej '$\neg a$' znaczy: '«a» jest koniecznie fałszywe'" ([3], s. 35).

Z interpretacją adiunktywną tabel związane są operacje adiunktywne, zaś z interpretacją konektywną — operacje konektywne. „Dwoistość interpretacji uprawnia do przyjęcia tej samej nazwy dla operacji obu rodzajów. I tak np. implikacja adiunktywna [termin ten jest dla Reichenbacha równoznaczny z terminem 'implikacja materialna'; *A. P.*] ma te same tabele prawdziwości co implikacja konektywna; operacje te różnią się tylko interpretacją przypadków $\underline{t}$, które przy pierwszej interpretacji znaczą weryfikację, a przy drugiej — zgodność. ... Ponieważ operacje adiunktywne weryfikuje się lub falsyfikuje za pomocą wartości logicznych sądów składowych, noszą one również nazwę funkcji [funktorów; *A. P.*] prawdziwościowych. Operacje konektywne nie mają charakteru funkcji prawdziwościowych w tym sensie..." ([3], s. 35, 36).

Przedstawiona powyżej «intuicyjna» interpretacja semantyczna funktorów konektywnych daje się wyrazić następująco: zdanie z danym funktorem jako głównym stwierdza, że niemożliwy jest żaden przypadek spoza przypadków $\underline{t}$ dla tego funktora.

Jako symboli dla funktorów prawdziwościowych (tj. „operacji adiunktywnych") negacji, koniunkcji, alternatywy, implikacji materialnej i równoważności materialnej używać będziemy odpowiednio znaków: '$\neg$', '$\&$', '$\vee$', '$\supset$' oraz '$\equiv$'. Z funktorów konektywnych analizować będziemy wyłącznie implikację i równoważność. Reprezentowane one będą odpowiednio przez symbole: '$\rightarrow$' oraz '$\leftrightarrow$'.

Podstawowym związkiem logicznym zachodzącym pomiędzy zdaniami jest wynikanie. Wyrażać go możemy za pomocą niezawodnych schematów wnioskowań (tj. zawsze prowadzących od prawdziwych przesłanek do prawdziwego wniosku). Wnioskowanie jest formalnie poprawne (inaczej: z przesłanek wynika logicznie wniosek), gdy podpada pod pewien schemat niezawodny. Zgodnie z tabelkami koniunkcji i implikacji materialnej schemat wnioskowania $\varphi_1, ..., \varphi_n/\varphi$ jest niezawodny wtedy i tylko wtedy, gdy schemat zdaniowy $((\varphi_1 \& ... \& \varphi_n) \supset \varphi)$ jest tautologią (tj. reprezentuje wyłącznie zdania prawdziwe). Zatem wyrażanie związku wynikania możemy przeprowadzić w ramach rachunku logicznego (tj. za pomocą schematów zdaniowych), przy czym jako funktora głównego tautologii wystarczy używać implikacji materialnej.

Jeżeli interesują nas wyłącznie własności wynikania związane jedynie z interpretacją funktorów prawdziwościowych, to — zgodnie z powyżej uczynioną uwagą — możemy wyrażać te własności w klasycznym rachunku zdań (tj. w formułach $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$, φ obok zmiennych zdaniowych mogą pojawić się wyłącznie symbole funktorów prawdziwościowych).

Podobnie możemy wyrażać własności wynikania zależne od interpretacji funktorów nieprawdziwościowych. Z pewnych względów związanych z trudnościami w analizie semantycznej wygodne jest ograniczenie do wyrażania tylko tych własności, które nie zależą od superponowania (inaczej: iteracji) funktorów nieprawdziwościowych. Wtedy powyżej przedstawiona metoda zamiany schematu wnioskowania na schemat zdaniowy pozwala nam pracować w ramach rachunku zdań, w którego formułach nie występuje superponowanie symboli funktorów nieprawdziwościowych (tj. żaden symbol funktora nieprawdziwościowego nie występuje w argumencie jakiegoś symbolu funktora nieprawdziwościowego). Wśród formuł takiego rachunku możemy znaleźć schematy niektórych zdań z implikacją jako funktorem głównym, które stwierdzają jedynie wynikanie następnika z poprzednika (wtedy tę implikację wystarczy traktować jako materialną). Przykładowo do tego rodzaju schematów zdaniowych zaliczymy: '$(p \,\&\, (p \rightarrow q)) \supset q$' oraz '$((p \rightarrow q) \,\&\, (q \rightarrow r)) \supset (p \rightarrow r)$'.

Przedstawiona powyżej «intuicyjna» interpretacja funktorów konektywnych wystarczyła Reichenbachowi do wykazania poprawności następującej reguły:

(rR) główną operację w tautologii klasycznego rachunku zdań można zastąpić odpowiadającą jej operacją konektywną.

Jednak ta «intuicyjna» interpretacja nie pozwala na formalne badania wynikania zachodzącego pomiędzy zdaniami, w których występują funktory konektywne. Ponadto uniemożliwia analizowanie formuł zdaniowych z superponowaniem funktorów konektywnych.

W pracy tej przedstawię formalną eksplikację Reichenbachowskiej interpretacji funktorów konektywnych. Podobnie jak Reichenbach nie będę analizował superponowania funktorów konektywnych. Dalej zbadam rachunek zdań, pełny względem podanej semantyki. Porównam również ten rachunek z systemami modalnymi.

II. KLASYCZNA LOGIKA ZDAŃ

W części tej przypomnę pewne fakty wykorzystywane w dalszych częściach pracy.

Literami reprezentującymi dowolne zdania w sensie logicznym (inaczej: zmiennymi zdaniowymi) będą: ‘p’, ‘q’, ‘r’, ‘p_1’, ‘q_1’, ‘r_1’, ‘p_2’, ... itd. Zbiór ich oznaczymy przez ‘$\underline{\mathrm{Zm}}$’. Niech Σ^{kl} będzie zbiorem schematów zdaniowych klasycznej logiki zdań, tj. najmniejszym zbiorem zawierającym $\underline{\mathrm{Zm}}$ i spełniającym warunki: jeżeli $\alpha, \beta \in \Sigma^{kl}$, to $\neg\alpha \in \Sigma^{kl}$ oraz $(\alpha \,\S\, \beta) \in \Sigma^{kl}$ dla $\S \in \{‘\&’, ‘\vee’, ‘\supset’, ‘\equiv’\}$.

Niech $X \subset \underline{\mathrm{Zm}}$. Wartościowaniem prawdziwościowym liter ze zbioru X jest dowolna funkcja określona na X i przyjmująca wartości w zbiorze wartości logicznych $\{\underline{t}, \underline{f}\}$. Gdy zbiór X ma n elementów, to mamy 2^n wartościowań na X.

Dla formuły α niech $\underline{\mathrm{Zm}}\alpha$ będzie zbiorem zmiennych zdaniowych występujących w formule α. Przyjmijmy, że w jest wartościowaniem na X oraz $\underline{\mathrm{Zm}}\alpha \subset X \subset \underline{\mathrm{Zm}}$. Stosując klasyczną interpretację symboli ‘$\neg$’, ‘&’, ‘$\vee$’, ‘$\supset$’, ‘$\equiv$’ oraz indukcję po podformułach formuły α, wyznaczamy jej wartość logiczną $w(\alpha)$ przy wartościowaniu w[1]. Zauważmy, że jeżeli wartościowania w oraz v określone na zbiorze X pokrywają się na zbiorze $\underline{\mathrm{Zm}}\alpha$, to $w(\alpha) = v(\alpha)$.

Schemat α z Σ^{kl} jest kl-tautologią wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego wartościowania w określonego na $\underline{\mathrm{Zm}}\alpha$ mamy $w(\alpha) = \underline{t}$.

