Pietruszczak, Andrzej

Rozstrzygalność w bezkwantyfikatorowym rachunku nazw

Acta Universitatis Nicolai Copernici. Logika 3 (255), 21-43

1992

ACTA UNIVERSITATIS NICOLAI COPERNICI
LOGIKA III - NAUKI HUMANISTYCZNO-SPOŁECZNE - ZESZYT 255 - 1992

Katedra Logiki

Andrzej Pietruszczak

ROZSTRZYGALNOŚĆ W BEZKWANTYFIKATOROWYM RACHUNKU NAZW

W pierwszej części pracy zajmiemy się rozstrzygalnością zbioru tautologii pewnego bezkwantyfikatorowego rachunku nazw oraz zbiorów tautologii różnych fragmentów tego rachunku. Nie będziemy korzystać przy tym z metateorii rachunku predykatów. Rozstrzygalność będzie wynikać z lematu 1, w którym podamy dokładne oszacowanie górne mocy modeli weryfikujących określone klasy formuł.

W drugiej części pracy badamy powyższą rozstrzygalność w oparciu o rozstrzygalność węższego monadycznego rachunku predykatów pierwszego rzędu z identycznością ($\mathbf{MRP}_=$). Chociaż rozstrzygalność zbioru tautologii $\mathbf{MRP}_=$ jest znanym faktem[1], udowodnimy ją jednak w drugiej części pracy. Czynimy to z dwóch powodów. Po pierwsze dlatego, że metoda, którą przy tym zastosujemy, uwypukli związek pomiędzy zbiorem tautologii bezkwantyfikatorowego rachunku nazw i zbiorem tautologii $\mathbf{MRP}_=$. Mianowicie, udowodnimy lemat 2, w którym podamy dokładne oszacowanie górne mocy modeli weryfikujących formuły $\mathbf{MRP}_=$. Z lematu 2 nie tylko wynikać będzie rozstrzygalność $\mathbf{MRP}_=$, lecz również pewne przypadki lematu 1 [2]. Ponadto, podobne oszacowanie, jak w lemacie 2, podano w [1] (twierdzenie 1 s. 250). Jest ono jednak większe od naszego, zaś autorzy stwierdzają, że nie można go zredukować (zadanie 25.2 s. 259).

Oczywiście, będziemy posługiwać się w tej pracy jedynie intuicyjnym określeniem rozstrzygalności, które zarazem spełnia wymogi ścisłej definicji rozstrzygalności. Zbiór tautologii danego rachunku jest rozstrzygalny wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje jednolita metoda pozwalająca o każdej jego formule ustalić w skończonej liczbie kroków czy formuła ta należy, czy też nie, do zbioru tautologii.

Część I.

1. FORMUŁY BEZKWANTYFIKATOROWEGO RACHUNKU NAZW. Niech **ZM** będzie zbiorem tzw. zmiennych nazwowych[3], złożonym z następujących liter: 'S','P','S_1','S_2',..., itd. Będziemy badać bezkwantyfikatorowy rachunek nazw, którego język ma następujące stałe logiczne: A) symbole '**a**','**i**','ε' oraz'**i!**' - reprezentujące odpowiednio funktory zdaniotwórcze: 'każde...jest...' rozumiany słabo[4], 'pewne...jest...', stałą Leśniewskiego '...jest...' oraz 'dokładnie jedno...jest...',

B) stała '**V**' - reprezentująca nazwę uniwersalną 'przedmiot',

C) symbole ''','+' oraz '·' - reprezentujące odpowiednio funktory nazwotwórcze 'nie...','...lub...' oraz '...i...'.

D) symbole '¬','∧','∨','→' oraz '≡' - reprezentujące odpowiednio, klasycznie rozumiane, spójniki zdaniowe negacji, koniunkcji, alternatywy, implikacji materialnej i równoważności materialnej.

Niech **S** będzie zbiorem złożonym ze stałych: '**a**','**i**','**ε**', '**i!**', '**V**',''','+','·'. Niech ponadto *s* będzie dowolnym podzbiorem zbioru **S**, zawierającym przynajmniej jedną ze stałych '**a**', '**i**','**ε**','**i!**'. Zbiorem termów T^s, wyznaczonym przez zbiór *s*, jest najmniejszy zbiór zawierający zbiór **ZM** oraz spełniający warunki:

- jeżeli '**V**'$\in s$, to '**V**'$\in T^s$,
- jeżeli $\tau\in T^s$ i '''$\in s$, to $\ulcorner\tau'\urcorner\in T^s$,
- jeżeli $\tau_1,\tau_2\in T^s$ i '+'$\in s$, to $\ulcorner(\tau_1+\tau_2)\urcorner\in T^s$,
- jeżeli $\tau_1,\tau_2\in T^s$ i '·'$\in s$, to $\ulcorner(\tau_1\cdot\tau_2)\urcorner\in T^s$.

Zbiorem formuł zdaniowych Σ^s, wyznaczonym przez zbiór *s*, jest najmniejszy zbiór spełniający warunki:

- jeżeli $\tau_1,\tau_2\in T^s$ i $\delta\in\{$'**a**','**i**','**ε**','**i!**'$\}\cap s$, to $\ulcorner\tau_1\delta\tau_2\urcorner\in\Sigma^s$,
- jeżeli $\sigma\in\Sigma^s$, to $\ulcorner\neg\sigma\urcorner\in\Sigma^s$,
- jeżeli $\sigma_1,\sigma_2\in\Sigma^s$ i $\S\in\{$'∧','∨','→''≡'$\}$, to $\ulcorner(\sigma_1\S\sigma_2)\urcorner\in\Sigma^s$.

Ponadto, przyjmijmy tzw. metajęzykowe definicje mówiące, że $\ulcorner\tau_1\mathbf{a^*}\tau_2\urcorner$, $\ulcorner\tau_1\mathbf{o}\tau_2\urcorner$, $\ulcorner\tau_1\mathbf{e}\tau_2\urcorner$, $\ulcorner\tau_1\mathbf{e^*}\tau_2\urcorner$, $\ulcorner\tau_1\doteq\tau_2\urcorner$, $\ulcorner\mathbf{ex}\tau\urcorner$, $\ulcorner\tau_1=\tau_2\urcorner$, $\ulcorner\mathbf{ex!}\tau\urcorner$ oraz $\ulcorner\mathbf{sol}\tau\urcorner$ są odpowiednio skrótami formuł $\ulcorner\tau_1\mathbf{i}\tau_1\wedge\tau_1\mathbf{a}\tau_2\urcorner$, $\ulcorner\neg\tau_1\mathbf{a}\tau_2\urcorner$, $\ulcorner\neg\tau_1\mathbf{i}\tau_2\urcorner$, $\ulcorner\tau_1\mathbf{i}\tau_1\wedge\neg\tau_1\mathbf{i}\tau_2\urcorner$, $\ulcorner\tau_1\mathbf{a}\tau_2\wedge\tau_2\mathbf{a}\tau_1\urcorner$, $\ulcorner\tau\mathbf{i}\tau\urcorner$, $\ulcorner\tau_1\varepsilon\tau_2\wedge\tau_2\varepsilon\tau_1\urcorner$, $\ulcorner\tau\varepsilon\tau\urcorner$ oraz $\ulcorner\neg\tau\mathbf{i}\tau\vee\tau\varepsilon\tau\urcorner$ [5].

Niech $\mathcal{T}$ i Σ będą odpowiednio zbiorami termów i formuł zdaniowych, wyznaczonymi przez zbiór **S**.

2. TAUTOLOGIE W ZBIORZE Σ^S. Modelem dla zmiennych z **ZM** jest dowolna para uporządkowana $\mu=\langle U,d\rangle$, w której U jest niepustym zbiorem (nazywanym *uniwersum modelu*), zaś d jest funkcją (nazywaną *funkcją denotacji*) przyporządkowującą każdej zmiennej z **ZM** jakiś podzbiór zbioru U.

Funkcję d z modelu $\mu=\langle U,d\rangle$ przedłużamy w sposób rekurencyjny do funkcji D^U, określonej na całym zbiorze $\mathcal{T}$ i przyjmującej jako wartości podzbiory zbioru U : dla τ, τ_1 i τ_2 z T

$$D^U(\text{'V'})=U,$$

$$D^U(\ulcorner\tau'\urcorner)=U \setminus D^U(\tau),$$

$$D^U(\ulcorner(\tau_1+\tau_2)\urcorner)=D^U(\tau_1) \cup D^U(\tau_2),$$

$$D^U(\ulcorner(\tau_1\cdot\tau_2)\urcorner)=D^U(\tau_1) \cap D^U(\tau_2).$$

Przyporządkujmy dowolnemu modelowi $\mu=<U,d>$ zbiór $SAT_\mu(\Sigma)$ formuł zdaniowych z Σ spełnionych w modelu μ . Przyporządkowania tego dokonujemy indukcyjnie, za pomocą funkcji D^U [6], w następujący sposób: dla τ_1,τ_2 z T oraz σ,σ_1,σ_2 z Σ

$$\ulcorner\tau_1 a \tau_2\urcorner \in SAT_\mu(\Sigma) \Leftrightarrow^7 D(\tau_1) \subseteq D(\tau_2)$$

$$\ulcorner\tau_1 i \tau_2\urcorner \in SAT_\mu(\Sigma) \Leftrightarrow D(\tau_1) \cap D(\tau_2) \neq \emptyset$$

$$\ulcorner\tau_1 \varepsilon \tau_2\urcorner \in SAT_\mu(\Sigma) \Leftrightarrow Card(D(\tau_1))=1 \text{ i } D(\tau_1) \subseteq D(\tau_2)$$

$$\ulcorner\tau_1 i! \tau_2\urcorner \in SAT_\mu(\Sigma) \Leftrightarrow Card(D(\tau_1) \cap D(\tau_2))=1$$

$$\ulcorner\neg\sigma\urcorner \in SAT_\mu(\Sigma) \Leftrightarrow \sigma \notin SAT_\mu(\Sigma)$$

$$\ulcorner(\sigma_1\wedge\sigma_2)\urcorner \in SAT_\mu(\Sigma) \Leftrightarrow \sigma_1 \in SAT_\mu(\Sigma) \text{ i } \sigma_2 \in SAT_\mu(\Sigma)$$

$$\ulcorner(\sigma_1\vee\sigma_2)\urcorner \in SAT_\mu(\Sigma) \Leftrightarrow \sigma_1 \in SAT_\mu(\Sigma) \text{ lub } \sigma_2 \in SAT_\mu(\Sigma)$$

$$\ulcorner(\sigma_1\rightarrow\sigma_2)\urcorner \in SAT_\mu(\Sigma) \Leftrightarrow \sigma_1 \notin SAT_\mu(\Sigma) \text{ lub } \sigma_2 \in SAT_\mu(\Sigma)$$

$$\ulcorner(\sigma_1\equiv\sigma_2)\urcorner \in SAT_\mu(\Sigma) \Leftrightarrow \sigma_1,\sigma_2 \in SAT_\mu(\Sigma) \text{ bądź } \sigma_1,\sigma_2 \notin SAT_\mu(\Sigma)$$

$Card(D(\tau))$ to moc zbioru $D(\tau)$.

