Pietruszczak, Andrzej

Teoriomnogościowa formalizacja pewnej interpretacji formuł rachunku nazw z kwantyfikatorami

Acta Universitatis Nicolai Copernici. Logika 2 (235), 41-52

1991

ACTA UNIVERSITATIS NICOLAI COPERNICI
LOGIKA II — NAUKI HUMANISTYCZNO-SPOŁECZNE — ZESZYT 235 — 1991

Katedra Logiki

Andrzej Pietruszczak

TEORIOMNOGOŚCIOWA FORMALIZACJA PEWNEJ INTERPRETACJI FORMUŁ RACHUNKU NAZW Z KWANTYFIKATORAMI

Guido Küng w pracach [3], [4], [5] i [6] porusza m. in. problemy związane z interpretacją kwantyfikatorów w Ontologii Leśniewskiego. Możemy przyjąć, że pewien fragment Ontologii jest jednym z systemów rachunku nazw z kwantyfikatorami oraz że problem rozumienia jej kwantyfikatorów jest mocno powiązany z problemem interpretacji kwantyfikatorów w innych systemach. Guido Küng uważa, że „Leśniewskiego kwantyfikatory nie są ani referencjalne, ani substytucjonalne" i że „w rzeczywistości jest ... możliwy trzeci sposób kwantyfikacji. ... Ponieważ u Leśniewskiego nazwy ogólne [[1]] nie tylko oznaczają przedmioty, lecz także posiadają ekstensje, to zakres kwantyfikacji może składać się z tych ekstensji, ... Pomimo kwantyfikacji ekstensje pozostają ekstensjami, które nazwy posiadają, ale nie będą nazwanymi przedmiotami; zakres przedmiotów nie zostaje więc rozszerzony. W logice Leśniewskiego nie są identyczne, tak jak w szczególnym przypadku logiki Russella, zakres przedmiotów i zakres wartości zmiennych. ... Jeżeli ekstensje pozostają tym czym są i nie stają się nazwanymi przedmiotami (nie uprzedmiotawia się ich), to jednak logika Leśniewskiego pozostaje jeszcze nadal nominalistyczna; ale jeżeli kwantyfikuje się w niej ekstensje, to stoi ona blisko platonizmu. Chodzi o nominalizm sui generis, który faktycznie dorównuje platonistycznej teorii typów Russella. ... przez kwantyfikatory [powołujemy się] na ekstensje nazw ..." ([3], polski przekład s. 96 i 97).

W pracy tej[2] przedstawię próbę formalnego ujęcia powyższych poglądów G. Künga dla pewnych systemów rachunku nazw z kwantyfikatorami. Dowodząc pełności tych systemów wykorzystam badania semantyczne pewnych teorii pierwszego rzędu.

---

[1] Z przykładów podanych w [3] widać, że chodzi tutaj o wyrażenia, które w polskiej literaturze przyjęło się oznaczać terminem 'nazwa generalna' ([7] s. 131, w tej terminologii: nazwy ogólne to te nazwy generalne, które posiadają co najmniej dwa desygnaty).

[2] Pragnę podziękować Panu Profesorowi Bogusławowi Iwanusiowi za cenne wskazówki podane w recenzji, które pomogły mi usunąć szereg usterek i niejasności.

I. WŁASNOŚCI SEMANTYCZNE PEWNYCH TEORII PIERWSZEGO RZĘDU

§ 1. Niech L będzie językiem pierwszego rzędu (bez identyczności), w którego alfabecie jako pozalogiczne występują jedynie symbole należące do niepustego zbioru predykatów P_L takiego, że $P_L = P_L^1 \cup P_L^2$, gdzie $P_L^1 \subset \{\text{'E'}\}$ oraz $\emptyset \neq P_L^2 \subset \{\text{'A'}, \text{'I'}, \text{'}\varepsilon\text{'}\}$, przy czym 'E' jest jednoargumentowy, zaś 'A', 'I' i 'ε' są dwuargumentowe. Niech F_L będzie zbiorem formuł zdaniowych języka L, a F_L^0 — zbiorem formuł bezkwantyfikatorowych języka L.

Strukturą dla języka L jest dowolna para uporządkowana $S = (|S|, d)$, w której $|S|$ jest zbiorem niepustym (uniwersum struktury S), zaś d jest funkcją przyporządkowującą każdej stałej pozalogicznej z P_L^2 jakąś dwuargumentową relację w zbiorze $|S|$ oraz stałej z P_L^1 jakiś podzbiór zbioru $|S|$ (przez 'p_S' oznaczymy wartość funkcji d na predykacie p). Niech VER(S) będzie zbiorem formuł prawdziwych w strukturze S.

Niech S_1 i S_2 będą strukturami dla L. Odwzorowanie e z $|S_1|$ na $|S_2|$ jest epimorfizmem z S_1 na S_2 wtw[3] dla dowolnych a, b z $|S_1|$, p^1 z P_L^1 oraz p^2 z P_L^2 mamy:

$$a \in p_{S_1}^1 \quad \text{wtw} \quad e(a) \in p_{S_2}^1$$

$$(a, b) \in p_{S_1}^2 \quad \text{wtw} \quad (e(a), e(b)) \in p_{S_2}^2$$

Struktura S_1 jest epimorficzna ze strukturą S_2 wtw istnieje epimorfizm z S_1 na S_2. W tym wypadku zachodzi ([1], s. 192 i 193):

LEMAT 1. $\qquad \mathrm{VER}(S_1) = \mathrm{VER}(S_2)$.