Niech v będzie dowolnym wartościowaniem określonym na $\underline{\mathrm{Zm}}$. Wtedy dla każdej formuły z Σ^{kl} możemy określić jej wartość logiczną przy wartościowaniu v. Zatem każde wartościowanie określone na $\underline{\mathrm{Zm}}$ wyznacza w sposób jednoznaczny funkcję określoną na zbiorze Σ^{kl} i o wartościach w zbiorze $\{\underline{t}, \underline{f}\}$. Funkcję tę będziemy oznaczać zawsze tym samym symbolem co wyjściowe wartościowanie. Oczywiście, omawiana funkcja pokrywa się na zbiorze $\underline{\mathrm{Zm}}$ z wyjściowym wartościowaniem. Ponadto dla dowolnego wartościowania v określonego na $\underline{\mathrm{Zm}}$ mamy: $v(\alpha \,\&\, \beta) = \underline{t}$ wtw[2] $v(\alpha) = \underline{t}$ i $v(\beta) = \underline{t}$; $v(\alpha \vee \beta) = \underline{t}$ wtw $v(\alpha) = \underline{t}$ lub $v(\beta) = \underline{t}$; $v(\neg\alpha) = \underline{t}$ wtw $v(\alpha) = \underline{f}$; $v(\alpha \supset \beta) = \underline{t}$ wtw $v(\alpha) = \underline{f}$ lub $v(\beta) = \underline{t}$; $v(\alpha \equiv \beta) = \underline{t}$ wtw $v(\alpha) = v(\beta)$.

Niech $P(\Sigma^{kl})$ będzie zbiorem wszystkich podzbiorów zbioru Σ^{kl}. Relacja konsekwencji semantycznej $\models$ zawarta w iloczynie kartezjańskim $P(\Sigma^{kl}) \times \Sigma^{kl}$ jest zdefiniowana w sposób następujący: dla dowolnych $A \subset \Sigma^{kl}$ oraz $\beta \in \Sigma^{kl}$

$A \models \beta$ wtw dla każdego wartościowania v określonego na $\underline{\mathrm{Zm}}$ jeżeli $v(\alpha) = \underline{t}$ dla każdego α z A, to również $v(\beta) = \underline{t}$.

---

[1] Używamy tego samego oznaczenia, lecz nie prowadzi to do nieporozumień, gdyż z założenia funkcja w jest określona na $\underline{\mathrm{Zm}}\alpha$. Zamiast $w(\alpha)$ można by było pisać $\mathrm{Val}(w, \alpha)$. Dalej będziemy również stosować podobne skróty nie powodujące niejasności.

[2] ‘wtw’ jest skrótem zwrotu ‘wtedy i tylko wtedy, gdy’.

W przypadku, gdy $A = \emptyset$, piszemy '$\models \beta$'. Oczywiście $\models \beta$ wtw dla każdego wartościowania v określonego na $\underline{\text{Zm}}$ mamy $v(\beta) = \underline{t}$. Relacja $\models$ ma następujące własności:

(i) $A \models \beta$ wtw istnieje skończony podzbiór B zbioru A taki, że $B \models \beta$,
(ii) $\{\alpha_1, ..., \alpha_n\} \models \beta$ wtw $\models ((\alpha_1 \,\&\, ... \,\&\, \alpha_n) \supset \beta)$,
(iii) $\models \beta$ wtw β jest kl-tautologią.

III. FORMALIZACJA INTERPRETACJI REICHENBACHA

Niech Σ będzie najmniejszym zbiorem zawierającym zbiór Σ^{kl} i spełniającym poniższe warunki:

— jeżeli $\alpha, \beta \in \Sigma^{kl}$, to $(\alpha \rightarrow \beta) \in \Sigma$ oraz $(\alpha \leftrightarrow \beta) \in \Sigma$,
— jeżeli $\varphi \in \Sigma$, to $\neg \varphi \in \Sigma$,
— jeżeli $\varphi, \psi \in \Sigma$ i $\S \in \{$'&', '$\vee$', '$\supset$', '$\equiv$'$\}$, to $(\varphi \,\S\, \psi) \in \Sigma$.

Zatem w zbiorze Σ nie występuje superponowanie symboli '$\rightarrow$' i '$\leftrightarrow$'.

Dla dowolnej formuły φ z Σ niech kon-$\underline{\text{Zm}}\varphi$ będzie zbiorem tych zmiennych zdaniowych występujących w φ, których co najmniej jeden egzemplarz występuje w argumencie funktora konektywnego. Oczywiście, kon-$\underline{\text{Zm}}\varphi = \emptyset$ wtw $\varphi \in \Sigma^{kl}$.

Modelem formuły φ z Σ jest dowolna para uporządkowana $\langle w, M \rangle$, gdzie w jest wartościowaniem określonym na $\underline{\text{Zm}}\varphi$, zaś M jest zbiorem złożonym z pewnych wartościowań określonych na kon-$\underline{\text{Zm}}\varphi$, wśród których jest obcięcie wartościowania w do zbioru kon-$\underline{\text{Zm}}\varphi$.

PRZYKŁADY: 1. Dla formuł z Σ^{kl} każdy model jest postaci $\langle w, \{\emptyset\} \rangle$, gdzie w jest wartościowaniem określonym na zbiorze zmiennych występujących w danej formule. Istotnie, gdy $\alpha \in \Sigma^{kl}$, to wtedy kon-$\underline{\text{Zm}}\alpha = \emptyset$. Istnieje dokładnie jedna funkcja określona na zbiorze $\emptyset$, jest nią samo $\emptyset$. Zatem w tym przypadku każde wartościowanie określone na kon-$\underline{\text{Zm}}\alpha$ jak również obcięcie do kon-$\underline{\text{Zm}}\alpha$ dowolnego wartościowania określonego na $\underline{\text{Zm}}\alpha$, równe jest $\emptyset$. Stąd w dowolnym modelu formuły α mamy $M = \{\emptyset\}$.

2. Jeżeli kon-$\underline{\text{Zm}}\varphi = \underline{\text{Zm}}\varphi$, to w dowolnym modelu formuły φ zbiór M składa się z pewnych wartościowań określonych na $\underline{\text{Zm}}\varphi$, do których należy wartościowanie w.

3. Niech $\underline{\text{Zm}}\varphi = \{$'p', 'q'$\}$ oraz kon-$\underline{\text{Zm}}\varphi = \{$'p'$\}$. Mamy cztery wartościowania określone na $\underline{\text{Zm}}\varphi$:

	w_1	w_2	w_3	w_4
p	$\underline{t}$	$\underline{t}$	$\underline{f}$	$\underline{f}$
q	$\underline{t}$	$\underline{f}$	$\underline{t}$	$\underline{f}$

oraz dwa wartościowania określone na zbiorze kon-$\underline{\mathrm{Zm}}\varphi$:

	v_1	v_2
p	$\underline{t}$	$\underline{f}$

Oczywiście obcięcia funkcji w_1 i w_2 (odp. w_3 i w_4) do zbioru kon-$\underline{\mathrm{Zm}}\varphi$ są równe wartościowaniu v_1 (odp. v_2). Mamy zatem osiem modeli formuły φ: $\langle w_1, \{v_1\}\rangle$, $\langle w_1, \{v_1, v_2\}\rangle$, $\langle w_2, \{v_1\}\rangle$, $\langle w_2, \{v_1, v_2\}\rangle$, $\langle w_3, \{v_2\}\rangle$, $\{w_3, \{v_1, v_2\}\rangle$, $\langle w_4, \{v_2\}\rangle$, $\langle w_4, \{v_1, v_2\}\rangle$.

4. Dla formuły '(q & (((p ∨ q) → q) & r)) ⊃ ¬r' oznaczanej dalej przez 'ψ' mamy: $\underline{\mathrm{Zm}}\psi = \{$'p', 'q', 'r'$\}$ oraz kon-$\underline{\mathrm{Zm}}\psi = \{$'p', 'q'$\}$. Funkcje $w_1, \ldots, w_4$ z przykładu 3 to wszystkie wartościowania określone na kon-$\underline{\mathrm{Zm}}\psi$. Mamy oczywiście osiem wartościowań określonych na $\underline{\mathrm{Zm}}\psi$. Jednym z nich jest w_0 takie, że w_0('p') $= \underline{f}$ oraz w_0('q') $= w_0$('r') $= \underline{t}$. Obcięciem wartościowania w_0 do kon-$\underline{\mathrm{Zm}}\psi$ jest wartościowanie w_3. Mamy zatem przykładowo następujące modele formuły ψ: $\langle w_0, \{w_3\}\rangle$, $\langle w_0, \{w_1, w_3\}\rangle$, $\langle w_0, \{w_2, w_3\}\rangle$, $\langle w_0, \{w_3, w_4\}\rangle$, $\langle w_0, \{w_1, w_2, w_3\}\rangle$, $\langle w_0, \{w_1, w_3, w_4\}\rangle$, $\langle w_0, \{w_2, w_3, w_4\}\rangle$, $\langle w_0, \{w_1, w_2, w_3, w_4\}\rangle$. Ogółem wszystkich modeli formuły ψ jest 64 (udowodniono to w stwierdzeniu 1).