Dla zbioru Σ^S (określonego jak w p. 1) przyjmijmy definicję: $SAT_\mu(\Sigma^S):=SAT_\mu(\Sigma) \cap \Sigma^S$ [8]. Formuła σ z Σ^S jest tautologią wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego modelu μ, $\sigma \in SAT_\mu(\Sigma^S)$. Niech $TAUT(\Sigma^S)$ będzie zbiorem tautologii z Σ^S. Oczywiście, $TAUT(\Sigma^S)=TAUT(\Sigma) \cap \Sigma^S$.

3. **ROZSTRZYGALNOŚĆ ZBIORU** $TAUT(\Sigma^S)$. Niech Σ^S będzie zbiorem formuł zdaniowych określonym jak w p. 1. Udowodnijmy następujący lemat:

LEMAT 1. Niech formuła σ z Σ^S ma k zmiennych ($k\geq 0$) oraz zbiór s zawarty jest odpowiednio w zbiorze:

1) S

2) {'a','i','ε','i!','+','·'} ($k>0$)

3) {'a','i','ε','i!','V'}

4) {'a','i','ε','i!'} ($k>0$)

5) {'a','i','ε','V'}

6) {'a','i','ε'} ($k>0$)

7) {'a','i','V',''','+','·'}

8) {'a','i','+','·'} ($k>0$)

9) {'a','i','V'}

10) {'a','i'} ($k>0$)

Wtedy, $\sigma \in TAUT(\Sigma^S) \Leftrightarrow \sigma$ jest spełniona w każdym modelu, którego uniwersum ma moc nie większą odpowiednio od liczby [9]:

1) 2^{k+1}

2) $2(2^k-1)$ ($k>0$)

3) $k(k+1)+2$

4) $k(k+1)$ ($k>0$)

5) $\frac{1}{2}k(k+3)+2$

6) $\frac{1}{2}k(k+3)$ ($k>0$)

7) 2^k

8) 2^k-1 ($k>0$)

9) $\frac{1}{2}k(k+1)+1$

10) $\frac{1}{2}k(k+1)$ ($k>0$)

DOWÓD "$\Rightarrow$" z definicji tautologii.

"$\Leftarrow$" Niech σ będzie dowolnie wybraną formułą z Σ^S mającą k zmiennych ($k\geq 0$; gdy $k=0$, to w σ występują jedynie termy utworzone z 'V') oraz niech $\mathcal{P}_1,\dots,\mathcal{P}_k$ będą różnymi zmiennymi w σ.

Dla dowolnie wybranego modelu $\mu=\langle U,d\rangle$ utworzymy model $m=\langle\mathfrak{U},\delta\rangle$ taki, że jego uniwersum $\mathfrak{U}$ ma odpowiednią (skończoną) moc oraz będzie spełniony warunek:

$$\sigma\in SAT_{\mu}(\Sigma^{S}) \Leftrightarrow \sigma\in SAT_{m}(\Sigma^{S}) \qquad (*)$$

Z dowolności modelu μ otrzymamy wtedy dowodzoną tezę.

Ad 1) W zbiorze U^2 określamy relację równoważności $\approx$ w następujący sposób:

- jeżeli $k=0$, to $\approx$ jest relacją pełną, tj. równą U^2,
- jeżeli $k>0$, to dla dowolnych $u,v\in U$

$$u\approx v \Leftrightarrow \text{dla każdego } i=1,\ldots,k\text{: } u\in d(\mathscr{S}_i) \Leftrightarrow v\in d(\mathscr{S}_i)$$

Oczywiście relacja $\approx$ dzieli zbiór U na niepuste i parami rozłączne klasy abstrakcji $\mathfrak{C}_1,\ldots,\mathfrak{C}_n$, gdzie $1\le n\le 2^k$. W przypadku $k=0$ mamy tylko jedną klasę abstrakcji $\mathfrak{C}_1=U$, w przypadku zaś $k > 0$ klasa abstrakcji $\mathfrak{C}_j$ $(1\le j\le n)$ jest odpowiednią kombinacją k elementowego iloczynu zbiorów, z których każdy jest bądź postaci $d(\mathscr{S}_i)$ bądź postaci $U\setminus d(\mathscr{S}_i)$ $(1\le i\le k)$. Mamy, oczywiście, 2^k kombinacji takich iloczynów. Odrzucając ewentualne puste iloczyny, otrzymamy $n\le 2^k$. Przyjmując $|u|_{\approx}:=\{v\in U : v\approx u\}$, dostajemy $\{|u|_{\approx} : u\in U\}=\{\mathfrak{C}_1,\ldots,\mathfrak{C}_n\}$, przy czym dla dowolnego $u\in U$: $u\in\mathfrak{C}_j \Leftrightarrow |u|_{\approx}=\mathfrak{C}_j$. Wprost z definicji relacji $\approx$ otrzymujemy dla $1\le i\le k$ oraz $u\in U$:

$$u\in d(\mathscr{S}_i) \Leftrightarrow |u|_{\approx}\subseteq d(\mathscr{S}_i) \Leftrightarrow |u|_{\approx}\cap d(\mathscr{S}_i)\neq\emptyset$$

Za pomocą indukcji po podtermach łatwo pokazać, że dla dowolnego τ występującego w formule σ zachodzi: dla każdego $u\in U$

$$u\in D(\tau) \Leftrightarrow |u|_{\approx}\subseteq D(\tau) \Leftrightarrow |u|_{\approx}\cap D(\tau)\neq\emptyset$$

Z modelu $\mu=\langle U,d\rangle$ tworzymy model $m=\langle\mathfrak{U},\mathfrak{d}\rangle$ w następujący sposób. Dla każdego $1\le j\le n$ w klasie abstrakcji $\mathfrak{C}_j$ wybieramy w dowolny sposób jej jednego reprezentanta r_j. Dla $1\le j\le n$ połóżmy:

- gdy $Card\ \mathfrak{C}_j=1$, to $\mathfrak{U}_j:=\{\mathfrak{C}_j\}$,
- gdy $Card\ \mathfrak{C}_j>1$, to $\mathfrak{U}_j:=\{\mathfrak{C}_j,r_j\}$.

Teraz przyjmijmy $\mathfrak{U}:=\mathfrak{U}_1\cup\ldots\cup\mathfrak{U}_n$. Oczywiście, $Card\ \mathfrak{U}\le 2\cdot 2^k$. Funkcję denotacji $\mathfrak{d}$ określamy zaś na ZM następującym wzorem:

$$\delta(\mathcal{S}):=\{u\in\mathfrak{U}\ :\ u\subseteq d(\mathcal{S})\ \text{bądź}\ u\in d(\mathcal{S})\}$$ [10]

Indukcyjnie po podtermach można pokazać, że dla każdego termu τ występującego w formule σ zachodzi

$$\mathfrak{D}(\tau)=\{u\in\mathfrak{U}\ :\ u\subseteq D(\tau)\ \text{bądź}\ u\in D(\tau)\} \qquad (+)$$

Istotnie, dla zmiennych jest to określenie funkcji δ. Jeżeli '$\mathbf{V}$'$\in s$, to $\mathfrak{D}(\text{'}\mathbf{V}\text{'})=\mathfrak{U}$ oraz $D(\text{'}\mathbf{V}\text{'})=U$, zaś dla każdego $u\in\mathfrak{U}$ albo $u\subseteq U$ albo $u\in U$. Jeśli '$'$'$\in s$, to dla $1\le j\le n$ przyjmując założenie indukcyjne (+) mamy: $\mathfrak{C}_j\in\mathfrak{D}(\ulcorner\tau'\urcorner) \Leftrightarrow \mathfrak{C}_j\notin\mathfrak{D}(\tau) \Leftrightarrow \mathfrak{C}_j\ \backslash D(\tau)\neq\emptyset \Leftrightarrow \mathfrak{C}_j\cap D(\tau)=\emptyset \Leftrightarrow \mathfrak{C}_j\subseteq U\ \backslash D(\tau) \Leftrightarrow \mathfrak{C}_j\subseteq D(\ulcorner\tau'\urcorner)$; ponadto, $r_j\in\mathfrak{D}(\ulcorner\tau'\urcorner)\Leftrightarrow r_j\notin\mathfrak{D}(\tau)\Leftrightarrow r_j\notin D(\tau) \Leftrightarrow r_j\in D(\ulcorner\tau'\urcorner)$. Jeśli '+'$\in s$, to $\mathfrak{C}_j\in\mathfrak{D}(\ulcorner\tau_1+\tau_2\urcorner) \Leftrightarrow \mathfrak{C}_j\in\mathfrak{D}(\tau_1)\cup\mathfrak{D}(\tau_2) \Leftrightarrow \mathfrak{C}_j\in\mathfrak{D}(\tau_1)$ lub $\mathfrak{C}_j\in\mathfrak{D}(\tau_2) \Leftrightarrow \mathfrak{C}_j\subseteq D(\tau_1)$ lub $\mathfrak{C}_j\subseteq D(\tau_2) \Leftrightarrow r_j\in D(\tau_1)$ lub $r_j\in D(\tau_2) \Leftrightarrow r_j\in D(\tau_1)\cup D(\tau_2) \Leftrightarrow \mathfrak{C}_j\subseteq D(\tau_1)\cup D(\tau_2) \Leftrightarrow \mathfrak{C}_j\subseteq D(\ulcorner\tau_1+\tau_2\urcorner)$; ponadto, $r_j\in\mathfrak{D}(\ulcorner\tau_1+\tau_2\urcorner) \Leftrightarrow r_j\in\mathfrak{D}(\tau_1)\cup\mathfrak{D}(\tau_2) \Leftrightarrow r_j\in\mathfrak{D}(\tau_1)$ lub $r_j\in\mathfrak{D}(\tau_2) \Leftrightarrow r_j\in D(\tau_1)$ lub $r_j\in D(\tau_2) \Leftrightarrow r_j\in D(\tau_1)\cup D(\tau_2) \Leftrightarrow r_j\in D(\ulcorner\tau_1+\tau_2\urcorner)$. Jeśli '$\cdot$'$\in s$, to $\mathfrak{C}_j\in\mathfrak{D}(\ulcorner\tau_1\cdot\tau_2\urcorner) \Leftrightarrow \mathfrak{C}_j\in\mathfrak{D}(\tau_1)\cap\mathfrak{D}(\tau_2) \Leftrightarrow \mathfrak{C}_j\in\mathfrak{D}(\tau_1)$ i $\mathfrak{C}_j\in\mathfrak{D}(\tau_2)\Leftrightarrow \mathfrak{C}_j\subseteq D(\tau_1)$ i $\mathfrak{C}_j\subseteq D(\tau_1) \Leftrightarrow \mathfrak{C}_j\subseteq D(\tau_1)\cap D(\tau_2) \Leftrightarrow \mathfrak{C}_j\subseteq D(\ulcorner\tau_1\cdot\tau_2\urcorner)$; ponadto, $r_j\in\mathfrak{D}(\ulcorner\tau_1\cdot\tau_2\urcorner) \Leftrightarrow r_j\in\mathfrak{D}(\tau_1)\cap\mathfrak{D}(\tau_2) \Leftrightarrow r_j\in\mathfrak{D}(\tau_1)$ i $r_j\in\mathfrak{D}(\tau_2) \Leftrightarrow r_j\in D(\tau_1)$ i $r_j\in D(\tau_2) \Leftrightarrow r_j\in D(\tau_1)\cap D(\tau_2) \Leftrightarrow r_j\in D(\ulcorner\tau_1\cdot\tau_2\urcorner)$.