Struktura S_1 jest podstrukturą struktury S_2 wtw $|S_1| \subset |S_2|$ oraz dla każdego p z P_L: $d_2(p)$ pokrywa się z $d_1(p)$ na $|S_1|$. W tym przypadku mamy:

LEMAT 2. $\qquad F_L^0 \cap \mathrm{VER}(S_2) \subset \mathrm{VER}(S_1)$.

Strukturę S dla języka L nazywamy specjalną wtw $|S|$ jest niepustą rodziną zbiorów i dla dowolnych a, b z $|S|$ zachodzi:

jeżeli 'E' $\in P_L$, to $a \in \mathrm{E}_S$ wtw $a \neq \emptyset$

jeżeli 'A' $\in P_L$, to $(a, b) \in \mathrm{A}_S$ wtw $a \subset b$

jeżeli 'I' $\in P_L$, to $(a, b) \in \mathrm{I}_S$ wtw $a \cap b \neq \emptyset$

jeżeli 'ε' $\in P_L$, to $(a, b) \in \varepsilon_S$ wtw a jest jednoelementowym zbiorem zawartym w zbiorze b.

Niepustą rodzinę zbiorów nazywamy tradycyjną wtw składa się ze zbiorów niepustych. Niepustą rodzinę zbiorów R nazywamy I-rodziną wtw R spełnia poniższy warunek:

jeżeli $X, Y \in R$ i $X \cap Y \neq \emptyset$ to istnieje w R takie $Z \neq \emptyset$, że $Z \subset X \cap Y$.

---

[3] 'wtw' jest skrótem zwrotu 'wtedy i tylko wtedy, gdy'.

Niepustą rodzinę zbiorów R nazywamy ε-rodziną wtw R spełnia poniższy warunek[4]:

jeżeli $x \in X \in R$, to $\{x\} \in R$ (tj. jeżeli $x \in \bigcup R$, to $\{x\} \in R$).

Jeżeli R jest niepustą rodziną zbiorów, to dowolną strukturę specjalną dla języka L, której uniwersum jest rodziną R, nazywamy strukturą generowaną przez rodzinę R.

Strukturę S specjalną dla L nazywamy tradycyjną (odp. I-strukturą; ε-strukturą) wtw $|S|$ jest rodziną tradycyjną (odp. I-rodziną; ε-rodziną).

W języku L będziemy budować teorie pierwszego rzędu według określenia podanego w [8]. Teoria jest otwarta wtw jej aksjomaty należą do zbioru F_L^0.

§ 2. Niech $\underline{\mathrm{L}}_{\mathrm{A}}$ będzie językiem o jednym symbolu pozalogicznym 'A'. W języku tym zbudujemy otwartą teorię pierwszego rzędu $\underline{\mathrm{T}}_{\mathrm{A}}$, której aksjomatami są poniższe formuły:

(1) $$\mathrm{Axx}$$

(2) $$(\mathrm{Axz} \ \& \ \mathrm{Azy}) \rightarrow \mathrm{Axy}$$

STWIERDZENIE 1. Każda struktura specjalna dla $\underline{\mathrm{L}}_{\mathrm{A}}$ jest modelem teorii $\underline{\mathrm{T}}_{\mathrm{A}}$ (tzn. prawdziwe są w niej formuły (1) i (2)).

Udowodnimy twierdzenie o epimorfizmie dla $\underline{\mathrm{T}}_{\mathrm{A}}$:

TWIERDZENIE 1. Struktura S jest modelem teorii $\underline{\mathrm{T}}_{\mathrm{A}}$ wtw S jest epimorficzna z pewną tradycyjną I-strukturą specjalną dla $\underline{\mathrm{L}}_{\mathrm{A}}$.

DOWÓD. Niech S będzie dowolnym modelem teorii $\underline{\mathrm{T}}_{\mathrm{A}}$. Określimy funkcję e z $|S|$ w $2^{|S|}$ wzorem: $e(a) := \{c : (c, a) \in \mathrm{A}_S\}$. Niech $|S'| := \{e(a) : a \in |S|\}$. Niech S' będzie strukturą specjalną dla $\underline{\mathrm{L}}_{\mathrm{A}}$ generowaną przez rodzinę $|S'|$. Pokażemy, że e jest epimorfizmem z S na S'. Istotnie, jeżeli $(a, b) \in \mathrm{A}_S$ i $c \in e(a)$, to na mocy (2), również $c \in e(b)$. Odwrotnie, jeżeli $e(a) \subset e(b)$, to skoro na mocy (1) $a \in e(a)$, więc również $a \in e(b)$, czyli $(a, b) \in \mathrm{A}_S$. Ponadto dla każdego a z $|S|$, $e(a) \neq \emptyset$. Pozostaje zatem do pokazania, że $|S'|$ jest I-rodziną. Załóżmy, że $X, Y \in |S'|$ i $X \cap Y \neq \emptyset$. Wtedy istnieją takie a, b w $|S|$, że $e(a) = X$ oraz $e(b) = Y$. Niech $c \in e(a) \cap e(b)$. Jeżeli $d \in e(c)$, to na mocy (2) również $d \in e(a) \cap e(b)$. Zatem $\emptyset \neq e(c) \subset e(a) \cap e(b)$.

Implikacja odwrotna wynika z lematu 1 i stwierdzenia 1. □

WNIOSEK 1. Dla każdej formuły f z $\underline{\mathrm{F}}_{\mathrm{A}}$ poniższe warunki są równoważne:

(o) f jest twierdzeniem teorii $\underline{\mathrm{T}}_{\mathrm{A}}$,

(i) f jest prawdziwa w każdej strukturze specjalnej dla $\underline{\mathrm{L}}_{\mathrm{A}}$,

(ii) f jest prawdziwa w każdej tradycyjnej strukturze specjalnej dla $\underline{\mathrm{L}}_{\mathrm{A}}$,

(iii) f jest prawdziwa w każdej I-strukturze dla $\underline{\mathrm{L}}_{\mathrm{A}}$,

(iv) f jest prawdziwa w każdej tradycyjnej I-strukturze dla $\underline{\mathrm{L}}_{\mathrm{A}}$.