Elementy zbioru M możemy intuicyjnie interpretować jako możliwe sytuacje w rzeczywistej sytuacji w, rozważane w zakresie istotnym dla badanej formuły (tj. ograniczone tylko do tych zmiennych, które podlegają działaniu funktorów konektywnych).

STWIERDZENIE 1. Jeżeli $\underline{\mathrm{Zm}}\varphi$ ma n elementów i kon-$\underline{\mathrm{Zm}}\varphi$ ma k elementów, to istnieje 2^{2^k+n-1} modeli formuły φ.

DOWÓD. Zbiory wszystkich wartościowań określonych na $\underline{\mathrm{Zm}}\varphi$ i wszystkich wartościowań określonych na kon-$\underline{\mathrm{Zm}}\varphi$ liczą odpowiednio po 2^n oraz 2^k elementów. Ustalmy wartościowanie w_0 na $\underline{\mathrm{Zm}}\varphi$. Zbiór M w modelu $\langle w_0, M\rangle$ ma składać się z obcięcia wartościowania w_0 do kon-$\underline{\mathrm{Zm}}\varphi$ i pewnej ilości wartościowań określonych na kon-$\underline{\mathrm{Zm}}\varphi$, które mogą być wybrane spośród $2^k - 1$ wartościowań (wszystkie minus jedno ustalone, które musi należeć do M). Ilość tych wyborów jest równa 2^{2^k-1} (można również nic nie wybrać). Powtarzając to rozumowanie dla wszystkich wartościowań na $\underline{\mathrm{Zm}}\varphi$ otrzymujemy, że wszystkich modeli jest $2^n \cdot 2^{2^k-1}$.

Zauważmy, że dla formuł z Σ^{kl} powyższe stwierdzenie daje klasyczny wynik 2^n ($k = 0$, więc $2^{2^0-1} = 2^{1-1} = 2^0 = 1$).

Niech $\varphi \in \Sigma$ oraz niech $m = \langle w, M\rangle$ będzie dowolnym modelem formuły φ. Za pomocą indukcji po podformułach formuły φ, w zbiorze $\{\underline{t}, \underline{f}\}$ wyznaczymy jej wartość logiczną $m(\varphi)$ w modelu m. Załóżmy, że ψ jest dowolną podformułą formuły φ. Wtedy:

1° jeżeli $\psi \in \underline{\mathrm{Zm}}\varphi$, to $m(\psi) = w(\psi)$,

2° jeżeli $\psi = (\alpha \to \beta)$ dla pewnych α, β z Σ^{kl}, to
$m(\psi) = \underline{t}$ wtw dla każdego v z M: $v(\alpha) = \underline{f}$ lub $v(\beta) = \underline{t}$.
Ponieważ zbiór kon-$\underline{\mathrm{Zm}}\varphi \neq \emptyset$ i zawiera $\underline{\mathrm{Zm}}\alpha$ oraz $\underline{\mathrm{Zm}}\beta$, więc dla dowolnego v z M możemy obliczyć $v(\alpha)$ oraz $v(\beta)$.
3° jeżeli $\psi = (\alpha \leftrightarrow \beta)$ dla pewnych α, β z Σ^{kl}, to
$m(\psi) = \underline{t}$ wtw dla dowolnego v z M mamy $v(\alpha) = v(\beta)$.
4° jeżeli $\psi = \neg\chi$, to $m(\psi) = \underline{t}$ wtw $m(\chi) = \underline{f}$,
5° jeżeli $\psi = (\chi \mathbin{\&} \sigma)$, to $m(\psi) = \underline{t}$ wtw $m(\chi) = \underline{t}$ i $m(\sigma) = \underline{t}$,
6° jeżeli $\psi = (\chi \vee \sigma)$, to $m(\psi) = \underline{t}$ wtw $m(\chi) = \underline{t}$ lub $m(\sigma) = \underline{t}$,
7° jeżeli $\psi = (\chi \supset \sigma)$, to $m(\psi) = \underline{t}$ wtw $m(\chi) = \underline{t}$ lub $m(\sigma) = \underline{t}$,
8° jeżeli $\psi = (\chi \equiv \sigma)$, to $m(\psi) = \underline{t}$ wtw $m(\chi) = m(\sigma)$.

Zauważmy, z 1°, 4°–8° wynika, iż jeżeli $\varphi \in \Sigma^{kl}$, to $m(\varphi) = w(\varphi)$. Upoważnia nas to do utożsamiania dowolnego modelu $\langle w, \{\emptyset\}\rangle$ danej formuły z Σ^{kl} z wartościowaniem w. Zatem przyjęta semantyka dla formuł z Σ jest naturalnym rozszerzeniem semantyki klasycznej logiki zdań.

PRZYKŁAD 5. Obliczymy wartość formuły z przykładu 4 w kilku z podanych tam modeli:

	(q	&	(((p	∨	q)	→	q)	&	r))	⊃	¬	r
$\langle w_0, \{w_3\}\rangle$	$\underline{t}$	$\underline{t}$	$\underline{f}$	$\underline{t}$	$\underline{t}$	$\underline{t}$	$\underline{t}$	$\underline{t}$	$\underline{t}$	$\underline{f}$	$\underline{f}$	$\underline{t}$
$\langle w_0, \{w_1, w_3\}\rangle$	$\underline{t}$	$\underline{t}$	$\underline{f}$	$\underline{t}$	$\underline{t}$	$\underline{t}$	$\underline{t}$	$\underline{t}$	$\underline{t}$	$\underline{f}$	$\underline{f}$	$\underline{t}$
$\langle w_0, \{w_2, w_3\}\rangle$	$\underline{t}$	$\underline{f}$	$\underline{f}$	$\underline{t}$	$\underline{t}$	$\underline{f}$	$\underline{t}$	$\underline{f}$	$\underline{t}$	$\underline{t}$	$\underline{f}$	$\underline{t}$
$\langle w_0, \{w_1, w_2, w_3\}\rangle$	$\underline{t}$	$\underline{f}$	$\underline{f}$	$\underline{t}$	$\underline{t}$	$\underline{f}$	$\underline{t}$	$\underline{f}$	$\underline{t}$	$\underline{t}$	$\underline{f}$	$\underline{t}$

Wartość formuły w danym modelu jest podana pod jej funktorem głównym.

Mówimy, że formuła φ z Σ jest kon-tautologią wtw dla dowolnego modelu m formuły φ mamy $m(\varphi) = \underline{t}$.

PRZYKŁAD 6. W części VIII pokażemy, że formuła:

$$((p \to q) \mathbin{\&} (q \to r)) \supset (p \to r)$$

jest kon-tautologią (bezpośredni dowód tego byłby żmudny, gdyż formuła ta posiada 2^{10} modeli)

7a. Podobnie w części VIII pokażemy, że formuła:

$$((p \vee q) \mathbin{\&} (p \to r) \mathbin{\&} \neg q) \supset r$$

jest kon-tautologią. «Stwierdza ona podobne wynikanie» (w sensie podanym w cz. I) co kon-tautologia:

$$((p \vee q) \mathbin{\&} (p \to r)) \supset (\neg q \supset r)$$

7b. Jednak formuła:

$$((p \vee q) \mathbin{\&} (p \to r)) \supset (\neg q \to r)$$

nie jest kon-tautologią. Rzeczywiście przykładowo w modelu $\langle w, \{w, v\}\rangle$, w którym $w(\text{‘p’}) = w(\text{‘q’}) = w(\text{‘r’}) = \underline{t}$ oraz $v(\text{‘p’}) = v(\text{‘q’}) = v(\text{‘r’}) = \underline{f}$, formuła ta przyjmuje wartość $\underline{f}$:

$$((\mathrm{p} \vee \mathrm{q}) \,\&\, (\mathrm{p} \to \mathrm{r})) \supset (\neg \mathrm{q} \to \mathrm{r})$$
$$\underline{\mathrm{t}}\ \underline{\mathrm{t}}\ \underline{\mathrm{t}}\ \ \underline{\mathrm{t}}\ \ \underline{\mathrm{t}}\ \underline{\mathrm{t}}\ \underline{\mathrm{t}}\quad \underline{\mathrm{f}}\quad \underline{\mathrm{f}}\ \underline{\mathrm{t}}\ \underline{\mathrm{f}}\ \underline{\mathrm{t}}$$