Możemy teraz udowodnić indukcyjnie po podformułach formuły σ, że dla każdej podformuły zachodzi warunek (*). Wystarczy to sprawdzić dla formuł atomowych, gdyż indukcyjny dowód dla formuł złożonych jest oczywisty. Dla formuł atomowych, warunek (*) wynika z trzech następujących równoważności: $D(\tau_1)\subseteq D(\tau_2) \Leftrightarrow \mathfrak{D}(\tau_1)\subseteq\mathfrak{D}(\tau_2)$ (dla podformuły $\ulcorner\tau_1 a\tau_2\urcorner$); $D(\tau_1)\cap D(\tau_2)\neq\emptyset \Leftrightarrow \mathfrak{D}(\tau_1)\cap\mathfrak{D}(\tau_2)\neq\emptyset$ (dla podformuły $\ulcorner\tau_1 i\tau_2\urcorner$); dla pewnego $u_0\in U$, $\{u_0\}=D(\tau_1)\cap D(\tau_2) \Leftrightarrow$ dla pewnego $u_0\in\mathfrak{U}$, $\{u_0\}=\mathfrak{D}(\tau_1)\cap\mathfrak{D}(\tau_2)$ (dla podformuł $\ulcorner\tau_1 i!\tau_2\urcorner$ oraz $\ulcorner\tau_1\varepsilon\tau_2\urcorner$).

Niech $D(\tau_1)\subseteq D(\tau_2)$. Wtedy, na mocy (+), $\mathfrak{D}(\tau_1)\subseteq\mathfrak{D}(\tau_2)$. Odwrotnie, niech $\mathfrak{D}(\tau_1)\subseteq\mathfrak{D}(\tau_2)$ oraz załóżmy, że $u\in D(\tau_1)$. Wtedy

$|u|_{\approx} \subseteq D(\tau_1)$, tj. $|u|_{\approx} \in \mathfrak{D}(\tau_1)$. Stąd $|u|_{\approx} \in \mathfrak{D}(\tau_2)$, tj. $|u|_{\approx} \subseteq D(\tau_2)$. Ponieważ $u \in |u|_{\approx}$, więc $u \in D(\tau_2)$.

Załóżmy, że dla pewnego $u_0 \in U$, $u_0 \in D(\tau_1) \cap D(\tau_2)$. Wtedy z własności funkcji D, $|u_0|_{\approx} \subseteq D(\tau_1)$ i $|u_0|_{\approx} \subseteq D(\tau_2)$. Stąd $|u_0|_{\approx} \in \mathfrak{D}(\tau_1) \cap \mathfrak{D}(\tau_2)$. Odwrotnie, niech $\mathfrak{D}(\tau_1) \cap \mathfrak{D}(\tau_2) \neq \emptyset$. Wtedy, gdy $\mathfrak{C}_j \in \mathfrak{D}(\tau_1) \cap \mathfrak{D}(\tau_2)$, to $\emptyset \neq \mathfrak{C}_j \subseteq D(\tau_1) \cap D(\tau_2)$, gdy zaś $r_j \in \mathfrak{D}(\tau_1) \cap \mathfrak{D}(\tau_2)$, to z (+) mamy $r_j \in D(\tau_1) \cap D(\tau_2)$.

Niech dla pewnego $u_0 \in U$, $\{u_0\} = D(\tau_1) \cap D(\tau_2)$. Z własności funkcji D mamy, $|u_0|_{\approx} \subseteq D(\tau_1)$ i $|u_0|_{\approx} \subseteq D(\tau_2)$. Zatem $|u_0|_{\approx} \subseteq D(\tau_1) \cap D(\tau_2)$. Skoro $|u_0|_{\approx} \neq \emptyset$, więc $|u_0|_{\approx} = \{u_0\}$. Zgodnie z określeniem zbioru $\mathfrak{U}$, $u_0 \notin \mathfrak{U}$. Ponadto, $|u_0|_{\approx} \in \mathfrak{D}(\tau_1) \cap \mathfrak{D}(\tau_2)$. Pokażemy, że jest to jedyny element tego zbioru. Istotnie, jeśli $\mathfrak{u}$ należy do $\mathfrak{D}(\tau_1) \cap \mathfrak{D}(\tau_2)$ i jest klasą abstrakcji, to jej reprezentant należy do $D(\tau_1) \cap D(\tau_2)$, czyli równa się u_0. Stąd zaś $\mathfrak{u} = |u_0|_{\approx}$. Ponadto, $\mathfrak{u}$ nie może należeć do $\mathfrak{D}(\tau_1) \cap \mathfrak{D}(\tau_2)$ i być reprezentantem jakiejś klasy abstrakcji, gdyż należałoby również do $D(\tau_1) \cap D(\tau_2)$, czyli musiałoby się równać u_0, zaś $u_0 \notin \mathfrak{U}$. Odwrotnie, niech dla pewnego $\mathfrak{u}_0 \in \mathfrak{U}$, $\{\mathfrak{u}_0\} = \mathfrak{D}(\tau_1) \cap \mathfrak{D}(\tau_2)$. Wtedy $\mathfrak{u}_0$ jest jednoelementową klasą abstrakcji, gdyż inaczej, gdyby $\mathfrak{u}_0$ było co najmniej dwuelementową klasą abstrakcji, do $\mathfrak{D}(\tau_1) \cap \mathfrak{D}(\tau_2)$ musiałaby należeć $\mathfrak{u}_0$ razem ze swoim reprezentantem, zaś gdyby $\mathfrak{u}_0$ było reprezentantem jakiejś klasy abstrakcji, do $\mathfrak{D}(\tau_1) \cap \mathfrak{D}(\tau_2)$ musiałaby należeć również ta klasa. Przyjmijmy $\mathfrak{u}_0 = \{u_0\}$. Ponieważ $\mathfrak{u}_0 \subseteq D(\tau_1) \cap D(\tau_2)$, więc $u_0 \in D(\tau_1) \cap D(\tau_2)$. Ponadto, jeśli $u \in D(\tau_1) \cap D(\tau_2)$, to $|u|_{\approx} \subseteq D(\tau_1) \cap D(\tau_2)$. Zatem, na mocy (+), $|u|_{\approx} \in \mathfrak{D}(\tau_1) \cap \mathfrak{D}(\tau_2)$. Dalej z założenia mamy $|u|_{\approx} = \mathfrak{u}_0$, czyli $u = u_0$. Stąd $\{u_0\} = D(\tau_1) \cap D(\tau_2)$.

Ad 2) Przy powyższych oznaczeniach, odrzućmy klasę abstrakcji będącą iloczynem zbiorów $U \setminus d(\mathscr{S}_i)$, $1 \leq i \leq k$. Jeżeli była to jedyna klasa abstrakcji równa U, to przyjmijmy $\mathfrak{U} := \{\emptyset\}$. Teraz

Card $\mathfrak{U}\leq 2^{k+1}-2$. Z uwagi na to, że w σ nie występuje ani '' ani 'V', więc dla dla dowolnego termu τ w σ i dowolnego $u\in U$, $u\in D(\tau)$ $\Leftrightarrow$ $u\in\bigcup\mathfrak{U}$. Reszta dowodu jak *ad* 1), z oczywistymi uproszczeniami.

Ad 7) Przy oznaczeniach *ad* 1), przyjmijmy $\mathfrak{U}:=\{\mathfrak{C}_1,\ldots,\mathfrak{C}_n\}$ oraz $\delta(\mathcal{P}):=\{u\in\mathfrak{U} : u\subseteq d(\mathcal{P})\}$. Indukcyjnie po podtermach, łatwo pokazać, że $\mathfrak{D}(\tau)=\{u\in\mathfrak{U} : u\subseteq D(\tau)\}$ dla dowolnego termu τ występującego w formule σ. Teraz podobnie jak w 1), z oczywistymi uproszczeniami, pokazujemy, że: $D(\tau_1)\subseteq D(\tau_2)$ $\Leftrightarrow$ $\mathfrak{D}(\tau_1)\subseteq\mathfrak{D}(\tau_2)$ (dla podformuły $\ulcorner\tau_1 a\tau_2\urcorner$); $D(\tau_1)\cap D(\tau_2)\neq\emptyset$ $\Leftrightarrow$ $\mathfrak{D}(\tau_1)\cap\mathfrak{D}(\tau_2)\neq\emptyset$ (dla podformuły $\ulcorner\tau_1 i\tau_2\urcorner$).

Ad 8) W dowodzie *ad* 7) odrzucamy klasę abstrakcji będącą iloczynem zbiorów $U\setminus d(\mathcal{P}_i)$ (analogicznie jak w dowodzie *ad* 2). Jeżeli była to jedyna klasa abstrakcji równa U, to przyjmijmy $\mathfrak{U}:=\{\emptyset\}$. Reszta dowodu jak *ad* 1), stosując uwagę z dowodu *ad* 2.