---

[4] Jest to przeniesienie na rodziny zbiorów pojęcia wprowadzonego w [10].

DOWÓD.
(o) $\Rightarrow$ (i) na mocy stwierdzenia 1.
(i) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iv) oraz (i) $\Rightarrow$ (iii) $\Rightarrow$ (iv) oczywiste.
(iv) $\Rightarrow$ (o).
Niech f będzie prawdziwa w każdej tradycyjnej I-strukturze, dla $\underline{L}_A$ oraz niech S będzie dowolnym modelem teorii $\underline{T}_A$. Wtedy na mocy twierdzenia 1 i lematu 1, f jest prawdziwa w S. Ponieważ S było dowolnym modelem teorii $\underline{T}_A$, więc na mocy twierdzenia Gödla o pełności otrzymujemy, iż f jest twierdzeniem teorii $\underline{T}_A$. □

Zatem możemy interpretować teorię $\underline{T}_A$ jako teorię struktur specjalnych dla $\underline{L}_A$ generowanych odpowiednio przez:
(I 1) niepuste rodziny zbiorów,
(I 2) tradycyjne rodziny zbiorów,
(I 3) I-rodziny zbiorów,
(I 4) tradycyjne I-rodziny zbiorów.
Oczywiście, interpretacja (I 1) jest szersza od (I 2), (I 3) i (I 4), zaś (I 2) i (I 3) są szersze od (I 4). Przy rozszerzaniu teorii $\underline{T}_A$ możemy wybrać równoprawnie odpowiadającą nam interpretację.

§ 3. Niech $\underline{L}_{AE}$ będzie językiem pierwszego rzędu o dwóch symbolach pozalogicznych ‘A’ i ‘E’. Już w tym języku możemy zbudować takie rozszerzenia teorii $\underline{T}_A$, które dopuszczają tylko niektóre z interpretacji (I 1)–(I 4). Jako pierwsze takie (konserwatywne) rozszerzenie zbadamy teorię $\underline{T}_{AE}$ opartą na aksjomatach:

(1) $$Axx,$$
(2) $$(Axz \,\&\, Azy) \rightarrow Axy,$$
(3) $$(Ex \,\&\, Axy) \rightarrow Ey,$$
(4) $$\sim Ex \rightarrow Axy.$$

Drugim konserwatywnym rozszerzeniem będzie otwarta teoria $\underline{T}^t_{AE}$ oparta na aksjomatach: (1), (2) oraz
(3^t) $$Ex.$$

Łatwo udowodnić:
STWIERDZENIE 2. Każda struktura (odp. tradycyjna struktura) specjalna dla $\underline{L}_{AE}$ jest modelem teorii $\underline{T}_{AE}$ (odp. $\underline{T}^t_{AE}$).

Udowodnimy, że dla teorii $\underline{T}_{AE}$ i $\underline{T}^t_{AE}$ zachodzą odpowiednie twierdzenia o epimorfizmie:
TWIERDZENIE 2. Struktura S jest modelem teorii $\underline{T}_{AE}$ (odp. $\underline{T}^t_{AE}$) wtw S jest epimorficzna z pewną I-strukturą (odp. tradycyjną I-strukturą) specjalną dla języka $\underline{L}_{AE}$.
DOWÓD. Dla $\underline{T}_{AE}$: Niech S będzie dowolnym modelem teorii $\underline{T}_{AE}$. Określamy funkcję z $|S|$ w $2^{|S|}$ wzorem $e(a) := \{c : c \in E_S \text{ i } (c, a) \in A_S\}$. Niech $|S'| := \{e(a) : a \in |S|\}$ oraz S' będzie strukturą specjalną dla $\underline{L}_{AE}$ generowaną

przez rodzinę $|S'|$. Pokażemy, że e jest epimorfizmem z S na S'. Istotnie, jeżeli $(a,b) \in A_S$ i $c \in e(a)$, to na mocy (2) również $c \in e(b)$. Odwrotnie, niech $e(a) \subset e(b)$. Wtedy w przypadku, gdy $e(a) = \emptyset$, na mocy (1) otrzymujemy, iż $a \notin E_S$, a stąd na mocy (4) mamy $(a,b) \in A_S$. W przypadku zaś, gdy $e(a) \neq \emptyset$ na mocy (3) i (1) otrzymujemy $a \in e(a)$. Zatem w tym przypadku również $a \in e(b)$, czyli $(a,b) \in A_S$. Ponadto na mocy (1) i (3) otrzymujemy, że $a \in E_S$ wtw $e(a) \neq \emptyset$. Pozostaje do pokazania, iż $|S'|$ jest I-rodziną zbiorów. Załóżmy, że $X, Y \in |S'|$ oraz $X \cap Y \neq \emptyset$. Wtedy istnieją w $|S|$ takie a, b i c, że $X = e(a)$, $Y = e(b)$ oraz $c \in e(a) \cap e(b)$. Zatem $c \in E_S$, więc $e(c) \neq \emptyset$. Ponadto, jeżeli $d \in e(c)$, to na mocy (2) również $d \in e(a) \cap e(b)$. Zatem $\emptyset \neq e(c) \subset e(a) \cap e(b)$.

Implikacja odwrotna wynika z lematu 1 i stwierdzenia 2.