8a. Łatwo pokazać, że formuła:

$$(((\mathrm{p} \,\&\, \mathrm{q}) \to \mathrm{r}) \,\&\, \mathrm{p}) \supset (\mathrm{q} \supset \mathrm{r})$$

jest kon-tautologią (możemy porównać ją z kl-tautologią '$(((\mathrm{p} \,\&\, \mathrm{q}) \supset \mathrm{r}) \,\&\, \mathrm{p}) \supset$ $\supset (\mathrm{q} \supset \mathrm{r})$'). «Stwierdza ona podobne wynikanie» co kon-tautologia:

$$(((\mathrm{p} \,\&\, \mathrm{q}) \to \mathrm{r}) \,\&\, \mathrm{p} \,\&\, \mathrm{q}) \supset \mathrm{r}$$

8b. Pokażemy, że jednak formuła:

$$(((\mathrm{p} \,\&\, \mathrm{q}) \to \mathrm{r}) \,\&\, \mathrm{p}) \supset (\mathrm{q} \to \mathrm{r})$$

nie jest kon-tautologią. Istotnie przykładowo w modelu $\langle w, \{w, v\}\rangle$, w którym $w(\mathrm{p}) = w(\mathrm{q}) = w(\mathrm{r}) = \underline{\mathrm{t}}$ oraz $v(\mathrm{p}) = v(\mathrm{r}) = \underline{\mathrm{f}}$ i $v(\mathrm{q}) = \underline{\mathrm{t}}$ formuła ta przyjmuje wartość $\underline{\mathrm{f}}$.

Łatwo możemy dowieść poniższego stwierdzenia:

STWIERDZENIE 2. Dla dowolnych $\alpha, \beta, \alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \ldots, \beta_n, \gamma_1, \ldots, \gamma_k, \ldots,$ $\delta_1, \ldots, \delta_k$ z Σ^{kl} oraz φ, ψ z Σ:

(i) α jest kl-tautologią wtw α jest kon-tautologią.

(ii) jeżeli φ jest podstawieniem pewnej kl-tautologii, to φ jest kon-tautologią.

(iii) $((\alpha \to \beta) \supset (\alpha \supset \beta))$ jest kon-tautologią.

(iv) $((\alpha \leftrightarrow \beta) \equiv ((\alpha \to \beta) \,\&\, (\beta \to \alpha)))$ jest kon-tautologią.

(v) jeżeli φ oraz $(\varphi \supset \psi)$ są kon-tautologiami, to ψ jest kon-tautologią.

(vi) $(\alpha \supset \beta)$ jest kl-tautologią wtw $(\alpha \to \beta)$ jest kon-tautologią.

(vii) $((\alpha_1 \supset \beta_1) \,\&\ldots\&\, (\alpha_n \supset \beta_n)) \supset ((\gamma_1 \supset \delta_1) \,\&\ldots\&\, (\gamma_k \supset \delta_k))$ jest kl-tautotologią wtw $((\alpha_1 \to \beta_1) \,\&\ldots\&\, (\alpha_n \to \beta_n)) \supset ((\gamma_1 \to \delta_1) \,\&\ldots\&\, (\gamma_k \to \delta_k))$ jest kon-tautologią.

IV. RACHUNEK $\underline{\mathrm{R}}_{\underline{\mathrm{kon}}}$

Rachunek ten zbudujemy w zbiorze Σ. Dla dowolnych formuł α, β z Σ^{kl} oraz φ, ψ, χ z Σ aksjomatami rachunku $\underline{\mathrm{R}}_{\underline{\mathrm{kon}}}$ są poniższe formuły należące do Σ:

(1) $(\varphi \supset (\psi \supset \varphi))$

(2) $(\varphi \supset (\psi \supset \chi)) \supset ((\varphi \supset \psi) \supset (\varphi \supset \chi))$

(3) $(\neg \psi \supset \neg \varphi) \supset ((\neg \psi \supset \varphi) \supset \psi)$

(4) $(\varphi \equiv \psi) \supset (\varphi \supset \psi)$

(5) $(\varphi \equiv \psi) \supset (\psi \supset \varphi)$

(6) $(\varphi \supset \psi) \supset ((\psi \supset \varphi) \supset (\varphi \equiv \psi))$

(7) $(\varphi \,\&\, \psi) \equiv \neg(\varphi \supset \neg \psi)$

(8) $(\varphi \vee \psi) \equiv (\neg \varphi \supset \psi)$

(9) $(\alpha \to \beta) \supset (\alpha \supset \beta)$

(10) $(\alpha \leftrightarrow \beta) \equiv ((\alpha \to \beta) \,\&\, (\beta \to \alpha))$

Na mocy stwierdzenia 2 wszystkie aksjomaty rachunku $\underline{R}_{kon}$ są kon-tautologiami.

Regułami rachunku $\underline{R}_{kon}$ są poniższe relacje na Σ:

$\langle\varphi, \chi, \psi\rangle \in \underline{mp}$ wtw $\chi = (\varphi \supset \psi)$.

$\langle\varphi, \psi\rangle \in \underline{rR}$ wtw istnieje takie α, β w Σ^{kl}, że $\varphi = (\alpha \cdot\supset \beta)$ oraz $\psi = (\alpha \rightarrow \beta)$.

$\langle\varphi, \psi\rangle \in \underline{rk}$ wtw dla pewnych $\alpha, \beta, \alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \ldots, \beta_n$ z Σ^{kl} $(n \geqslant 1)$ mamy $\varphi = (((\alpha_1 \supset \beta_1) \& \ldots \& (\alpha_n \supset \beta_n)) \supset (\alpha \supset \beta)$ oraz $\psi = (((\alpha_1 \rightarrow \beta_1) \& \ldots \& (\alpha_n \rightarrow \beta_n)) \supset \supset (\alpha \rightarrow \beta)$.

Na mocy stwierdzenia 2 otrzymujemy, że jeżeli formuły φ, χ w powyższych regułach są kon-tautologiami, to również formuła ψ jest kon-tautologią.

Mówimy, że formuła φ z Σ jest tezą rachunku $\underline{R}_{kon}$ wtw istnieje ciąg $\langle\varphi_1, \ldots, \varphi_n\rangle$ formuł z Σ taki, że $\varphi_n = \varphi$ oraz dla każdego $i \leqslant n$: φ_i jest aksjomatem rachunku $\underline{R}_{kon}$ lub istnieją $j, k < i$ takie, że $\langle\varphi_j, \varphi_k, \varphi_i\rangle \in \underline{mp}$ lub $\langle\varphi_j, \varphi_i\rangle \in \underline{rR}$ lub $\langle\varphi_j, \varphi_i\rangle \in \underline{rk}$.

Wprost z definicji i stwierdzenia 2 otrzymujemy:

STWIERDZENIE 3. Każda teza rachunku $\underline{R}_{kon}$ jest kon-tautologią.

W części VII udowodnimy, że również każda kon-tautologia jest tezą rachunku $\underline{R}_{kon}$.

W zbiorze Σ^{kl} możemy zbudować klasyczny rachunek zdań ($\underline{KRZ}$) w następujący sposób:

(i) aksjomatami rachunku $\underline{KRZ}$ są te i tylko te formuły z Σ^{kl}, które podpadają pod jeden ze schematów (1)–(8).

(ii) jedyną regułą rachunku $\underline{KRZ}$ jest relacja $\underline{mp}$ ograniczona do zbioru Σ^{kl}.

(iii) α jest tezą $\underline{KRZ}$ wtw istnieje ciąg $\langle\alpha_1, \ldots, \alpha_n\rangle$ formuł z Σ^{kl} taki, że $\alpha_n = \alpha$ oraz dla każdego $i \leqslant n$: α_i jest aksjomatem rachunku $\underline{KRZ}$ lub istnieją $j, k < i$ takie, że $\langle\alpha_j, \alpha_k, \alpha_i\rangle \in \underline{mp}$.

Wiadomo, że tak zdefiniowany zbiór tez $\underline{KRZ}$ pokrywa się ze zbiorem kl-tautologii. W poniższym stwierdzeniu pokażemy związek zachodzący pomiędzy tezami $\underline{KRZ}$ a tezami $\underline{R}_{kon}$:

STWIERDZENIE 4. Dla dowolnych φ z Σ oraz α z Σ^{kl}:

(i) jeżeli φ jest tezą $\underline{R}_{kon}$ i φ posiada dowód w $\underline{R}_{kon}$ składający się wyłącznie z formuł należących do Σ^{kl}, to φ jest tezą $\underline{KRZ}$.

(ii) α jest tezą $\underline{KRZ}$ wtw α jest tezą $\underline{R}_{kon}$.