Ad 3) Załóżmy, że *Card* $U>k(k+1)+2$ (czyli *Card* $U>2$), gdy jest inaczej, kładziemy $m:=\mu$.

a) Rozważmy przypadek $k>0$. Przyjmijmy $\mathfrak{J}:=\{d(\mathcal{P}_i)\cap d(\mathcal{P}_j) : 1\leq i,j\leq k$ oraz $d(\mathcal{P}_i)\cap d(\mathcal{P}_j)\neq\emptyset\}$ oraz $\mathfrak{Z}:=\{\{X\}\subseteq\mathfrak{J} :$ *Card* $X>1\}$. Połóżmy $\mathfrak{U}:=\mathfrak{J}\cup\mathfrak{Z}\cup\{U,\{U\}\}$ oraz określmy na **ZM** funkcję $\delta(\mathcal{P}):=\{X\in\mathfrak{J}\cup\{U\} : X\subseteq d(\mathcal{P})\}\cup\{\{X\}\in\mathfrak{Z}\cup\{\{U\}\} : X\subseteq d(\mathcal{P})\}$. Oczywiście, *Card* $\mathfrak{U}\leq k(k+1)+2$ oraz $\delta(\mathcal{P})=\{d(\mathcal{P})\}\Leftrightarrow$ *Card* $d(\mathcal{P})=1$.

Motywując podobnie jak *ad* 1), wystarczy pokazać, że $D(\tau_1)\subseteq D(\tau_2)\Leftrightarrow\mathfrak{D}(\tau_1)\subseteq\mathfrak{D}(\tau_2)$; $D(\tau_1)\cap D(\tau_2)\neq\emptyset\Leftrightarrow\mathfrak{D}(\tau_1)\cap\mathfrak{D}(\tau_2)\neq\emptyset$; $Card(D(\tau_1)\cap D(\tau_2))=1\Leftrightarrow Card(\mathfrak{D}(\tau_1)\cap\mathfrak{D}(\tau_2))=1$.

Niech $D(\tau_1)\subseteq D(\tau_2)$. Rozważmy dwa przypadki: 1∘ *Card* $D(\tau_2)=1$: wtedy $\tau_1,\tau_2\in$**ZM**, gdyż z założenia *Card* $U>2$. Zatem bądź $d(\tau_1)=\emptyset$ bądź $d(\tau_1)=d(\tau_2)$. Stąd otrzymujemy bądź $\delta(\tau_1)=\emptyset$ bądź $\delta(\tau_1)=\{d(\tau_1)\}=\delta(\tau_2)$; 2∘ *Card* $D(\tau_2)\neq 1$: wtedy, jeżeli $X\in\mathfrak{D}(\tau_1)$, to $X\subseteq D(\tau_1)\subseteq D(\tau_2)$, więc $X\in\mathfrak{D}(\tau_2)$. Jeżeli zaś $\{X\}\in\mathfrak{D}(\tau_1)$, to $X\subseteq D(\tau_1)\subseteq$

$D(\tau_2)$, więc $\{X\}\in\mathfrak{D}(\tau_2)$. Odwrotnie, niech $\mathfrak{D}(\tau_1)\subseteq\mathfrak{D}(\tau_2)$. Jeżeli $D(\tau_1)=\emptyset$, to $D(\tau_1)\subseteq D(\tau_2)$. Jeżeli $D(\tau_1)\neq\emptyset$, to $D(\tau_1)\in\mathfrak{Z}\cup\{U\}$, gdyż albo $\tau_1\in\mathbb{ZM}$ albo $\tau_1=$'V'. Zatem w każdym z możliwych przypadków $D(\tau_1)\in\mathfrak{D}(\tau_1)$. Stąd $D(\tau_1)\in\mathfrak{D}(\tau_2)$, czyli $D(\tau_1)\subseteq D(\tau_2)$.

Niech $D(\tau_1)\cap D(\tau_2)\neq\emptyset$. Wtedy $D(\tau_1)\cap D(\tau_2)\in\mathfrak{D}(\tau_1)\cap\mathfrak{D}(\tau_2)$. Istotnie, rozważmy dwa przypadki: 1. *Card* $D(\tau_1)=1$ lub *Card* $D(\tau_2)=1$. Wtedy $\tau_1\in\mathbb{ZM}$ lub $\tau_2\in\mathbb{ZM}$. Stąd $d(\tau_1)=D(\tau_1)\cap D(\tau_2)$ lub $d(\tau_2)=D(\tau_1)\cap D(\tau_2)$. Zatem $\delta(\tau_1)=\{d(\tau_1)\}=\{D(\tau_1)\cap D(\tau_2)\}\subseteq\mathfrak{D}(\tau_2)$ lub $\delta(\tau_2)=\{d(\tau_2)\}=\{D(\tau_1)\cap D(\tau_2)\}\subseteq\mathfrak{D}(\tau_1)$; 2. *Card* $D(\tau_1)>1$ i *Card* $D(\tau_2)>1$. Jeśli $\tau_1\in\mathbb{ZM}$ i $\tau_2\in\mathbb{ZM}$, to $d(\tau_1)\cap d(\tau_2)\in\delta(\tau_1)\cap\delta(\tau_2)$. Jeśli $\tau_1\in\mathbb{ZM}$ i $\tau_2=$'V', to $d(\tau_1)\cap D(\tau_2)=d(\tau_2)\in\mathfrak{Z}$. Jeśli $\tau_1=$'V' i $\tau_2\in\mathbb{ZM}$, to $d(\tau_2)\cap D(\tau_1)=d(\tau_2)\in\mathfrak{Z}$. Jeśli $\tau_1=$'V'$=\tau_2$, to $D(\tau_1)\cap D(\tau_2)=U\in\{U\}$. Odwrotnie, niech $\mathfrak{D}(\tau_1)\cap\mathfrak{D}(\tau_2)\neq\emptyset$. Bierzemy dowolne $\mathfrak{u}$ należące do tego iloczynu. Jeśli $\mathfrak{u}\in\mathfrak{Z}\cup\{U\}$, to $\emptyset\neq\mathfrak{u}\subseteq D(\tau_1)\cap D(\tau_2)$. Jeśli $\mathfrak{u}\in\mathfrak{J}\cup\{\{U\}\}$, to dla pewnego $\mathfrak{v}\in\mathfrak{Z}\cup\{U\}$ mamy, $\emptyset\neq\mathfrak{v}\subseteq D(\tau_1)\cap D(\tau_2)$.

Niech dla pewnego $u_0\in U$, $\{u_0\}=D(\tau_1)\cap D(\tau_2)$. Z poprzedniego akapitu wynika, że wtedy $\{u_0\}\in\mathfrak{D}(\tau_1)\cap\mathfrak{D}(\tau_2)$. Pokażemy, że $\{\{u_0\}\}=\mathfrak{D}(\tau_1)\cap\mathfrak{D}(\tau_2)$. Istotnie, przypuśćmy, iż $\mathfrak{u}\in\mathfrak{D}(\tau_1)\cap\mathfrak{D}(\tau_2)$. Gdyby $\mathfrak{u}$ należało do $\mathfrak{J}\cup\{\{U\}\}$, to dla pewnego $\mathfrak{v}$ z $\mathfrak{Z}\cup\{U\}$ mielibyśmy $\mathfrak{v}\subseteq D(\tau_1)\cap D(\tau_2)$, przy czym $\mathfrak{v}$ byłoby zbiorem co najmniej dwuelementowym. Ponieważ jest to niemożliwe, więc $\mathfrak{u}\in\mathfrak{Z}\cup\{U\}$. Stąd $\emptyset\neq\mathfrak{u}\subseteq D(\tau_1)\cap D(\tau_2)$, więc $\mathfrak{u}=\{u_0\}$. Odwrotnie, niech *Card*$(\mathfrak{D}(\tau_1)\cap\mathfrak{D}(\tau_2))=1$. Z poprzedniego akapitu wynika, że $\mathfrak{D}(\tau_1)\cap\mathfrak{D}(\tau_2)\neq\emptyset$ pociąga $D(\tau_1)\cap D(\tau_2)\neq\emptyset$, a to zaś pociąga to, iż $D(\tau_1)\cap D(\tau_2)\in\mathfrak{D}(\tau_1)\cap\mathfrak{D}(\tau_2)$. Zbiór $D(\tau_1)\cap D(\tau_2)$ musi być jednoelementowy, gdyż w przeciwnym wypadku również $\{D(\tau_1)\cap D(\tau_2)\}$ należałoby do $\mathfrak{D}(\tau_1)\cap\mathfrak{D}(\tau_2)$, co jest sprzeczne z założeniem.

b) W przypadku $k=0$ bierzemy $\mathfrak{U}:=\{U,\{U\}\}$ oraz $\delta(\mathcal{S}):=\emptyset$ dla $\mathcal{S}\in\mathbb{ZM}$. Reszta dowodu jest oczywista.

Ad 4) Niech $\mathfrak{Z}$ i $\mathfrak{Z}$ będą określone jak w *3a)*. W przypadku, gdy $\mathfrak{Z} = \emptyset$ połóżmy $\mathfrak{U}:=\{\emptyset\}$, zaś w innym przypadku $\mathfrak{U}:=\mathfrak{Z}\cup\mathfrak{Z}$. Funkcję δ określamy podobnie jak w *3a)* biorąc jedynie X z $\mathfrak{Z}\cup\mathfrak{Z}$. Reszta dowodu jak w *3a)*, z oczywistymi uproszczeniami.

Ad 5) Załóżmy, że $Card\ U >\frac{1}{2}\ k(k+3) + 2$ (czyli $Card\ U> 2$), gdy jest inaczej, kładziemy $\mathfrak{m}:= \mu$.

a) Przypadek $k > 0$. Niech $\mathfrak{Z}$ będzie określone jak w *3a* oraz przyjmijmy

$$\mathfrak{K}:=\{\ \{d(\mathcal{S}_i)\}\ :\ 1\le i\le k \text{ oraz } Card\ d(\mathcal{S}_i)>1\}$$

Niech $\mathfrak{U}:=\mathfrak{Z} \cup \mathfrak{K} \cup \{U,\{U\}\}$ oraz określmy na $\mathbf{ZM}$ funkcję $\delta(\mathcal{S}):=\{X\in\mathfrak{Z}\cup\{U\}\ :\ X\subseteq d(\mathcal{S})\} \cup \{\ \{X\}\in\mathfrak{K}\cup\{\{U\}\}\ :\ X\subseteq d(\mathcal{S})\}$. Oczywiście, $Card\ \mathfrak{U} \le \frac{1}{2}k(k+3)+2$ oraz $\delta(\mathcal{S})=\{d(\mathcal{S})\} \Leftrightarrow Card\ d(\mathcal{S}) = 1$.

Motywując podobnie jak *ad* 1), wystarczy pokazać, że $D(\tau_1)\subseteq D(\tau_2)\Leftrightarrow \mathfrak{D}(\tau_1)\subseteq\mathfrak{D}(\tau_2)$ (dla podformuł $\ulcorner\tau_1 a\tau_2\urcorner$); $D(\tau_1)\cap D(\tau_2)\ne \emptyset \Leftrightarrow \mathfrak{D}(\tau_1) \cap \mathfrak{D}(\tau_2) \ne \emptyset$ (dla podformuł $\ulcorner\tau_1 i\tau_2\urcorner$); $Card\ D(\tau) = 1 \Leftrightarrow Card\ \mathfrak{D}(\tau) = 1$ (razem z pierwszą dla podformuł $\ulcorner\tau_1\varepsilon\tau_2\urcorner$).