Dla $\underline{T}^{t}_{AE}$: podobnie jak wyżej wykorzystując (3'). □

WNIOSEK 2. Dla dowolnej formuły f z $\underline{F}_{AE}$ poniższe warunki są równoważne.

(o) f jest twierdzeniem teorii $\underline{T}_{AE}$ (odp. $\underline{T}^{t}_{AE}$),

(i) f jest prawdziwa w każdej strukturze (odp. tradycyjnej strukturze) specjalnej dla $\underline{L}_{AE}$,

(ii) f jest prawdziwa w każdej I-strukturze (odp. tradycyjnej I-strukturze) specjalnej dla języka $\underline{L}_{AE}$.

Z wniosku 2 wynika, że teorie $\underline{T}_{AE}$ i $\underline{T}^{t}_{AE}$ są konserwatywnymi rozszerzeniami teorii $\underline{T}_{A}$. Teorię $\underline{T}_{AE}$ możemy interpretować jako teorię struktur specjalnych dla $\underline{L}_{AE}$ generowanych odpowiednio przez:

(I 1) niepuste rodziny zbiorów,

(I 3) I-rodziny zbiorów,

zaś teorię $\underline{T}^{t}_{AE}$ możemy traktować jako teorię struktur specjalnych dla $\underline{L}_{AE}$ generowanych odpowiednio przez:

(I 2) tradycyjne rodziny zbiorów,

(I 4) tradycyjne I-rodziny zbiorów.

Przy rozszerzeniach tych teorii możemy wybrać równoprawnie odpowiednią interpretację.

§ 4. W języku $\underline{L}_{AI}$ (w którym jako symbole pozalogiczne występują jedynie: 'A' i 'I') możemy zbudować cztery nierównoważne konserwatywne rozszerzenia teorii $\underline{T}_{A}$. Interpretacje tych teorii będą odpowiednio kontynuacjami jednej z równoprawnych interpretacji (I 1)–(I 4) teorii $\underline{T}_{A}$.

Dla interpretacji (I 1) odpowiednia będzie otwarta teoria $\underline{T}_{Sh}$ (Shepherdsona) oparta na poniższych aksjomatach:

(1) $\quad \mathrm{Axx},$

(2) $\quad (\mathrm{Axz} \,\&\, \mathrm{Azy}) \rightarrow \mathrm{Axy},$

(5) $\quad (\mathrm{Izx} \,\&\, \mathrm{Azy}) \rightarrow \mathrm{Ixy},$

(6) $\quad \mathrm{Ixy} \rightarrow \mathrm{Ixx},$

(7) $\quad \sim \mathrm{Ixx} \rightarrow \mathrm{Axy}.$

Dla interpretacji (I 2) odpowiednia będzie otwarta teoria $\underline{T}_{Ł}$ (Łukasiewicza) oparta na następujących aksjomatach specyficznych: (1), (2), (5) oraz

(6') $\qquad$ Ixx.

STWIERDZENIE 3. Każda struktura (odp. tradycyjna struktura) specjalna dla $\underline{L}_{AI}$ jest modelem teorii $\underline{T}_{Sh}$ (odp. $\underline{T}_{Ł}$).

W [9] udowodniono twierdzenia o epimorfizmie dla teorii $\underline{T}_{Sh}$ i $\underline{T}_{Ł}$:

TWIERDZENIE 3. Struktura S jest modelem teorii $\underline{T}_{Sh}$ (odp. $\underline{T}_{Ł}$) wtw S jest epimorficzna z pewną strukturą (odp. tradycyjną strukturą) specjalną $\underline{L}_{AI}$.

WNIOSEK 3. Dla dowolnej formuły f z $\underline{F}_{AI}$:

f jest twierdzeniem teorii $\underline{T}_{Sh}$ (odp. $\underline{T}_{Ł}$) wtw f jest prawdziwa w każdej strukturze (odp. tradycyjnej strukturze) specjalnej dla języka $\underline{L}_{AI}$.

Zauważmy teraz, że formuła:

$$\mathrm{Ixy} \to \exists z\, (\mathrm{Izz} \;\&\; \mathrm{Azx} \;\&\; \mathrm{Azy})$$

jest prawdziwa we wszystkich I-strukturach specjalnych dla $\underline{L}_{AI}$, lecz istnieją tradycyjne (jak również nietradycyjne) struktury specjalne dla $\underline{L}_{AI}$, w których jest ona fałszywa. Łatwo również zauważyć, że implikacja odwrotna do powyższej jest prawdziwa w każdej strukturze specjalnej dla $\underline{L}_{AI}$ (jest twierdzeniem teorii $\underline{T}_{Sh}$).

Dla interpretacji (I 3) odpowiednia będzie teoria $\underline{T}_{AI}$ oparta na następujących aksjomatach specyficznych: (1), (2), (7) oraz

(8) $\qquad \mathrm{Ixy} \leftrightarrow \exists z\, (\mathrm{Izz} \;\&\; \mathrm{Azx} \;\&\; \mathrm{Azy}).$

STWIERDZENIE 4. Każda I-struktura specjalna dla $\underline{L}_{AI}$ jest modelem teorii $\underline{T}_{AI}$.

TWIERDZENIE 4. Struktura S jest modelem teorii $\underline{T}_{AI}$ wtw S jest epimorficzna z pewną I-strukturą specjalną dla $\underline{L}_{AI}$.