(iii) jeżeli φ jest podstawieniem jakiejś tezy $\underline{KRZ}$ (lub samo jest tezą $\underline{KRZ}$), to φ jest tezą $\underline{R}_{kon}$ i φ posiada dowód w $\underline{R}_{kon}$, w którym użyto wyłącznie aksjomatów (1)–(8) i reguły $\underline{mp}$.

DOWÓD:

(i) jeżeli φ posiada taki dowód, to nie mogły być w tym dowodzie użyte reguły $\underline{rR}$ i $\underline{rk}$ oraz wszystkie występujące w nim aksjomaty są formułami z Σ^{kl} podpadającymi pod schematy (1)–(8).

(ii) za pomocą indukcji łatwo pokazać, że jeżeli α jest tezą $\underline{R}_{kon}$, to posiada dowód składający się wyłącznie z formuł należących do Σ^{kl}. □

Za pomocą indukcji po podformułach możemy również wykazać, że zachodzi:

STWIERDZENIE 5. Dla dowolnych $\alpha, \beta, \alpha_1, ..., \alpha_n, \beta_1, ..., \beta_n, \gamma_1, ..., \gamma_k, \delta_1, ..., \delta_k$ z Σ^{kl}:

(i) $(\alpha \supset \beta)$ jest tezą KRZ wtw $(\alpha \rightarrow \beta)$ jest tezą R_{kon}.

(ii) $((\alpha_1 \supset \beta_1) \& ... \& (\alpha_n \supset \beta_n)) \supset ((\gamma_1 \supset \delta_1) \& ... \& (\gamma_k \supset \delta_k))$ jest tezą KRZ wtw $((\alpha_1 \rightarrow \beta_1) \& ... \& (\alpha_n \rightarrow \beta_n)) \supset ((\gamma_1 \rightarrow \delta_1) \& ... \& (\gamma_k \rightarrow \delta_k))$ jest tezą R_{kon}.

W zbiorze Σ możemy zbudować rachunek R'_{kon} równoważny rachunkowi R_{kon}. Rachunek R'_{kon} oparty jest na regułach mp i rk oraz aksjomatach (1)–(10) plus dla wszystkich α z Σ^{kl} formuła:

(11) $$(\alpha \rightarrow \alpha)$$

Istotnie, formuła (11) jest tezą rachunku R_{kon}, gdyż $(\alpha \supset \alpha)$ jest tezą rachunku KRZ.

Ponadto każde użycie reguły rR w rachunku R_{kon} jest odtwarzalne w rachunku R'_{kon}:

1. $(\alpha \supset \beta)$	przesłanka reguły rR
2. $(\alpha \supset \beta) \supset ((\gamma \supset \gamma) \supset (\alpha \supset \beta))$	(1), $\gamma \in \Sigma^{kl}$
3. $(\gamma \supset \gamma) \supset (\alpha \supset \beta)$	z 1. i 2. oraz mp
4. $(\gamma \rightarrow \gamma) \supset (\alpha \rightarrow \beta)$	z 3. i rk
5. $(\gamma \rightarrow \gamma)$	(11)
6. $(\alpha \rightarrow \beta)$	z 4. i 5. oraz mp; następnik rR

V. ALTERNATYWNA SEMANTYKA DLA R_{kon} I JEJ ZWIĄZEK Z SEMANTYKĄ DLA RACHUNKU S5

Niech Φ będzie najmniejszym zbiorem zawierającym zbiór Zm i domkniętym na działanie wszystkich symboli '$\neg$', '&', '$\vee$', '$\supset$', '$\equiv$', '$\rightarrow$' oraz '$\leftrightarrow$'. Oczywiście Σ jest podzbiorem właściwym zbioru Φ oraz w Φ dopuszczalne są iteracje wszystkich funktorów. W [1] wprowadzono następujące pojęcie modelu dla formuł z Φ[3]:

S5-modelem formuły f z Φ jest dowolna para uporządkowana $\langle w, W\rangle$, w której w jest wartościowaniem określonym na zbiorze Zm f, zaś W jest zbiorem złożonym z pewnych wartościowań określonych na Zm f, wśród których występuje wartościowanie w.

[3] Modele te są również opisane w [2], gdzie porównuje się je z innymi modelami opartymi na strukturach modelowych Kripkego. Ponieważ modele te są odpowiednie dla systemu S5, więc będę używać dla nich nazwy 'S5-model'. Kripke używał tej nazwy dla modeli opartych na S5-strukturach modelowych, tj. uporządkowanych trójkach $\langle G, K, R\rangle$, w których K jest zbiorem niepustym, $G \in K$ oraz R jest relacją równoważności na zbiorze K (można również przyjąć, w sposób równoważny, że R jest relacją pełną na K; [2]). System S5 jest pełny względem klasy tych modeli.

Rozumując podobnie jak w stwierdzeniu 1, można pokazać, że jeżeli $\underline{\mathrm{Zm}} f$ ma n elementów, to istnieje 2^{2^n+n-1} $\underline{\mathrm{S}5}$-modeli formuły f.

Niech $f \in \Phi$ oraz niech $\mu = \langle w, W \rangle$ będzie dowolnie wybranym $\underline{\mathrm{S}5}$-modelem formuły f. Zbiór W i dowolnie wybrane w nim wartościowanie v wyznaczają jednoznacznie w zbiorze $\{\underline{t}, \underline{f}\}$ wartość logiczną formuły f, oznaczaną dalej przez '$W(f, v)$'. $W(f, v)$ określamy indukcyjnie po podformułach formuły f, przy czym wyróżnione wartościowanie w w modelu μ nie będzie odgrywać żadnej roli:

założmy, że g jest podformułą formuły f, jeżeli
- — $g \in \underline{\mathrm{Zm}} f$, to $W(g, v) = v(g)$,
- — $g = \neg h$, to $W(g, v) = \underline{t}$ wtw $W(h, v) = f$,
- — $g = (h_1 \& h_2)$, to $W(g, v) = \underline{t}$ wtw $W(h_1, v) = \underline{t}$ i $W(h_2, v) = \underline{t}$,
- — $g = (h_1 \vee h_2)$, to $W(g, v) = \underline{t}$ wtw $W(h_1, v) = \underline{t}$ lub $W(h_2, v) = \underline{t}$,
- — $g = (h_1 \supset h_2)$, to $W(g, v) = \underline{t}$ wtw $W(h_1, v) = \underline{f}$ lub $W(h_2, v) = \underline{t}$,
- — $g = (h_1 \equiv h_2)$, to $W(g, v) = \underline{t}$ wtw $W(h_1, v) = W(h_2, v)$,
- — $g = (h_1 \rightarrow h_2)$, to $W(g, v) = \underline{t}$ wtw dla dowolnego u z W: $W(h_1, u) = \underline{f}$ lub $W(h_2, u) = \underline{t}$,
- — $g = (h_1 \leftrightarrow h_2)$, to $W(g, v) = \underline{t}$ wtw dla dowolnego u z W: $W(h_1, u) = W(h_2, u)$.

Zauważmy, że powyższej procedury (pochodzącej z [1]) nie można zastosować do modeli omawianych w cz. III, gdyż wartościowania ze zbioru M nie muszą być określone na całym zbiorze $\underline{\mathrm{Zm}} f$.

Oczywiście, jeżeli $f \in \Sigma^{\mathrm{kl}}$, to $W(f, v) = v(f)$ (w oznaczeniach z cz. II).

Dla dowolnej formuły f z Φ i dowolnego modelu $\mu = \langle w, W \rangle$ formuły f przyjmujemy:

wartością logiczną $\mu(f)$ formuły f w modelu μ jest $W(f, w)$.

Mówimy, że formuła f z Φ jest $\underline{\mathrm{S}5}$-tautologią wtw dla dowolnego $\underline{\mathrm{S}5}$-modelu μ mamy $\mu(f) = \underline{t}$.

Wyróżnienie wartościowania w w modelu $\mu = \langle w, W \rangle$ nie gra istotnej roli w definicji $\underline{\mathrm{S}5}$-tautologii, gdyż dla dowolnego f z Φ mamy: f jest $\underline{\mathrm{S}5}$-tautologią wtw dla dowolnego niepustego zbioru wartościowań W określonych na $\underline{\mathrm{Zm}} f$ i dowolnego wartościowania v należącego do W mamy $W(f, v) = \underline{t}$.