Dwie pierwsze równowazności dowodzi się analogicznie jak w *ad* 3). Udowodnijmy zatem trzecią.

Niech $Card\ D(\tau)=1$. Podobnie jak w *3a*, pokazujemy, że wtedy $Card\ \mathfrak{D}(\tau) = 1$. Odwrotnie, niech $Card\ \mathfrak{D}(\tau) = 1$. Wtedy $D(\tau)\in\mathfrak{D}(\tau)$. Zbiór $D(\tau)$ musi być jednoelementowy, gdyż w przeciwnym wypadku również $\{D(\tau)\}$ należałoby do $\mathfrak{D}(\tau)$, co jest sprzeczne z założeniem.

b) W przypadku $k = 0$ bierzemy $\mathfrak{U}:=\{U,\{U\}\}$ oraz $\delta(\mathcal{S}):= \emptyset$ dla $\mathcal{S}\in\mathbf{ZM}$. Reszta dowodu jest oczywista.

Ad 6) W *5a)* dokonujemy analogicznej zmiany jak w 4), w stosunku do *3a)*.

Ad 9) *a)* przypadek $k >0$. Niech $\mathfrak{Z}$ będzie określone jak w *3a* oraz przyjmijmy, że $\mathfrak{U}:= \mathfrak{Z}\cup\{U\}$. Funkcję δ określamy na $\mathbf{ZM}$ warunkiem $\delta(\mathcal{S}):=\{u\in\mathfrak{U} : u\subseteq d(\mathcal{S})\}$. Reszta dowodu podobnie jak w 3a).

b) przypadek $k = 0$. Bierzemy $\mathfrak{U}:=\{U\}$ i $\delta(\mathcal{S}):=\emptyset$.

Ad 10) W 9*a)* dokonujemy analogicznej zmiany jak w 4), w stosunku do 3*a*). □ [11]

Z powyższego lematu łatwo wyprowadzić w standardowy sposób (np. [*9*], s.162) rozstrzygalność odpowiednich zbiorów $TAUT(\Sigma^S)$. W ogólnym przypadku, rozstrzygalność zbioru $TAUT(\Sigma^S)$ wynika z przypadku 1 w powyższym lemacie. Istotnie, $TAUT(\Sigma^S) = TAUT(\Sigma) \cap \Sigma^S$, zaś zbory $TAUT(\Sigma)$ i Σ^S są rozstrzygalne.

Część II.

1. WĘŻSZY MONADYCZNY RACHUNEK PREDYKATÓW Z IDENTYCZNOŚCIĄ.

Niech $\mathbb{VAR}$:={'x','y','x_1','x_2',...} będzie przeliczalnym zbiorem zmiennych indywiduowych, $\mathbb{P}$:={'f','g','f_1','f_2',...} - zbiorem zmiennych reprezentujących jednoargumentowe predykaty, '=' - predykatem identyczności, '∀' - kwantyfikatorem ogólnym oraz '∃' - kwantyfikatorem szczegółowym. Poza wymienionymi wyżej symbolami, w formułach węższego monadycznego rachunku predykatów z identycznością będą występować spójniki zdaniowe i nawiasy używane w części I. Jako zmiennych syntaktycznych przebiegających zbiór $\mathbb{VAR}$ używać będziemy liter 'α' oraz 'ψ', zaś dla zbioru $\mathbb{P}$ - litery 'ℓ'.

Zbiór $\mathbf{MRP}_=$ formuł węższego monadycznego rachunku predykatów z identycznością jest najmniejszym zbiorem spełniającym poniższe warunki:

- jeżeli $\alpha\in\mathbb{VAR}$ i $\ell\in\mathbb{P}$, to $\ulcorner\ell\alpha\urcorner\in\mathbf{MRP}_=$,
- jeżeli $\alpha\in\mathbb{VAR}$ i $\varphi\in\mathbf{MRP}_=$, to $\ulcorner\forall\alpha\varphi\urcorner\in\mathbf{MRP}_=$ oraz $\ulcorner\exists\alpha\varphi\urcorner\in\mathbf{MRP}_=$,
- jeżeli $\varphi\in\mathbf{MRP}_=$, to $\ulcorner\neg\varphi\urcorner\in\mathbf{MRP}_=$,

- jeżeli $\varphi,\psi\in\mathbf{MRP}_=$ i $\S\in\{`\wedge', `\vee', `\rightarrow' `\equiv'\}$, to $\ulcorner(\varphi\S\psi)\urcorner\in\mathbf{MRP}_=$.

Wartościowaniem zmiennych z $\mathbb{VAR}$ w zbiorze U jest dowolna funkcja określona na $\mathbb{VAR}$ i przyjmująca wartości w zbiorze U. Modelem dla zmiennych z $\mathbb{P}$ jest dowolna para $m=\langle U,d\rangle$, w której U jest niepustym zbiorem, zaś d jest funkcją przyporządkowującą każdej zmiennej z $\mathbb{P}$ jakiś podzbiór zbioru U. W sposób indukcyjny definiujemy zbiór $SAT_m(v,\mathbf{MRP}_=)$ formuł z $\mathbf{MRP}_=$ spełnionych w modelu $m=\langle U,d\rangle$ przez wartościowanie w zbiorze U:

$$\ulcorner \ell\alpha\urcorner\in SAT_m(v,\mathbf{MRP}_=) \Leftrightarrow v(\alpha)\in d(\ell)$$

$$\ulcorner \alpha=\psi\urcorner\in SAT_m(v,\mathbf{MRP}_=) \Leftrightarrow v(\alpha)=v(\psi)$$

dla pozostałych formuł - używając klasycznej interpretacji spójników zdaniowych i kwantyfikatorów.

Zbiór $SAT_m(\mathbf{MRP}_=)$składa się z tych i tylko tych formuł, które należą do $SAT_m(v,\mathbf{MRP}_=)$ dla każdego wartościowania v.

Formuła φ z $\mathbf{MRP}_=$ jest tautologią wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego modelu m, $\varphi\in SAT_m(\mathbf{MRP}_=)$. Niech $TAUT(\mathbf{MRP}_=)$ będzie zbiorem tautologii z $\mathbf{MRP}_=$.

2. ROZSTRZYGALNOŚĆ ZBIORU $TAUT(\mathbf{MRP}_=)$. W dowolnej formule z $\mathbf{MRP}_=$ występuje k zmiennych z $\mathbb{P}$ ($k\geq 0$) oraz l zmiennych z $\mathbb{VAR}$, których choć jeden egzemplarz jest argumentem predykatu '=' ($l \geq 0$). Oczywiście, $k+l > 0$. Ponadto, $l= 0 \Leftrightarrow$ w φ nie występuje predykat '=', oraz $k = 0 \Leftrightarrow \varphi$ jest formułą elementarnej teorii identyczności. Udowodnijmy następujący lemat:

LEMAT 2. Niech $\varphi\in\mathbf{MRP}_=$, zaś k oraz l będą liczbami opisanymi wyżej. Połóżmy $l^\circ:=\max(1,l)$. Wtedy

$\varphi\in TAUT(\mathbf{MRP}_=) \Leftrightarrow$ każdy model o co najwyżej $l^\circ\cdot 2^k$ elementowym uniwersum spełnia formułę φ.

UWAGA W [1] podano oszacowanie górne równe $r\cdot 2^k$, gdzie r to ilość wszystkich zmiennych z $\mathbb{VAR}$ występujących w formule φ.

Dokładniej, udowodniono twierdzenie 1, które w przyjętej przez nas symbolice głosi: jeśli jakaś formuła domknięta jest spełniona w jakimś modelu, to jest również ona spełniona w pewnym modelu, którego uniwersum ma co najwyżej $r\cdot 2^k$ elementów. Z twierdzenia tego w łatwy sposób można wyprowadzić odpowiednik naszego lematu 2 (liczba $r\cdot 2^k$ zamiast liczby $l^\circ\cdot 2^k$). Istotnie, niech φ będzie dowolną formułą, zaś φ^c jej dowolnym domknięciem. Wtedy otrzymujemy: $\varphi\in TAUT(\mathbf{MRP}_=)$ $\Leftrightarrow$ $\varphi^c\in TAUT(\mathbf{MRP}_=)$ $\Leftrightarrow$ $\ulcorner\neg\varphi^c\urcorner$ nie jest spełniona w żadnym modelu $\Leftrightarrow$ w żadnym modelu o co najwyżej $r\cdot 2^k$ elementowym uniwersum nie jest spełniona formuła $\ulcorner\neg\varphi^c\urcorner$ $\Leftrightarrow$ w każdym modelu o co najwyżej $r\cdot 2^k$ elementowym uniwersum jest spełniona formuła φ^c $\Leftrightarrow$ w każdym modelu o co najwyżej $r\cdot 2^k$ elementowym uniwersum jest spełniona formuła φ.

DOWÓD LEMATU 2. "$\Rightarrow$" z definicji tautologii.

"$\Leftarrow$"[12] Weźmy dowolną formułę spełniającą założenia lematu oraz niech $\ell_1,\dots,\ell_k$ ($k\geq 0$) będą różnymi zmiennymi z $\mathbb{P}$ występującymi w φ, zaś $x_1,\dots,x_l$ ($l\geq 0$) będą różnymi zmiennymi z $\mathbb{VAR}$ występującymi w φ jako argumenty stałej '='.

Dla dowolnie wybranego modelu $m=\langle U,d\rangle$ utworzymy model $\mathfrak{m}=\langle\mathfrak{U},\delta\rangle$ taki, że jego uniwersum $\mathfrak{U}$ ma moc co najwyżej $l^\circ\cdot 2^k$ oraz spełniony jest warunek:

$$\text{jeśli } \varphi\in SAT_{\mathfrak{m}}(\mathbf{MRP}_=), \text{ to } \varphi\in SAT_m(\mathbf{MRP}_=) \qquad (*)$$

Z dowolności modelu m otrzymamy wtedy dowodzoną tezę.