DOWÓD. Dla dowolnego modelu S tworzymy epimorfizm e z S na I-strukturę S' generowaną przez I-rodzinę zbiorów $|S'| := \{e(a) : a \in |S|\}$, gdzie $e(a) := \{c : (c,c) \in \mathrm{I}_S$ i $(c,a) \in \mathrm{A}_S\}$. Istotnie, jeżeli $(a,b) \in \mathrm{A}_S$, to na mocy implikacji (2) mamy $e(a) \subset e(b)$. Odwrotnie, jeżeli $e(a) \subset e(b)$, to w przypadku, gdy $e(a) = \emptyset$ na mocy (1) i (7) mamy $(a,b) \in \mathrm{A}_S$. W przypadku zaś, gdy $e(a) \neq \emptyset$, na mocy implikacji odwrotnej z (8) mamy $(a,a) \in \mathrm{I}_S$, a stąd na mocy (1) mamy $a \in e(a)$. Zatem $a \in e(b)$, czyli $(a,b) \in \mathrm{A}_S$. Ponadto, jeżeli $(a,b) \in \mathrm{I}_S$, to na mocy implikacji prostej z (8) istnieje takie c, że $(c,c) \in \mathrm{I}_S$ i $(c,a) \in \mathrm{A}_S$ i $(c,b) \in \mathrm{A}_S$. Zatem na mocy (1) mamy $e(c) \neq \emptyset$ oraz $e(c) \subset e(a) \cap e(b)$. Odwrotnie, jeżeli $e(a) \cap e(b) \neq \emptyset$, to istnieje takie c, że $(c,c) \in \mathrm{I}_S$ i $(c,a) \in \mathrm{A}_S$ i $(c,b) \in \mathrm{A}_S$. Stąd na mocy implikacji odwrotnej z (8) mamy $(a,b) \in \mathrm{I}_S$. Pozostało do pokazania, iż $|S'|$ jest I-rodziną zbiorów. Załóżmy, że $X, Y \in |S'|$ oraz $X \cap Y \neq \emptyset$. Wtedy istnieją w $|S|$ takie a, b, c, że $X = e(a)$, $Y = e(b)$ oraz $c \in e(a) \cap e(b)$. Zatem $(c,c) \in \mathrm{I}_S$, więc na mocy (1) mamy $e(c) \neq \emptyset$. Ponadto, jeżeli $d \in e(c)$, to na mocy (2) również $d \in e(a) \cap e(b)$. Zatem $\emptyset \neq e(c) \subset e(a) \cap e(b)$.

Implikacja odwrotna wynika z lematu 1 i stwierdzenia 4. □

WNIOSEK 4. Dla każdej formuły f z $\underline{F}_{AI}$:
f jest twierdzeniem teorii $\underline{T}_{AI}$ wtw f jest prawdziwa w każdej I-strukturze specjalnej dla $\underline{L}_{AI}$.

Z wniosków 3 i 4 wynika, że teorie $\underline{T}_{Ł}$ i $\underline{T}_{AI}$ są rozszerzeniami teorii $\underline{T}_{Sh}$, ponadto wszystkie one są konserwatywnymi rozszerzeniami teorii $\underline{T}_{A}$.

Ostatnią z równoprawnych interpretacji teorii $\underline{T}_{A}$ jest traktowanie jej jako teorii struktur specjalnych dla $\underline{L}_{A}$ generowanych przez tradycyjne I-rodziny zbiorów. We wszystkich tych strukturach prawdziwa jest poniższa formuła:

(def$_1$ I) $\qquad$ $Ixy \leftrightarrow \exists z\,(Azx \,\&\, Azy)$.

Jednak istnieją tradycyjne struktury specjalne dla $\underline{L}_{AI}$, w których implikacja prosta z (def$_1$ I) jest fałszywa, oraz istnieją I-struktury specjalne dla $\underline{L}_{AI}$, w których fałszywa jest implikacja odwrotna z (def$_1$ I). Łatwo zauważyć, że implikacja odwrotna z (def$_1$ I) jest prawdziwa w każdej tradycyjnej strukturze specjalnej dla $\underline{L}_{AI}$ (jest twierdzeniem teorii $\underline{T}_{Ł}$).

Niech $\underline{T}'_{AI}$ będzie definicyjnym rozszerzeniem teorii $\underline{T}_{A}$ za pomocą definicji (def$_1$ I).

STWIERDZENIE 5. Każda tradycyjna I-struktura specjalna dla $\underline{L}_{AI}$ jest modelem teorii $\underline{T}'_{AI}$.

Upraszczając dowód twierdzenia 4 można łatwo wykazać:

TWIERDZENIE 5. Struktura S jest modelem teorii $\underline{T}'_{AI}$ wtw S jest epimorficzna z pewną tradycyjną I-strukturą specjalną dla $\underline{L}_{AI}$.

WNIOSEK 5. Dla każdej formuły f z $\underline{F}_{AI}$:
f jest twierdzeniem teorii $\underline{T}'_{AI}$ wtw f jest prawdziwa w każdej tradycyjnej I-strukturze specjalnej dla $\underline{L}_{AI}$.

Z wniosków otrzymujemy, że teoria $\underline{T}'_{AI}$ jest rozszerzeniem teorii $\underline{T}_{Ł}$, $\underline{T}_{AI}$ i $\underline{T}_{Sh}$, oraz że $\underline{T}'_{AI}$ jest konserwatywnym rozszerzeniem teorii $\underline{T}_{A}$.

§ 5. W języku $\underline{L}_{AIE}$ (w którym jako symbole pozalogiczne występują jedynie ‘A’, ‘I’ oraz ‘E’) możemy zbudować definicyjne rozszerzenie teorii $\underline{T}_{Sh}$ za pomocą definicji:

(def$_1$ E) $\qquad$ $Ex \leftrightarrow Ixx$.