Podobnie jak w cz. II dla klasycznego rachunku zdań, także tutaj możemy wprowadzić absolutne $\underline{\mathrm{S}5}$-modele nie zrelatywizowane do danej formuły. Absolutnym $\underline{\mathrm{S}5}$-modelem jest dowolna para uporządkowana $\langle w, W \rangle$, w której w jest wartościowaniem określonym na $\underline{\mathrm{Zm}}$, zaś W jest zbiorem pewnych wartościowań na $\underline{\mathrm{Zm}}$, do którego należy w. Dla każdej formuły f z Φ, każdego absolutnego $\underline{\mathrm{S}5}$-modelu $\mu = \langle w, W \rangle$ i dowolnego v z W możemy obliczyć za pomocą metody przedstawionej powyżej — $W(f, v)$, oraz przyjąć $\mu(f) = W(f, w)$. Zatem każdy absolutny $\underline{\mathrm{S}5}$-model wyznacza funkcję z Φ na $\{\underline{t}, \underline{f}\}$. Zauważmy, że zachodzą oczywiste równoważności: f z Φ jest $\underline{\mathrm{S}5}$-tautologią wtw dla każdego absolutnego $\underline{\mathrm{S}5}$-modelu μ mamy $\mu(f) = \underline{t}$ wtw dla dowolnego niepustego zbioru W wartościowań na $\underline{Zm}$ i dowolnego v z W mamy $W(f, v) = \underline{t}$. Zatem, podobnie jak poprzednio, wyróżnienie wartościowania w w modelu $\langle w, W \rangle$ nie odgrywa istotnej roli.

Niech $\varphi \in \Sigma$ oraz niech $\mu = \langle w, W \rangle$ będzie dowolnie wybranym $\underline{S5}$-modelem formuły φ. Stosując procedurę przedstawioną w cz. III możemy wyznaczyć (za pomocą indukcji po podformułach) wartość $\mu[\varphi]$ formuły φ w modelu μ (w cz. III w 2° i 3° zamiast zbioru M bierzemy zbiór W). Łatwo zauważyć, iż $\mu[\varphi] = \mu(\varphi)$. Weźmy teraz zbiór M złożony z obcięć do zbioru kon-$\underline{Zm}\,\varphi$ wartościowań należących do zbioru W. Oczywiście $m := \langle w, W \rangle$ jest modelem formuły φ w sensie cz. III. Otrzymujemy przy tym, że $m(\varphi) = \mu[\varphi]$ (obie wartości są wyliczane według tej samej procedury z cz. III).

Ponadto niech $\varphi \in \Sigma$ oraz $m = \langle w, M \rangle$ będzie dowolnym modelem (w sensie cz. III) formuły φ. Weźmy dowolny zbiór W złożony z takich wartościowań na $\underline{Zm}\,\varphi$, że obcięcie każdego z nich na zbiorze kon-$\underline{Zm}\,\varphi$ należy do zbioru M oraz każde wartościowanie z M ma przedłużenie na $\underline{Zm}\,\varphi$ należące do W. Oczywiście $\mu := \langle w, W \rangle$ jest $\underline{S5}$-modelem formuły φ. Otrzymujemy przy tym, iż $m(\varphi) = \mu[\varphi]$.

Z powyższych dwóch akapitów otrzymujemy:

STWIERDZENIE 6. Dla dowolnej formuły φ z Σ poniższe warunki są równoważne:

(i) φ jest kon-tautologią,

(ii) dla dowolnego $\underline{S5}$-modelu μ formuły φ mamy $\mu[\varphi] = \underline{t}$,

(iii) φ jest $\underline{S5}$-tautologią.

Oczywiste jest, że nawet dla $\underline{S5}$-modeli konstrukcja przedstawiona w cz. III nie pozwala na obliczenie wartości logicznej (w sensie cz. III) formuł z iteracją symboli '$\rightarrow$' lub '$\leftrightarrow$', tj. formuł z $\Phi \setminus \Sigma$.

W [1] i [2] zbiór W w $\underline{S5}$-modelu $\mu = \langle w, W \rangle$ nazwany jest 'zbiorem możliwych światów', zaś wartościowanie w — 'rzeczywistym światem'. Zgodnie z określeniem wartości $W(f, v)$ dla v z W, „każdy świat [z W] jest możliwy względem dowolnego innego [świata z W]" ([2]). Jest to „absolutne pojęcie możliwego świata" ([2]). Zauważmy, że dla formuł z Σ możemy ograniczyć tę intuicyjną interpretację i przyjąć jedynie, że każdy „świat" z M jest możliwy względem „rzeczywistego świata" w. Są to też, oczywiście, wystarczające intuicje związane z obliczaniem wartości $m(\varphi)$ w cz. III dla φ z Σ.

VI. PORÓWNANIE IMPLIKACJI KONEKTYWNEJ Z FUNKTORAMI MODALNYMI

Niech '$\mathbf{M}$' i '$\mathbf{L}$' symbolizują odpowiednio funktory modalne 'możliwe jest, że' oraz 'konieczne jest, że'. Niech zbiór $\underline{F}^\circ$ spełnia wszystkie te warunki co zbiór Σ plus dodatkowy warunek: jeżeli $\alpha \in \Sigma^{kl}$, to $\mathbf{M}\alpha \in \underline{F}^\circ$ i $\mathbf{L}\alpha \in \underline{F}^\circ$. Dla zbioru $\underline{F}^\circ$ można zbudować równie prostą jak dla Σ semantykę, dodając do warunków 1°–8° z cz. III poniższe warunki:

9° $m(\mathbf{M}\alpha) = \underline{t}$ wtw istnieje takie v z M, że $v(\alpha) = \underline{t}$,
10° $m(\mathbf{L}\alpha) = \underline{t}$ wtw dla każdego v z M, $v(\alpha) = \underline{t}$,
i rozszerzając odpowiednio pojęcie kon-tautologii na cały zbiór $\underline{F}°$. Otrzymamy wtedy jako kon-tautologie «Lewisowskie» formuły: '$(p \to q) \equiv \equiv \neg \mathbf{M}(p \,\&\, \neg q)$' i '$(p \to q) \equiv \mathbf{L}(p \supset q)$'.

VII. PEŁNOŚĆ RACHUNKU $\underline{R}_{kon}$

W części tej udowodnimy, że każda kon-tautologia jest tezą rachunku $\underline{R}_{kon}$. Wprowadźmy kilka pomocniczych pojęć:

(i) W zbiorze $P(\Sigma) \times \Sigma$ zdefiniujmy relację $\vdash$ poniższym warunkiem:
$X \vdash \varphi$ wtw 1° dla $X = \emptyset$, φ jest tezą rachunku $\underline{R}_{kon}$
2° dla $X \neq \emptyset$, istnieją w X takie $\varphi_1, ..., \varphi_n$ że $((\varphi_1 \,\&\, ... \,\&\, \varphi_n) \supset \varphi)$ jest tezą $\underline{R}_{kon}$

Zauważmy, że relacja $\vdash$ ma następujące własności:

(+) $\emptyset \vdash \varphi$ wtw φ jest tezą rachunku $\underline{R}_{kon}$

Istotnie, jeżeli $\emptyset \vdash \varphi$, to z 1° mamy: φ jest tezą $\underline{R}_{kon}$. Odwrotnie, jeżeli $X = \emptyset$ i φ jest tezą $\underline{R}_{kon}$, to spełnione są oba 1° i 2°, więc $X \vdash \varphi$.

(++) jeżeli $X \vdash \varphi$ i $X \subset Y$, to $Y \vdash \varphi$.

Istotnie, jeżeli $X = \emptyset \neq Y$, to dla ψ z Y formuła $(\varphi \supset (\psi \supset \varphi))$ jest tezą $\underline{R}_{kon}$. Na mocy (+) również φ jest tezą $\underline{R}_{kon}$, więc $(\psi \supset \varphi)$ jest tezą $\underline{R}_{kon}$. Zatem $Y \vdash \varphi$. Ponadto, jeżeli $X \neq \emptyset$, to formuły $\varphi_1, ..., \varphi_n$ z 2° należą również do Y, więc $Y \vdash \varphi$.

(+++) jeżeli φ jest tezą $\underline{R}_{kon}$, to $X \vdash \varphi$ dla każdego $X \subset \Sigma$.

(ii) Mówimy, że zbiór X jest sprzeczny w $\underline{R}_{kon}$ wtw istnieje takie φ, że $X \vdash \varphi$ oraz $X \vdash \neg\varphi$.