W zbiorze U^2 określamy relację równoważności $\approx$ w następujący sposób:

- jeżeli $k = 0$, to $\approx$ jest relacją pełną, tj. równą U^2,
- jeżeli $k > 0$, to dla dowolnych $u,v\in U$

$$u\approx v \Leftrightarrow \text{dla każdego } i=1,\dots,k\colon u\in d(\ell_i) \Leftrightarrow v\in d(\ell_i)$$

Oczywiście, relacja $\approx$ dzieli zbiór U na niepuste i parami rozłączne klasy abstrakcji $\mathfrak{C}_1,\ldots,\mathfrak{C}_n$, gdzie $1\le n\le 2^k$. W przypadku $k=0$ mamy tylko jedną klasę abstrakcji $\mathfrak{C}_1=U$, w przypadku zaś $k>0$ klasa abstrakcji $\mathfrak{C}_j$ ($1\le j\le n$) jest odpowiednią kombinacją k elementowego iloczynu zbiorów, z których każdy jest bądź postaci $d(\ell_i)$ bądź postaci $U\setminus d(\ell_i)$ ($1\le i\le k$). Mamy, oczywiście, 2^k kombinacji takich iloczynów. Odrzucając ewentualne puste iloczyny, otrzymamy $n\le 2^k$. Przyjmując $|u|_\approx:=\{v\in U : v\approx u\}$, dostajemy $\{|u|_\approx : u\in U\}=\{\mathfrak{C}_1,\ldots,\mathfrak{C}_n\}$, przy czym dla dowolnego $u\in U$: $u\in\mathfrak{C}_j \Leftrightarrow |u|_\approx=\mathfrak{C}_j$. Wprost z definicji relacji $\approx$ otrzymujemy dla $1\le i\le k$ oraz $u\in U$:

$$u\in d(\ell_i) \Leftrightarrow |u|_\approx\subseteq d(\ell_i) \Leftrightarrow |u|_\approx \cap d(\ell_i)\neq\emptyset$$

Z modelu $m=\langle U,d\rangle$ tworzymy model $\mathfrak{m}=\langle\mathfrak{U},\mathfrak{d}\rangle$ w następujący sposób. Dla każdego $1\le j\le n$ połóżmy $l_j:=\min(l^\circ,Card\ \mathfrak{C}_j)-1$. Wybierzmy w dowolny sposób podzbiór $\mathfrak{C}^r_j$ zbioru $\mathfrak{C}_j$, złożony z l_j elementów ($\mathfrak{C}^r_j$ to zbiór l_j różnych reprezentantów zbioru $\mathfrak{C}_j$)[13]. Dla $1\le j\le n$ połóżmy $\mathfrak{U}_j:=\{\mathfrak{C}_j\}\cup\mathfrak{C}^r_j$. Oczywiście, $Card\ \mathfrak{U}_j=\min(l^\circ,Card\ \mathfrak{C}_j)$ oraz zbiory $\mathfrak{U}_1,\ldots,\mathfrak{U}_n$ są parami rozłączne. Przyjmijmy $\mathfrak{U}:=\mathfrak{U}_1\cup\ldots\cup\mathfrak{U}_n$. Oczywiście, $Card\ \mathfrak{U}\le l^\circ\cdot 2^k$.

Funkcję denotacji $\mathfrak{d}$ określamy na $\mathbb{P}$ następującym wzorem:

$$\mathfrak{d}(\ell):=\{\mathfrak{u}\in\mathfrak{U} : \mathfrak{u}\subseteq d(\ell) \text{ bądź } \mathfrak{u}\in d(\ell)\}$$

Projekcją ze zbioru U na zbiór $\mathfrak{U}$ nazywamy każdą funkcję F z U na $\mathfrak{U}$ spełniającą warunek: dla $u\in U$ oraz $j=1,\ldots,n$

$$u\in\mathfrak{C}_j \Leftrightarrow F(u)\in\mathfrak{U}_j$$

Niech $Proj$ będzie zbiorem wszystkich projekcji z U na $\mathfrak{U}$ [14]. Zbiór ten nie jest pusty, gdyż $Card\ \mathfrak{U}_j\le Card\ \mathfrak{C}_j$ dla $j=1,\ldots,n$.

Weźmy dowolne wartościowanie v z $U^{\mathbb{VAR}}$. Zauważmy, że $Card\ \mathfrak{U}\ge Card\ v(\{x_1,\ldots,x_l\})$. Ponadto, dla każdego $j=1,\ldots,n$ oraz dowolnego $X\subseteq v(\{x_1,\ldots,x_l\})$ zachodzi:

$$\text{jeśli } X\subseteq\mathfrak{C}_j\text{, to } Card\ X\le Card\ \mathfrak{U}_j \qquad (\dagger)$$

gdyż $Card\ X\le Card\ \mathfrak{C}_j$ oraz $Card\ X\le l$, czyli $Card\ X\le\min(l,Card$

$\mathfrak{C}_j) \le Card\ \mathfrak{U}_j$. Niech $Proj^V$ będzie zbiorem tych i tylko tych projekcji z $Proj$, które są różnowartościowe na zbiorze $v(\{x_1,\dots,x_l\})$. Na mocy warunku (†) wiemy, że istnieją takie projekcje [15].

Dla dowolnych $v\in U^{\mathbf{VAR}}$ i $F\in Proj^V$ określamy wartościowanie v^F należące do $\mathfrak{U}^{\mathbf{VAR}}$: dla $x\in\mathbf{VAR}$

$$v^F(x) := \begin{cases} F(v(x)) & \text{, gdy } x\in\{x_1,\dots,x_l\} \\ |v(x)|_{\approx} & \text{, w przeciwnym przypadku} \end{cases}$$ [16]

Indukcyjnie po podformułach formuły φ udowodnimy, że dla dowolnych $v\in U^{\mathbf{VAR}}$ i $F\in Proj^V$:

$$\varphi\in SAT_m(v,\mathbf{MRP}_=) \Leftrightarrow \varphi\in SAT_{\mathfrak{m}}(v^F,\mathbf{MRP}_=) \qquad (**)$$

Udowodnijmy wyjściowe kroki indukcyjne, gdy podformuła ψ formuły φ jest atomowa:

1) (przy $k > 0$) załóżmy, że $\psi = \ulcorner \ell_i x \urcorner$ dla $i=1,\dots,k$. Wtedy dla dowolnych $v\in U^{\mathbf{VAR}}$ i $F\in Proj^V$ zachodzi bądź $v^F(x)=|v(x)|_{\approx}$ bądź $v^F(x)= F(v(x))$. Zatem $v(x)\in d(\ell_i) \Leftrightarrow v^F(x)\subseteq d(\ell_i)$ bądź $v^F(x)\in d(\ell_i) \Leftrightarrow v^F(x)\in\delta(\ell_i)$. Stąd $\psi\in SAT_m(v,\mathbf{MRP}_=) \Leftrightarrow \psi\in SAT_{\mathfrak{m}}(v^F,\mathbf{MRP}_=)$.

2) (przy $l > 0$) załóżmy, że $\psi = \ulcorner x_i = x_j \urcorner$ dla $i,j= 1,\dots,l$. Wtedy $v(x_i)=v(x_j) \Leftrightarrow F(v(x_i))= F(v(x_j)) \Leftrightarrow v^F(x_i)= v^F(x_j)$ dla dowolnych $v\in U^{\mathbf{VAR}}$ i $F\in Proj^V$, gdyż F jest funkcją różnowartościową na zbiorze $v(\{x_1,\dots,x_l\})$.

Załóżmy teraz, że warunek (**) zachodzi dla dowolnych podformuł α oraz β formuły ψ, która jest znowu podformułą formuły φ. Rozważmy następujące przypadki:

3) $\psi = \ulcorner\neg\alpha\urcorner$ oraz $v\in U^{\mathbf{VAR}}$ i $F\in Proj^V$. Wtedy $\ulcorner\neg\alpha\urcorner\in SAT_m(v,\mathbf{MRP}_=) \Leftrightarrow \alpha\notin SAT_m(v,\mathbf{MRP}_=) \Leftrightarrow \alpha\notin SAT_{\mathfrak{m}}(v,\mathbf{MRP}_=) \Leftrightarrow \ulcorner\neg\alpha\urcorner\in SAT_{\mathfrak{m}}(v^F,\mathbf{MRP}_=)$.

4) $\psi = \ulcorner(\alpha\wedge\beta)\urcorner$, $v\in U^{\mathbf{VAR}}$ i $F\in Proj^V$. Wtedy $\ulcorner(\alpha\wedge\beta)\urcorner\in SAT_m(v,\mathbf{MRP}_=) \Leftrightarrow \alpha\in SAT_m(v,\mathbf{MRP}_=)$ i $\beta\in SAT_m(v,\mathbf{MRP}_=) \Leftrightarrow \alpha\in SAT_{\mathfrak{m}}(v^F,\mathbf{MRP}_=)$ i $\beta\in SAT_{\mathfrak{m}}(v^F,\mathbf{MRP}_=) \Leftrightarrow \ulcorner(\alpha\wedge\beta)\urcorner\in SAT_{\mathfrak{m}}(v^F,\mathbf{MRP}_=)$.

5)-7) podobnie pokazujemy, gdy ψ jest alternatywą, implikacją lub równoważnością.

8) $\psi = \ulcorner\forall\alpha\alpha\urcorner$. Weźmy dowolne $v \in U^{\mathrm{VAR}}$ i $F \in Proj^{V}$. Załóżmy, że $\ulcorner\forall\alpha\alpha\urcorner \in SAT_{m}(v^{F},\mathbf{MRP}_{=})$, tzn. dla każdego wartościowania $\omega \in \mathfrak{U}^{\mathrm{VAR}}$ różniącego się od v^{F} co najwyżej na α mamy $\alpha \in SAT_{m}(\omega,\mathbf{MRP}_{=})$. Weźmy teraz dowolne wartościowanie $w \in U^{\mathrm{VAR}}$ różniące się od v co najwyżej na α, tzn. dla $\psi \neq \alpha$ mamy $v(\psi) = w(\psi)$. Zatem dla każdego $\psi \neq \alpha$, $v^{F}(\psi) = w^{F}(\psi)$, czyli v^{F} różni się od w^{F} co najwyżej na α. W takim razie $\alpha \in SAT_{m}(w^{F},\mathbf{MRP}_{=})$. Stąd i z przyjętego założenia indukcyjnego mamy $\alpha \in SAT_{m}(w,\mathbf{MRP}_{=})$, co wobec dowolności wartościowania w daje nam $\ulcorner\forall\alpha\alpha\urcorner \in SAT_{m}(v,\mathbf{MRP}_{=})$.