Łatwo zauważyć, że formuła (def$_1$ E) jest prawdziwa we wszystkich strukturach specjalnych dla $\underline{L}_{AIE}$. Powyższe rozszerzenie oznaczmy przez ‘$\underline{T}_{ShE}$’. Łatwo zauważyć, że zgodnie z § 4 zachodzi:

STWIERDZENIE 6. Każda struktura specjalna dla $\underline{L}_{AIE}$ jest modelem teorii $\underline{T}_{ShE}$.

TWIERDZENIE 6. Struktura S jest modelem teorii $\underline{T}_{ShE}$ wtw S jest epimorficzna z pewną strukturą specjalną dla $\underline{L}_{AIE}$.

WNIOSEK 6. Dla dowolnego f z $\underline{F}_{AIE}$:
f jest twierdzeniem teorii $\underline{T}_{ShE}$ wtw f jest prawdziwe w każdej strukturze specjalnej dla $\underline{L}_{AIE}$.

Jedną z równoprawnych interpretacji teorii $\underline{T}_{AE}$ jest traktowanie jej jako teorii struktur generowanych przez I-rodziny zbiorów. We wszystkich tych strukturach prawdziwa jest formuła:

(def$_2$ I) $\qquad$ $Ixy \leftrightarrow \exists z\,(Ez \,\&\, Azx \,\&\, Azy)$.

Jednak istnieją tradycyjne (jak również nietradycyjne) struktury specjalne dla $\underline{L}_{AIE}$, w których implikacja prosta z (def$_2$ I) jest fałszywa. Zauważmy, że implikacja odwrotna w (def$_2$ I) jest prawdziwa w każdej strukturze specjalnej dla $\underline{L}_{AIE}$ (jest twierdzeniem teorii $\underline{T}_{\underline{Sh}E}$).

Niech $\underline{T}_{AEI}$ będzie definicyjnym rozszerzeniem teorii $\underline{T}_{AE}$ za pomocą definicji (def$_2$ I).

STWIERDZENIE 7. Każde I-struktura specjalna dla $\underline{L}_{AIE}$ jest modelem teorii $\underline{T}_{AEI}$.

Podobnie jak poprzednie twierdzenia można udowodnić:

TWIERDZENIE 7. Struktura S jest modelem teorii $\underline{T}_{AEI}$ wtw S jest epimorficzna z pewną I-strukturą specjalną dla $\underline{L}_{AIE}$.

WNIOSEK 7. Dla dowolnej formuły f z $\underline{F}_{AIE}$:

f jest twierdzeniem teorii $\underline{T}_{AEI}$ wtw f jest prawdziwa w każdej I-strukturze specjalnej dla $\underline{L}_{AIE}$.

Ponadto możemy w języku $\underline{L}_{AIE}$ rozszerzyć teorie $\underline{T}_{Ł}$ i $\underline{T}^{t}_{AI}$ — zgodnie z ich interpretacjami — za pomocą aksjomatu (3^t). Oczywiście, pierwsze z tych rozszerzeń jest równoważne definicyjnemu rozszerzeniu teorii $\underline{T}_{Ł}$ za pomocą (def E), zaś drugie — definicyjnemu rozszerzeniu teorii $\underline{T}^{t}_{AE}$ za pomocą definicji (def$_1$ I).

§ 6. W języku pierwszego rzędu $\underline{L}_{\varepsilon}$ (w którym jedyną stałą pozalogiczną jest 'ε') rozpatrzymy teorię $\underline{O}$ (Ontologia) o jedynym aksjomacie specyficznym:

(O) $\qquad$ $\varepsilon xy \leftrightarrow (\exists z\, \varepsilon zx \,\&\, \forall z\, \forall u\, ((\varepsilon zx \,\&\, \varepsilon zu) \rightarrow \varepsilon zu) \,\&\, \forall z\, (\varepsilon zx \rightarrow \varepsilon zy))$

W [10] udowodniono twierdzenie o epimorfizmie dla teorii $\underline{O}$:

TWIERDZENIE 8. Struktura S jest modelem teorii $\underline{O}$ wtw S jest epimorficzna z pewną ε-strukturą specjalną dla języka $\underline{L}_{\varepsilon}$.

WNIOSEK 8. Dla dowolnej formuły f z $\underline{F}_{\varepsilon}$:

f jest twierdzeniem teorii $\underline{O}$ wtw f jest prawdziwa w każdej ε-strukturze specjalnej dla języka $\underline{L}_{\varepsilon}$.

Dla teorii $\underline{EO}$ (Elementarna Ontologia) będącej rozszerzeniem teorii $\underline{O}$ (w języku $\underline{L}_{\varepsilon}$) powstałym po dodaniu jako aksjomatów wszystkich formuł postaci

$$\exists x\, \forall y\, (\varepsilon yx \leftrightarrow (\varepsilon yy \,\&\, \varphi))$$

gdzie φ jest taką formułą z $\underline{F}_{\varepsilon}$, w której 'x' nie występuje jako zmienna wolna, udowodniono w [2]:

TWIERDZENIE 9. Struktura S jest modelem teorii $\underline{EO}$ wtw S jest epimorficzna z pewną strukturą specjalną dla $\underline{L}_\varepsilon$, w której uniwersum jest zbiorem potęgowym jakiegoś zbioru.
WNIOSEK 9. Dla dowolnej formuły f z $\underline{F}_\varepsilon$:
f jest twierdzeniem teorii $\underline{EO}$ wtw jest prawdziwa w każdej strukturze specjalnej dla $\underline{L}_\varepsilon$, której uniwersum jest zbiorem potęgowym.