Zauważmy, że zbiór $X \cup \{\neg\varphi\}$ (odp. $X \cup \{\varphi\}$; $\{\neg\varphi\}$) jest sprzeczny w $\underline{R}_{kon}$ wtw $X \vdash \varphi$ (odp. $X \vdash \neg\varphi$; φ jest tezą $\underline{R}_{kon}$).

(iii) Mówimy, że zbiór X jest maksymalny w $\underline{R}_{kon}$ wtw dla dowolnego φ nie należącego do X zbiór $X \cup \{\varphi\}$ jest sprzeczny w $\underline{R}_{kon}$.

Dowolny zbiór X maksymalny w $\underline{R}_{kon}$ i niesprzeczny w $\underline{R}_{kon}$ ma następujące własności:

1) $X \vdash \varphi$ wtw $\varphi \in X$,
2) jeżeli φ jest tezą $\underline{R}_{kon}$, to $\varphi \in X$,
3) $\neg\varphi \in X$ wtw nieprawda, że $\varphi \in X$,
4) $(\varphi \,\&\, \psi) \in X$ wtw $\varphi \in X$ i $\psi \in X$,
5) $(\varphi \vee \psi) \in X$ wtw $\varphi \in X$ lub $\psi \in X$,
6) $(\varphi \supset \psi) \in X$ wtw $\neg\varphi \in X$ lub $\psi \in X$,
7) $(\varphi \equiv \psi) \in X$ wtw $\varphi, \psi \in X$ lub $\neg\varphi, \neg\psi \in X$,
8) $(\varphi \leftrightarrow \psi) \in X$ wtw $(\varphi \to \psi) \in X$ i $(\psi \to \varphi) \in X$.

Niech X będzie dowolnie wybranym maksymalnym i niesprzecznym zbiorem w $\underline{\mathrm{R}}_{\mathrm{kon}}$. Określimy wartościowanie w_X na $\underline{\mathrm{Zm}}$ następującym warunkiem: dla $z \in \underline{\mathrm{Zm}}$, $w_X(z) = \underline{\mathrm{t}}$ wtw $z \in X$. Łatwo udowodnić, że
(x) dla φ z Σ^{kl}: $w_X(\varphi) = \underline{\mathrm{t}}$ wtw $\varphi \in X$.

Ponadto, zdefiniujemy zbiór W_X złożony z pewnych wartościowań na $\underline{\mathrm{Zm}}$: $v \in W_X$ wtw dla dowolnych α, β z Σ^{kl}: jeżeli $(\alpha \to \beta) \in X$, to $v(\alpha \supset \beta) = \underline{\mathrm{t}}$. Zauważmy, że $w_X \in W_X$. Istotnie, na mocy aksjomatu (9) oraz własności 2, 3 i 6 zbioru X otrzymujemy, że jeżeli $(\alpha \to \beta) \in X$, to również $(\alpha \supset \beta) \in X$, tj. na mocy (x), $w_X(\alpha \supset \beta) = \underline{\mathrm{t}}$.

Zatem para uporządkowana $\mu_X = \langle w_X, W_X \rangle$ jest absolutnym $\underline{\mathrm{S}5}$-modelem. Wykażemy, że
(xx) dla φ z Σ: $\mu_X[\varphi] = \underline{\mathrm{t}}$ wtw $\varphi \in X$.
Istotnie,
— gdy φ z Σ^{kl}: ponieważ $\mu_X[\varphi] = w_X(\varphi)$, więc (xx) sprowadza się do (x),
— gdy $\varphi = (\gamma \to \delta)$ dla pewnych γ, δ z Σ^{kl}.

Jeżeli $\varphi \in X$, to zgodnie z definicją zbioru W_X, dla dowolnego v z W_X mamy $v(\gamma \supset \delta) = \underline{\mathrm{t}}$. Zatem $\mu_X[\varphi] = \underline{\mathrm{t}}$.

Odwrotnie, niech dla dowolnego v z W_X, $v(\gamma \supset \delta) = \underline{\mathrm{t}}$. Wtedy $\{(\alpha \supset \beta): (\alpha \to \beta) \in X\} \models (\gamma \supset \delta)$. Istotnie, wybierzmy dowolne wartościowanie v na $\underline{\mathrm{Zm}}$ takie, że $v(\alpha \supset \gamma) = \underline{\mathrm{t}}$ dla wszystkich α, β, dla których $(\alpha \to \beta) \in X$. Wtedy z definicji zbioru W_X otrzymujemy, iż $v \in W_X$. Zatem, na mocy założenia, również $v(\gamma \supset \delta) = \underline{\mathrm{t}}$. Zauważmy teraz, że na mocy stwierdzenia 5(i) i własności 2 zbioru X mamy $\varnothing \neq \{(\alpha \supset \beta) : (\alpha \supset \beta)$ jest kl-tautologią$\} \subset \{(\alpha \supset \beta) : (\alpha \to \beta) \in X\}$[4]. Na mocy własności relacji $\models$ (cz. II) dla pewnego $n \geqslant 1$ istnieją takie formuły $\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \ldots, \beta_n$, że $(\alpha_i \to \beta_i) \in X$ dla $i = 1, \ldots, n$ oraz $(((\alpha_1 \supset \beta_1) \,\&\, \ldots \,\&\, (\alpha_n \supset \beta_n)) \supset (\gamma \supset \delta)$ jest kl-tautologią, czyli jest tezą $\underline{\mathrm{R}}_{\mathrm{kon}}$. Stąd, na mocy stwierdzenia 5(ii), formuła $(((\alpha_1 \to \beta_1) \,\&\, \ldots \,\&\, (\alpha_n \to \beta_n)) \supset (\gamma \to \delta)$ jest tezą $\underline{\mathrm{R}}_{\mathrm{kon}}$. Zatem z definicji, $X \mapsto (\gamma \to \delta)$, zaś stąd na mocy własności 1 zbioru X otrzymujemy, iż $(\gamma \to \delta) \in X$.
— gdy $\varphi = (\gamma \leftrightarrow \delta)$ dla pewnych γ, δ z Σ^{kl}: Na mocy własności 8 zbioru X.
— stosując indukcję po ilości symboli '$\neg$', '$\&$', '$\vee$', '$\supset$', '$\equiv$' występujących w formule φ, lecz nie w argumentach symboli '$\to$' i '$\leftrightarrow$', dowodzimy warunku (xx) dla dowolnych formuł z Σ. Istotnie, jeżeli φ nie ma takich spójników, to warunek (xx) został już dowiedziony powyżej. W przeciwnym przypadku, stosując własności 2–7 zbioru X, założenie indukcyjne oraz określenie wartości logicznej danej formuły, otrzymujemy tezę.

Ustalmy teraz dowolnie wybraną formułę ψ z Σ, lecz taką, że zbiór $\{\psi\}$ nie jest sprzeczny w $\underline{\mathrm{R}}_{\mathrm{kon}}$. W znany sposób konstruujemy maksymalny i nie-

[4] Zauważmy, że tylko dzięki regule $\underline{\mathrm{rR}}$ można wykazać, iż zbiór $\{(\alpha \supset \beta) : (\alpha \to \beta) \in x\}$ nie jest pusty. Dlatego w rachunku $\underline{\mathrm{R}}'_{\mathrm{kon}}$, w którym nie przyjmujemy $\underline{\mathrm{rR}}$, musimy przyjąć aksjomaty postaci (11).

sprzeczny zbiór MAXψ zawierający $\{\psi\}$. Wykazano powyżej, że zbiór MAXψ wyznacza pewien absolutny $\underline{S5}$-model μ_0, którego odpowiednie obcięcie daje nam taki model m_0 formuły ψ, że $m_0(\psi) = \underline{t}$.

Załóżmy na koniec, iż φ jest kon-tautologią. Wtedy dla dowolnego modelu m formuły φ mamy $m(\neg\varphi) = \underline{f}$. Zatem na mocy poprzedniego akapitu, zbiór $\{\neg\varphi\}$ jest sprzeczny w $\underline{R}_{\text{kon}}$, czyli φ jest tezą rachunku $\underline{R}_{\text{kon}}$.

VIII. ZASTOSOWANIA DYDAKTYCZNE

W podręcznikach logiki jej metody formalne najczęściej wykorzystywane są przy badaniu poprawności wnioskowań w ramach klasycznej logiki zdań. Badanie wnioskowania przeprowadzamy według poniższej procedury. Zastępujemy zdania proste zmiennymi zdaniowymi oraz każdy spójnik zdaniowy jego odpowiednikiem w logice klasycznej. Uzyskujemy w ten sposób formalny schemat wnioskowania $\alpha_1, \ldots, \alpha_n / \alpha$ (odp. formalną zasadę wnioskowania $(\alpha_1 \& \ldots \& \alpha_n) \supset \alpha)$ i badamy jego niezawodność (odp. jej tautologiczność) metodami klasycznej logiki zdań.