Odwrotnie, załóżmy, że $\ulcorner\forall\alpha\alpha\urcorner \in SAT_{m}(v,\mathbf{MRP}_{=})$. Weźmy teraz dowolne wartościowanie $\omega \in \mathfrak{U}^{\mathrm{VAR}}$ różniące się od v^{F} co najwyżej na α. Pokażemy, że $\alpha \in SAT_{m}(\omega,\mathbf{MRP}_{=})$, co wobec dowolności ω, znaczyć będzie, że $\ulcorner\forall\alpha\alpha\urcorner \in SAT_{m}(v^{F},\mathbf{MRP}_{=})$. Zauważmy, że skoro F jest odwzorowaniem «na», więc istnieje takie $u_0 \in U$, że $F(u_0) = \omega(\alpha)$. Wprowadźmy poniższe wartościowanie v_0 należące do U^{VAR}:

$$v_0(\psi) := \begin{cases} v(\psi) & \text{, gdy } \psi \neq \alpha \\ u_0 & \text{, gdy } \psi = \alpha \end{cases}$$

Dla $\psi \neq \alpha$ mamy, $\omega(\psi) = v^{F}(\psi) = v_0^{F}(\psi)$ oraz $\omega(\alpha) = F(u_0) = F(v_0(\alpha)) = v_0^{F}(\alpha)$. Zatem $\omega = v_0^{F}$. Ponieważ v_0 różni się od v co najwyżej na α, więc z założenia, iż $\ulcorner\forall\alpha\alpha\urcorner \in SAT_{m}(v,\mathbf{MRP}_{=})$ mamy, $\alpha \in SAT_{m}(v_0,\mathbf{MRP}_{=})$. Stąd i z przyjętego założenia indukcyjnego mamy, $\alpha \in SAT_{m}(\omega,\mathbf{MRP}_{=})$.

9) $\psi = \ulcorner\exists\alpha\alpha\urcorner$. Weźmy dowolne $v \in U^{\mathrm{VAR}}$ i $F \in Proj^{V}$. Załóżmy, że $\ulcorner\exists\alpha\alpha\urcorner \in SAT_{m}(v^{F},\mathbf{MRP}_{=})$, tzn. istnieje wartościowanie $\omega \in \mathfrak{U}^{\mathrm{VAR}}$ różniące się od v^{F} co najwyżej na α takie, że $\alpha \in SAT_{m}(\omega,\mathbf{MRP}_{=})$. Dla każdego $\psi \neq \alpha$ mamy $\omega(\psi) = v^{F}(\psi)$. Ponieważ F jest odwzorowaniem «na», więc istnieje takie $u_0 \in U$, że $F(u_0) = \omega(\alpha)$. Zatem dla wartościowania v_0 zbudowanego w analogiczny sposób jak w *8)*, różniącego się od v co najwyżej na x, mamy $v_0^F = \omega$. Zatem $\alpha \in SAT_m(v_0^F, \mathrm{MRP}_=)$. Stąd na mocy założenia indukcyjnego mamy $\alpha \in SAT_m(v_0, \mathrm{MRP}_=)$. Ponieważ v_0 różni się od v co najwyżej na x, więc $\ulcorner \exists x\alpha \urcorner \in SAT_m(v, \mathrm{MRP}_=)$.

Odwrotnie, załóżmy, że $\ulcorner \exists x\alpha \urcorner \in SAT_m(v, \mathrm{MRP}_=)$, tzn. istnieje wartościowanie $w \in U^{\mathbb{VAR}}$ różniące się od v co najwyżej na x takie, że $\alpha \in SAT_m(w, \mathrm{MRP}_=)$. Wtedy v^F różni się od w^F co najwyżej na x, zaś z założenia indukcyjnego mamy $\alpha \in SAT_m(w^F, \mathrm{MRP}_=)$. Zatem $\ulcorner \exists x\alpha \urcorner \in SAT_m(v^F, \mathrm{MRP}_=)$.

Z (**) otrzymujemy (*). Załóżmy, że $\varphi \in SAT_m(\mathrm{MRP}_=)$ oraz weźmy dowolne $v \in U^{\mathbb{VAR}}$ i $F \in Proj^V$. Wtedy $v^F \in \mathbb{U}^{\mathbb{VAR}}$, więc $\varphi \in SAT_m(v^F, \mathrm{MRP}_=)$. Zatem, na mocy (**), $\varphi \in SAT_m(v, \mathrm{MRP}_=)$. Z dowolności v otrzymujemy, że $\varphi \in SAT_m(\mathrm{MRP}_=)$[17]. □

Z powyższego lematu łatwo wyprowadzić w standardowy sposób (np. [9], s.162) rozstrzygalność zbioru $TAUT(\mathrm{MRP}_=)$.

3. **PORÓWNANIE ZBIORÓW** $TAUT(\Sigma)$ **I** $TAUT(\mathrm{MRP}_=)$. Niech $^\circ$ będzie dowolną bijekcją z $\mathbb{ZM}$ na $\mathbb{P}$. Wprowadźmy formalne działanie $\otimes : \mathsf{T} \times \mathbb{VAR} \to \mathrm{MRP}_=$ w następujący sposób rekurencyjny: dla $\mathcal{S} \in \mathbb{ZM}$, τ, $\tau_1, \tau_2 \in \mathsf{T}$, $x \in \mathbb{VAR}$

- $\mathcal{S} \otimes x = \ulcorner \mathcal{S}^\circ x \urcorner$
- $`\mathbf{V}' \otimes x = \ulcorner x = x \urcorner$
- $\ulcorner \tau' \urcorner \otimes x = \ulcorner \neg \tau \otimes x \urcorner$
- $\ulcorner (\tau_1 + \tau_2) \urcorner \otimes x = \ulcorner (\tau_1 \otimes x \vee \tau_2 \otimes x) \urcorner$
- $\ulcorner (\tau_1 \cdot \tau_2) \urcorner \otimes x = \ulcorner (\tau_1 \otimes x \wedge \tau_2 \otimes x) \urcorner$

W celu skrócenia sformułowań, przyjmijmy tzw. metajęzykową definicję kwantyfikatora jednostkowego mówiącą, że $\ulcorner \exists ! x\varphi(x) \urcorner$ jest skrótem formuły $\ulcorner \exists x\varphi(x) \wedge \forall x \forall y ((\varphi(x) \wedge \varphi(y)) \to x = y) \urcorner$ ($x \neq y$ i nie występuje dodatkowe ich wiązanie przez kwantyfikatory).

Wykorzystując działanie $\otimes$, wprowadźmy "transkrypcję Brentano"[18] formuł z Σ na formuły z $\mathbf{MRP}_{=}$. Przy ustalonym α z **VAR**, na zbiorze Σ określamy w sposób rekurencyjny funkcję **t** przyjmującą wartości w zbiorze $\mathbf{MRP}_{=}$: dla $\tau_1,\tau_2\in\mathrm{T}$ oraz $\sigma_1,\sigma_2\in\Sigma$

- $\mathbf{t}(\ulcorner\tau_1 \mathbf{a} \tau_2\urcorner) = \ulcorner\forall\alpha(\tau_1\otimes\alpha \rightarrow \tau_2\otimes\alpha)\urcorner$
- $\mathbf{t}(\ulcorner\tau_1 \mathbf{i} \tau_2\urcorner) = \ulcorner\exists\alpha(\tau_1\otimes\alpha \wedge \tau_2\otimes\alpha)\urcorner$
- $\mathbf{t}(\ulcorner\tau_1 \varepsilon \tau_2\urcorner) = \ulcorner\exists!\alpha\tau_1\otimes\alpha \wedge \exists\alpha(\tau_1\otimes\alpha \wedge \tau_2\otimes\alpha)\urcorner$
- $\mathbf{t}(\ulcorner\tau_1 \mathbf{i!} \tau_2\urcorner) = \ulcorner\exists!\alpha(\tau_1\otimes\alpha \wedge \tau_2\otimes\alpha)\urcorner$
- $\mathbf{t}(\ulcorner\neg\sigma_1\urcorner) = \ulcorner\neg\mathbf{t}(\sigma_1)\urcorner$
- $\mathbf{t}(\ulcorner(\sigma_1 \S\, \sigma_2)\urcorner) = \ulcorner(\mathbf{t}(\sigma_1)\S\, \mathbf{t}(\sigma_2))\urcorner$ dla $\S\in\{`\wedge' `\vee' `\rightarrow' `\equiv'\}$

Niech $\mu=\langle U,d\rangle$ będzie modelem dla zmiennych z **ZM**, a $\mu^{\circ}=\langle U,d^{\circ}\rangle$ modelem dla zmiennych z **P** takim, że $d^{\circ}(\mathcal{S})=d(\mathcal{S})$. Wtedy zachodzi stwierdzenie:

STWIERDZENIE dla dowolnego $\sigma\in\Sigma$:

a) $\sigma\in SAT_{\mu}(\Sigma) \Leftrightarrow \mathbf{t}(\sigma)\in SAT_{\mu^{\circ}}(\mathbf{MRP}_{=})$

b) $\sigma\in TAUT(\Sigma) \Leftrightarrow \mathbf{t}(\sigma)\in TAUT(\mathbf{MRP}_{=})$. □

Zauważmy, że z powyższego stwierdzenia oraz z rozstrzygalności zbioru $TAUT(\mathbf{MRP}_{=})$ wynika rozstrzygalność zbioru $TAUT(\Sigma)$, gdyż funkcja **t** jest podana w sposób efektywny[19]. Z rozstrzygalności zaś $TAUT(\Sigma)$ wynika rozstrzygalność poszczególnych zbiorów $TAUT(\Sigma^{S})$.

Na koniec zauważmy, że z powyższego stwierdzenia i z lematu 2 wynikają przypadki 1) i 7) lematu 1. Istotnie, w przypadku 1), jeśli σ z Σ ma k zmiennych z **ZM** ($k\geq 0$), to $\mathbf{t}(\sigma)$ jest formułą domkniętą mającą k zmiennych z **P** oraz co najwyżej dwie zmienne z **VAR** [20], więc tylko one mogą być argumentami predykatu '='. Stąd w lemacie 2, dla $\mathbf{t}(\sigma)$ mamy $l^{\circ}\leq 2$. W przypadku 7) zaś, jeśli stała '**V**' nie występuje w σ, to w $\mathbf{t}(\sigma)$ nie występuje w ogóle predykat identyczności. Jeżeli zaś w σ występuje '**V**', to w $\mathbf{t}(\sigma)$ występuje predykat identyczności tylko w tautologicznej podformule $\ulcorner\alpha = \alpha\urcorner$[21]. Stąd w lemacie 2 dla $t(\sigma)$ mamy $l^{\circ} = 1$ $(l = 0,1)$.

BIBLIOGRAFIA

[1] Boolos G., Jeffrey R., *Computability and Logic*, Londyn 1974.

[2] Jaśkowski S., *O interpretacjach zdań kategorycznych Arystotelesa w rachunku predykatów*, Studia Societatis Scientiarum Toruniensis, vol.II, nr 3 (1950), s. 77-90.

[3] Jerszow J. L., *Problemy razrieszimosti i konstruktiwnyje modieli*, Moskwa 1980.

[4] Kotarbiński T., *Elementy teorii poznania, logiki formalnej i metodologii nauk*, wydanie II, Wrocław 1961.