§ 7. Niech $\underline{L}$ będzie językiem pierwszego rzędu, w którym występują wszystkie predykaty wymienione w § 1. Zauważmy, że poniższe formuły są prawdziwe w każdej ε-strukturze specjalnej dla $\underline{L}$:

(def A) $\quad Axy \leftrightarrow \forall z\,(\varepsilon zx \rightarrow \varepsilon zy)$

(def_2 E) $\quad Ex \leftrightarrow \exists z\,(\varepsilon zx)$

(def_3 I) $\quad Ixy \leftrightarrow \exists z\,(\varepsilon zx \;\&\; \varepsilon zy)$

Oczywiście, istnieją struktury specjalne dla $\underline{L}$, w których fałszywe są implikacja odwrotna z (def A) oraz implikacje proste z (def_2 E) i (def_3 I).

Dla zbudowanego w $\underline{L}$ definicyjnego rozszerzenia teorii $\underline{O}$ (odp. $\underline{EO}$) za pomocą definicji (def A), (def_2 E) i (def_3 I), można łatwo udowodnić odpowiednik twierdzenia 8 i wniosku 8 (odp. twierdzenia 9 i wniosku 9) — korzystając z twierdzenia 8 (odp. twierdzenia 9).

§ 8. Z każdą otwartą teorią pierwszego rzędu T związana jest teoria T^0 oparta na aksjomatach teorii T i nadbudowana w zbiorze bezkwantyfikatorowych formuł teorii T nad klasycznym rachunkiem zdań. Przy tym zachodzi: bezkwantyfikatorowa formuła jest twierdzeniem teorii T wtw jest ona twierdzeniem teorii T^0. Na mocy lematu 2 z § 1 oraz wniosków z § 2–5 otrzymujemy:

WNIOSEK 10. Dla każdej formuły f z $\underline{F}^0_A$ (odp. $\underline{F}^0_{AE}$, $\underline{F}^0_{AI}$, $\underline{F}^0_{AIE}$):

a) f jest twierdzeniem teorii $\underline{T}^0_A$ (odp. $\underline{T}^0_{AE}$, $\underline{T}^0_{Ł}$, $\underline{T}^0_{ŁE}$) wtw f jest prawdziwa w każdej tradycyjnej strukturze specjalnej dla $\underline{L}_A$ (odp. $\underline{L}_{AE}$, $\underline{L}_{AI}$, $\underline{L}_{AIE}$), której uniwersum jest zbiorem potęgowym jakiegoś zbioru.

b) f jest twierdzeniem teorii $\underline{T}^0_{AE}$ (odp. $\underline{T}^0_{Sh}$, $\underline{T}^0_{ShE}$) wtw f jest prawdziwa w każdej strukturze specjalnej dla $\underline{L}_{AE}$ (odp. $\underline{L}_{AI}$, $\underline{L}_{AIE}$), której uniwersum jest zbiorem potęgowym jakiegoś zbioru.

Z wniosków 3, 4, 5, 10 otrzymujemy:

WNIOSEK 11. Dla każdej formuły f z $\underline{F}^0_{AI}$:
f jest twierdzeniem teorii $\underline{T}_{Sh}$ (odp. $\underline{T}_{Ł}$) wtw f jest twierdzeniem teorii $\underline{T}_{AI}$ (odp. $\underline{T}^t_{AI}$).

Podobnie otrzymujemy:

WNIOSEK 12. Dla każdej formuły f z $\underline{F}^0_{AIE}$:
f jest twierdzeniem teorii $\underline{T}_{ShE}$ (odp. $\underline{T}_{ŁE}$) wtw f jest twierdzeniem teorii $\underline{T}_{AIE}$ (odp. $\underline{T}^t_{AIE}$).

II. PEWNE RACHUNKI NAZW Z KWANTYFIKATORAMI

§ 1. *Języki formalne używane w cz.* I można zastosować w rachunku nazw z kwantyfikatorami, gdyż jak zauważono w [8] (s. 49) „Wyrażenia poprawnie zbudowane posiadają znaczenie tylko wówczas, gdy podana jest interpretacja dla (występującej w nich) symboliki"[5]. Będziemy zatem traktować zmienne jako tzw. zmienne nazwowe, zaś symbole 'A', 'I', 'E' oraz 'ε' będą reprezentować teraz odpowiednio funktory zdaniotwórcze od argumentów nazwowych: 'każde ... jest ...' (zdanie ogólno-twierdzące), 'pewne ... jest ...' (zdanie szczegółowo-twierdzące), 'istnieje co najmniej jedno ...' (zdanie egzystencjalne) oraz funktor Leśniewskiego '... jest ...' (zdanie jednostkowe w sensie Leśniewskiego). Funktory te traktujemy jako stałe logiczne o ustalonej interpretacji, przy której:

— zdanie ogólno-twierdzące jest prawdziwe wtw zakres podmiotu jest zawarty w zakresie orzecznika,

— zdanie szczegółowo-twierdzące jest prawdziwe wtw podmiot i orzecznik mają wspólny desygnat,

— zdanie egzystencjalne jest prawdziwe wtw argument funktora głównego jest nazwą niepustą,

— zdanie jednostkowe w sensie Leśniewskiego jest prawdziwe wtw podmiot jest nazwą jednostkową i jego jedyny desygnat jest desygnatem orzecznika.

W ten sposób teorie omawiane w cz. I możemy rozpatrywać jako pewne rachunki nazw z kwantyfikatorami (kwantyfikatory interpretujemy analogicznie jak w teoriach pierwszego rzędu, przy czym inny jest zakres wartości zmiennych).