Przeważająca część implikacji w badanych w podręcznikach wnioskowaniach to tzw. „okresy warunkowe rozumiane potocznie", czyli implikacje, które wyrażają jakiś związek pomiędzy poprzednikiem i następnikiem. W ogóle nie spotyka się «czystych» implikacji materialnych (np. 'Jeżeli $2 \cdot 2 = 8$, to Toruń leży nad Wisłą'), chociaż z teoretycznego punktu widzenia właśnie dla nich, a nie dla „okresów warunkowych rozumianych potocznie", adekwatne jest przedstawione powyżej podejście formalne.

Przyjmijmy, że implikacja konektywna i równoważność konektywna są odpowiednio formalnymi reprezentantami implikacji i równoważności „rozumianych potocznie". Załóżmy, że formuła $(\varphi_1 \& \ldots \& \varphi_n) \supset \varphi_0$ z Σ będąca zasadą pewnego wnioskowania jest kon-tautologią. Niech φ_i^m powstaje z φ_i po zamianie funktorów konektywnych na materialne. Wtedy formuła $((\varphi_1^m \& \ldots \& \varphi_n^m)) \supset \varphi_0^m$ jest kl-tautologią. Istotnie, ponieważ $(\varphi_1 \& \ldots \& \varphi_n) \supset \varphi_0$ jest również $\underline{S5}$-tautologią, więc na mocy znanej własności systemu $\underline{S5}$, jeżeli implikację ścisłą i równoważność ścisłą będziemy interpretować jako materialne, to formuła ta staje się tautologią klasyczną. Zatem formuła $(\varphi_1^m \& \ldots \& \varphi_n^m) \supset \varphi_0^m$ jest kl-tautologią.

Z tego co pokazano wyżej widać, że tautologiczność uproszczonej zasady wnioskowania z Σ^{kl} jest warunkiem koniecznym właściwej zasady z Σ. Niestety nie jest to warunek wystarczający, co pokazują następujące przykłady: 1) '$q \supset (p \supset q)$' jest tautologią, zaś '$q \supset (p \to q)$' nie jest, 2) '$((p \vee q) \& (p \supset r)) \supset (\neg q \supset r)$' jest tautologią, lecz '$((p \vee q) \& (p \to r)) \supset (\neg q \to r)$' nie jest.

Zatem szukanie zasad dla wnioskowań, w których występują implikacje i równoważności „rozumiane potocznie", w zbiorze Σ^{kl} ma tylko częściowo teoretyczne uzasadnienie. Jednak próba znalezienia tych zasad w jednym ze znanych modalnych rachunków zdań pociągnęłaby za sobą poważne trudności w badaniach semantycznych[5] spowodowane dość skomplikowanym (jak na kurs ogólny) aparatem matematycznym używanym w tzw. strukturach modelowych Kripkego. Skomplikowanie aparatu matematycznego związane jest z próbą adekwatnej interpretacji superponowania funktorów modalnych (stosunkowo łatwa semantyka dla systemu $\underline{S5}$ niezbyt trafnie to oddaje).

Omawiane wyżej trudności znikną, gdy zrezygnujemy z superponowania funktorów intensjonalnych. Istotnie, pokażę na przykładzie, że stopień trudności najbardziej ekonomicznej metody sprawdzania tautologiczności formuł z Σ^{kl} tzw. semantycznego dowodu nie wprost nie jest większy w zastosowaniu do formuł z Σ. W myśl tej metody zakładamy, że badana formuła nie jest tautologią, tzn. że istnieje taki model m, w którym badana formuła jest fałszywa. Jeżeli to założenie doprowadzi nas do sprzeczności, to oczywiście w każdym modelu badana formuła musi być prawdziwa. Jeżeli powyższe założenie nie doprowadzi nas do sprzeczności, to z pomocą uzyskanych wniosków potrafimy zbudować konkretny model, w którym badana formuła jest fałszywa.

PRZYKŁAD 1a. $((p \supset q) \,\&\, (q \supset r)) \supset (p \supset r)$

Z założenia otrzymujemy, że istnieje takie wartościowanie v zmiennych 'p', 'q', 'r', przy którym badana formuła jest fałszywa. Zatem zgodnie z interpretacją funktorów '$\supset$' i '&' mamy $v(\text{'}p \supset q\text{'}) = v(\text{'}q \supset r\text{'}) = \underline{t}$ i $v(\text{'}p \supset r\text{'}) = \underline{f}$. Z ostatniego wzoru mamy $v(\text{'}p\text{'}) = \underline{t}$ i $v(\text{'}r\text{'}) = \underline{f}$. Stąd i dwóch pierwszych wzorów otrzymujemy sprzeczność: $v(\text{'}q\text{'}) = \underline{t}$ i $v(\text{'}q\text{'}) = \underline{f}$.

PRZYKŁAD 1b. $((p \rightarrow q) \,\&\, (q \rightarrow r)) \supset (p \rightarrow r)$

Zakładamy, że istnieje taki model $m = \langle w, M\rangle$, w którym badana formuła jest fałszywa. Zatem zgodnie z interpretacją funktorów '$\supset$' i '&' mamy $m(\text{'}p \rightarrow q\text{'}) = m(\text{'}q \rightarrow r\text{'}) = \underline{t}$ i $m(\text{'}p \rightarrow r\text{'}) = \underline{f}$. Zatem zgodnie z interpretacją funktora '$\rightarrow$' istnieje w M takie wartościowanie v zmiennych 'p', 'q' i 'r', że $v(\text{'}p\text{'}) = \underline{t}$ i $v(\text{'}r\text{'}) = \underline{f}$. Stąd i z dwóch pierwszych wzorów wykorzystując interpretację funktora '$\rightarrow$' otrzymujemy sprzeczność: $v(\text{'}q\text{'}) = \underline{t}$ i $v(\text{'}q\text{'}) = \underline{f}$.

PRZYKŁAD 2. $((p \vee q) \,\&\, (p \rightarrow r)) \supset (\neg q \rightarrow r)$

Zakładamy, że istnieje taki model $m = \langle w, M\rangle$, w którym badana formuła jest fałszywa, czyli $m(\text{'}p \vee q\text{'}) = m(\text{'}q \rightarrow r\text{'}) = \underline{t}$ i $m(\text{'}\neg q \rightarrow r\text{'}) = \underline{f}$. Zatem zgodnie z interpretacją funktorów '$\rightarrow$' i '$\neg$' istnieje w M takie wartościowanie v zmiennych 'p', 'q' i 'r', że $v(\text{'}q\text{'}) = v(\text{'}r\text{'}) = \underline{f}$. Ponadto zgodnie z interpretacją funktora '$\vee$' mamy $w(\text{'}p\text{'}) = \underline{t}$ lub $w(\text{'}q\text{'}) = \underline{t}$. Zatem nie uzyskujemy sprzeczności, gdyż przykładowo w modelu $\langle w, \{w, v\}\rangle$, w którym

[5] Wyprowadzanie tez z aksjomatów byłoby jeszcze bardziej uciążliwe.

$w(\text{`p'}) = w(\text{`q'}) = w(\text{`r'}) = \underline{t}$ oraz $v(\text{`p'}) = v(\text{`q'}) = v(\text{`r'}) = \underline{f}$ badana formuła jest fałszywa.

Na podstawie powyższych przykładów można stwierdzić, że nie istnieją jakieś «poważne trudności techniczne» przy prezentowaniu funktorów konektywnych w ramach ogólnego kursu logiki. Oczywiście należy jedynie uprościć użyty w formalizacji «aparat matematyczny», ograniczając go do podstawień i zbiorów podstawień («możliwych światów») wartości logicznych za zmienne zdaniowe.

BIBLIOGRAFIA

[1] Kripke S., *A completeness theorem in modal logic*, JSL 24, s. 1–14.
[2] Kripke S., *Semantical analysis of modal logic I. Normal modal propositional calculi*, ZMLGM 9 (1963), s. 67–96.
[3] Reichenbach H., *Elementy logiki formalnej (fragmenty)*, [w:] *Logika i język*, red. J. Pelc, Warszawa 1967, s. 1–222.