[5] Krajewski S., *Rozstrzygalność* [w:] *Logika formalna. Zarys encyklopedyczny*, red. W. Marciszewski, Warszawa 1987, s. 140-143.

[6] Küng G., *Systemy Leśniewskiego* [w:] *Logika formalna. Zarys encyklopedyczny*, red. W. Marciszewski, Warszawa 1987, s. 397-405.

[7] *Mała encyklopedia logiki*, red. W. Marciszewski, Wrocław 1970.

[8] Pietruszczak A., *Bezkwantyfikatorowy rachunek nazw. Systemy i ich metateoria*, Toruń 1991.

[9] Pogorzelski W. A., *Klasyczny rachunek kwantyfikatorów. Zarys teorii*, Warszawa 1981.

PRZYPISY

[1] Zbiór formuł $\mathbf{MRP}_{=}$ można przykładowo «zanurzyć» w zbiór formuł monadycznego rachunku predykatów drugiego rzędu, w któ-

rym identyczność jest definiowana za pomocą kwantyfikatorów wiążących zmienne predykatowe. Rozstrzygalność tego drugiego rachunku dowiódł Skolem w 1919 r., stosując metodę eliminacji kwantyfikatorów ([5], s. 141). Znane są jednak trudności z interpretacją kwantyfikatorów wiążących zmienne predykatowe.

Inne dowody rozstrzygalności **MRP**$_=$ można znaleźć np. w [1] (s. 250-254) i w [3] (s. 275-278).

[2] Dowód lematu 2 będzie uogólnieniem analogicznego dowodu lematu dla węższego monadycznego rachunku predykatów bez identyczności, podanego w [9] (s. 161). Innym szczególnym przypadkiem dowodu lematu 2 jest dowód lematu, odpowiedniego dla rozstrzygalności elementarnej teorii identyczności.

[3] Uważamy, że zmienne te reprezentują (w sensie: «stoją w miejscu») nazwy *generalne* ([7], s. 183). Można również przyjąć, że reprezentują one wszystkie nazwy (patrz np. [6], [8]).

[5] Moglibyśmy również rozszerzyć zbiór stałych o symbole '**a***', '**o**','**e**','**e***','**≐**','**ex**','**=**','**ex!**' oraz '**sol**' reprezentujące odpowiednio funktory zdaniotwórcze: 'każde...jest...' rozumiany mocno, 'pewne...nie jest...', 'żadne...nie jest...' rozumiany słabo, 'żadne...nie jest...' rozumiany mocno, 'jedynie wszelkie...jest...' (zdania równości zakresowej; [4], [6], [8]), 'istnieje co najmniej jedno...', '...jest tym samym przedmiotem co...' (zdania identycznościowe Leśniewskiego), 'istnieje dokładnie jedno...' oraz 'co najwyżej, istnieje jedno...'. Nie uczyniliśmy tego, gdyż nie wniosłoby to nic nowego do naszych wyników, lecz jedynie skomplikowałoby sformułowania.

Nie przyjęliśmy metajęzykowej definicji, traktującej $\ulcorner\tau_1 \mathbf{i} \tau_2\urcorner$ jako skrót formuły $\ulcorner\neg\tau_1 \mathbf{a} \tau_2'\urcorner$ (*resp.* $\ulcorner\tau_1 \varepsilon \tau_2\urcorner$ jako skrót formuły $\ulcorner(\tau_1 \mathbf{i!} \tau_1 \wedge \tau_1 \mathbf{i!} \tau_2)\urcorner$; *resp.* $\ulcorner(\tau_1 \mathbf{i!} \tau_2)\urcorner$ jako skrót formuły $\ulcorner(\tau_1 \cdot \tau_2)\varepsilon(\tau_1 \cdot \tau_2)\urcorner$), gdyż przykładowo dla zbioru formuł wyznaczonego przez {'**a**','**i**'} otrzymamy inny wynik niż dla wyznaczonego przez {'**a**',''} (*resp.* dla wyznaczonego przez {'**a**','ε'} otrzymamy inny wynik niż dla wyznaczonego przez {'**a**','**i!**'}; *resp.* aby uwypuklić różnicę, gdy w *s* nie występują funktory nazwotwórcze).

Ponadto, nie potraktowaliśmy termu $\ulcorner(\tau_1+\tau_2)\urcorner$ jako skrótu termu $\ulcorner(\tau_1'\cdot\tau_2')'\urcorner$ (*resp.* $\ulcorner(\tau_1\cdot\tau_2)\urcorner$ jako skrótu termu

$\ulcorner(\tau_1'+\tau_2')'\urcorner$), aby uwypuklić różne właściwości zbiorów formuł zależne od tego czy występuje w nich symbol '′'.

[6] Dalej będziemy pisać po prostu 'D' zamiast 'D^U', gdyż nie będzie powodować to niejednoznaczności.

[7] '$\Leftrightarrow$' jest skrótem metajęzykowego zwrotu 'wtedy i tylko wtedy, gdy'.

[8] Oczywiście, mogliśmy podać rekurencyjne określenie zbioru $SAT_\mu(\Sigma^S)$, przy którym $SAT_\mu(\Sigma^S) = SAT_\mu(\Sigma) \cap \Sigma^S$.

[9] Innych zbiorów nie rozpatrujemy, gdyż nie uzyskamy dla nich nowych oszacowań, poza - nie mającym zastosowań - przypadkiem zbiorów {'a'} oraz {'i'} (patrz przypis 11 po dowodzie tego lematu).

[10] Zauważmy, że dla $u \in \mathfrak{U}$ mamy: jeśli $Card\ \mathfrak{C}_j = 1$, to $u \in \mathfrak{U}_j \Leftrightarrow u = \mathfrak{C}_j$; jeśli zaś $Card\ \mathfrak{C}_j > 1$, to $u \in \mathfrak{U}_j \Leftrightarrow u = \mathfrak{C}_j$ bądź $u = r_j$.

[11] Uwaga co do oszacowań dla innych zbiorów symboli. Przykładowo: jeśli występują symbole 'V' oraz '·' (*resp.* symbol '·') bez innych symboli nazwotwórczych, to należałoby brać skończone niepuste iloczyny $Z_{i_1} \cap \ldots \cap Z_{i_n}$ ($1 \le n \le k$ oraz $1 \le i_1, \ldots, i_n \le k$) zbiorów, z których każdy równy jest bądź $d(\mathcal{P}_{i_j})$ bądź U (*resp.* $d(\mathcal{P}_{i_j})$). Iloczynów takich jest co najwyżej 2^k, gdyż $d(\mathcal{P}_{i_j}) \subseteq U$ (*resp.* 2^k-1). Jeżeli ponadto występuje symbol 'ε' lub 'i!', to należy dodatkowo brać zbiory jednostkowe zbudowane z powyższych iloczynów, czyli otrzymamy oszacowanie 2^{k+1} (*resp.* $2^k - 2$). W tym wypadku nie ma różnicy pomiędzy 'ε' a 'i!', gdyż za pomocą 'ε' oraz '·' zdefiniujemy 'i!'.

[12] Jest to uogólnienie dowodu przedstawionego w [9], tj. dla $l = 0$ przebiega identycznie jak w [9], s. 161, 162.

[13] Oczywiście, przy $l = 0,1$ mamy $\mathfrak{C}_j^r = \emptyset$ dla $1 \le j \le n$.

[14] W przypadku $l = 0,1$, gdy $\mathfrak{U} = U/_\approx$, mamy dokładnie jedną projekcję kanoniczną $u \mapsto |u|_\approx$. Właśnie tę projekcję używa się, w naturalny sposób, w dowodzie przedstawionym w [9], gdy $l = 0$.

[15] Dla $l = 0,1$ każda projekcja jest różnowartościowa odpowiednio na zbiorze pustym i na zbiorze jednoelementowym, więc

jedyna projekcja kanoniczna należy do $Proj^V$.

[16] Definiując uniwersum $\mathfrak{U}$ modelu $\mathfrak{m}$ mogliśmy w ogóle nie brać klas abstrakcji $\mathfrak{C}_j$, lecz wziąć zbiory reprezententów $\mathfrak{C}_j^r$ złożone z $\min(l^{\circ}, Card\ \mathfrak{C}_j)$ elementów, tj. mające o jeden element więcej niż w przeprowadzanym dowodzie. Jednak wtedy, przy definiowaniu wartościowania v^F, musielibyśmy wyróżnić po jednym elemencie ze zbiorów reprezentantów $\mathfrak{C}_j^r$ $(1 \le j \le n)$. Dalej, w miejscu klasy abstrakcji $|v(\alpha)|_{\approx}$ byłby użyty odpowiedni wyróżniony element tego zbioru $\mathfrak{C}_j^r$, dla którego $\mathfrak{C}_j = |v(\alpha)|_{\approx}$.

Przy powyżej omówionej zmianie uniwersum, dla przypadku $l=0$ dowód nie przebiegałby identycznie jak w [9] (patrz przypis 12). Mianowicie, klasę abstrakcji $|v(\alpha)|_{\approx}$ zastąpiłby (jedyny wyróżniony przy nowym uniwersum) reprezentant klasy $\mathfrak{C}_j$, dla której $\mathfrak{C}_j = |v(\alpha)|_{\approx}$.

[17] Implikacja odwrotna do (*) jest również prawdziwa, lecz nie jest ona potrzebna w dowodzie lematu 2. Można ją wyprowadzić z faktu, iż dla dowolnego $\omega \in \mathfrak{U}^{\mathrm{VAR}}$ istnieją $v \in U^{\mathrm{VAR}}$ oraz $F \in Proj^V$ takie, że $\varphi \in SAT_{\mathfrak{m}}(\omega, \mathbf{MRP}_{=}) \Leftrightarrow \varphi \in SAT_{\mathfrak{m}}(v^F, \mathbf{MRP}_{=})$. W ogólnym przypadku ω nie musi równać się v^F. Równość taka zachodzi dla $l = 0,1$, gdy istnieje tylko jedna projekcja kanoniczna.

[18] Część tej transkrypcji - dotycząca stałych 'a','i' oraz '' - ma swą genezę w pracy [2].

[19] W pracy [8] wprowadzono funkcję t inną metodą rekurencyjną, nie korzystając z «formalnego» działania $\circledast$.

[20] Druga zmienna pojawia się po rozwinięciu skrótu $\ulcorner \exists! \alpha \varphi(\alpha) \urcorner$.

[21] Zmienna α jest ustalona dla funkcji t. Oczywiście, podformułę $\ulcorner \alpha = \alpha \urcorner$ można wyeliminować, tzn. można otrzymać odpowiednią formułę monadycznego rachunku predykatów bez identyczności równoważną z $t(\sigma)$.