§ 2. Niech U będzie dowolnie wybranym zbiorem, zaś R niech będzie dowolnie wybraną niepustą rodziną zbiorów. W rozważaniach formalnych U ma odpowiadać „zakresowi przedmiotów" u G. Künga i mają do niego należeć desygnaty niepustych nazw, tj. oznaczane przez te nazwy przedmioty. Rodzina R ma odpowiadać zbiorowi ekstensji, tj. według G. Künga ma to być „zakres wartości zmiennych". Z filozoficznego punktu widzenia ciekawy jest problem dotyczący związku zachodzącego pomiędzy zbiorem U i rodziną R.

Z formalnego punktu widzenia zachodzić mogą różne relacje pomiędzy zbiorem U i rodziną R. Przykładowo, możemy przyjąć jedną z poniższych zależności:

— $R = 2^U$;

— $\bigcup R = U$ (każdy element jakiegoś zbioru z rodziny R należy do zbioru U oraz odwrotnie każdy element zbioru U jest elementem jakiegoś zbioru z rodziny R; zauważmy, że $R \subset 2^U$ równoważne jest $\bigcup R \subset U$);

[5] Uwagę tę zawdzięczam Panu Profesorowi Bogusławowi Iwanusiowi.

— $R \subsetneq 2^U$ (każdy zbiór z R jest podzbiorem zbioru U, lecz jakiś podzbiór zbioru U nie należy do rodziny R);
— $2^U \subsetneq R$;
— $\bigcup R \subsetneq U$;
— $U \subsetneq \bigcup R$;

(niektóre z powyższych zależności pociągają inne oraz są wśród nich relacje wykluczające się). Zależeć to będzie od przyjętych założeń filozoficznych. Wydaje się bezsporne tylko to, iż rodziny zbiorów 2^U i R mają niepuste przecięcie, w którym zawarta jest rodzina zbiorów R_0 złożona z zakresów nazw (każdy desygnat jakiejkolwiek nazwy należy do U, więc $R_0 \subset 2^U$, oraz z założenia $R_0 \subset R$). Kwestia rodzaju relacji pomiędzy U i R nie będzie odgrywać żadnej roli w formalnej semantyce rachunków nazw z kwantyfikatorami (w ogóle nie będziemy używać zbioru U). Pozostawiamy tę kwestię bez rozwiązania, jako czysto filozoficzną. W formalnej semantyce analizowanych przez nas rachunków nazw istotną rolę odgrywać będzie jedynie struktura mnogościowa rodziny R.

Przy powyżej ustalonej interpretacji stałych 'A', 'I', 'E' oraz 'ε' (traktowanych jako stałe logiczne; § 1) przyjmujemy standardowe pojęcie spełniania formuły przez wartościowanie zmiennych w rodzinie zbiorów R. Mówimy, że dana formuła z $\underline{L}$ jest prawdziwa w rodzinie R wtw jest spełniona przez każde wartościowanie zmiennych w R (przy ustalonej interpretacji stałych). Oczywiste jest, że dla f z $\underline{L}$ zachodzi:

f jest prawdziwa w rodzinie R wtw f jest prawdziwa w strukturze specjalnej dla $\underline{L}$ generowanej przez rodzinę R.

(W drugim przypadku f interpretujemy jako formułę języka pierwszego rzędu).

Niech K będzie niepustą klasą złożoną z pewnych niepustych rodzin zbiorów. Dla formuł z języka $\underline{L}$ (traktowanych jako formuły rachunku nazw) wprowadzimy następujące pojęcie K-tautologii:

f jest K-tautologią wtw dla każdej rodziny R z $K: f$ jest prawdziwa w R.

§ 3. Jeżeli będziemy rozpatrywać teorie omawiane w cz. I jako rachunki nazw z kwantyfikatorami, to wnioski 1–9 uzyskane w cz. I dadzą nam twierdzenia o pełności odpowiednio względem następujących klas: klasy wszystkich niepustych rodzin zbiorów, klasy wszystkich tradycyjnych rodzin zbiorów, klasy wszystkich I-rodzin zbiorów, klasy wszystkich tradycyjnych I-rodzin zbiorów, klasy wszystkich ε-rodzin zbiorów, klasy wszystkich zbiorów potęgowych. Przykładowo, dla K będącego klasą wszystkich ε-rodzin zbiorów:

f jest twierdzeniem definicyjnego rozszerzenia rachunku $\underline{O}$ wtw f jest K-tautologią.

BIBLIOGRAFIA

[1] Batóg T., *Podstawy logiki*, Poznań 1986.

[2] Iwanuś B., *On Leśniewski's elementary ontology*, Studia Logica XXXI, s. 73–119.

[3] Küng G., *Nominalistische Logik heute*, Allgemeine Zeitschrift für Philosophie 1, 1977, s. 29–52. Polski przekład A. I. Buczek [w:] Roczniki Filozoficzne, t. XXIX, z. 1, s. 87–107.

[4] Küng G., *The meaning of the quantifiers in the logic of Leśniewski*, Studia Logica XXXVI 4, s. 309–322.

[5] Küng G., *Systemy Leśniewskiego.* [w:] *Logika formalna. Zarys encyklopedyczny*, pod red. W. Marciszewskiego, Warszawa 1987, s. 397–405.

[6] Küng G., Canty J. T., *Substitutional quantification and Leśniewskian quantifiers*, Theoria XXXVI, s. 165–182.

[7] *Mała encyklopedia logiki*, pod red. W. Marciszewskiego, wyd. 2 zmienione, Wrocław 1988.

[8] Mendelson E., *Introduction to Mathematical Logic*, Princeton 1964.

[9] Shepherdson J. C., *On the Interpretation of Aristotelian Syllogistic*, Journal of Symbolic Logic, 21, 2, s. 137–147.

[10] Takano M., *A Semantical Investigation into Leśniewski's Axiom of His Ontology*, Studia Logica XLIV 1, s. 71–77.