Pietruszczak, Andrzej

Stała Leśniewskiego w teoriach sylogistycznych : semantyczne badania pewnych kwantyfikatorowych rachunków nazw

Acta Universitatis Nicolai Copernici. Logika 3 (255), 45-76

1992

ACTA UNIVERSITATIS NICOLAI COPERNICI

LOGIKA III - NAUKI HUMANISTYCZNO-SPOŁECZNE - ZESZYT 255 - 1992

Katedra Logiki

Andrzej Pietruszczak

STAŁA LEŚNIEWSKIEGO W TEORIACH SYLOGISTYCZMYCH. SEMANTYCZNE BADANIA PEWNYCH KWANTYFIKATOROWYCH RACHUNKÓW NAZW

W pracy tej badamy pewne teorie pierwszego rzędu bez identyczności. Ich stałymi pozalogicznymi będą jedynie dwuargumentowe predykaty wybrane spośród następujących: '*A*', '*I*', '*E*', '*O*' oraz 'ε'. Modelami prezentowanych teorii będą m. in. wszystkie tzw. struktury specjalne, w których uniwersa złożone są ze zbiorów, zaś predykaty interpretowane są odpowiednio (w podanej powyżej kolejności) jako relacje: inkluzji, niepustego iloczynu, pustego iloczynu, niepustej różnicy oraz zawierania się zbioru jednoelementowego. Jak widać, interpretacje te «korespondują» z interpretacjami odpowiednich stałych logicznych rachunku nazw. I tak, interpretacja w strukturach specjalnych predykatów '*A*' i '*E*' odpowiada tzw. słabej interpretacji stałych sylogistycznych 'każde...jest...' oraz 'żadne...nie jest...', predykatów '*I*' oraz '*O*' - tzw. mocnej interpretacji[1] stałych sylogistycznych 'jakieś...jest...' oraz 'jakieś...nie jest...', zaś predykatu 'ε' - stałej ontologii Leśniewskiego, spójce '...jest...'[2]. Twierdzeniami danej teorii będą te i tylko te jej formuły, które są prawdziwe w dowolnej strukturze specjalnej mającej uniwersum należące do odpowiedniej klasy niepustych rodzin zbiorów. Biorąc pod uwagę powyższe fakty, możemy utożsamić badane teorie pierwszego rzędu z odpowiednimi kwantyfikatorowymi rachunkami nazw[3].

Dzięki temu, że nie zajmujemy się bezpośrednio systemami kwantyfikatorowego rachunku nazw, unikamy znanych trudności z interpretacją kwantyfikatorów wiążących zmienne nazwowe rachunku nazw[4].

Teoriami sylogistycznymi nazywać będziemy w tej pracy teorię pierwszego rzędu pochodzącą od J. C. Shepherdsona ([12]) oraz jej rozszerzenia. Stałymi pierwotnymi teorii Shepherdsona są predykaty '*A*' oraz '*I*', zaś predykaty '*O*' oraz '*E*' są definiowalne w znany sposób. W pracy tej «wzmocnimy», w pewnym sensie, wynik uzyskany w [12]. Pozwoli nam to na zdefiniowanie w teorii Shepherdsona stałej 'ε'. Tak zdefiniowana stała Leśniewskiego będzie interpretowana w strukturach specjalnych, których uniwersa należą do pewnej klasy $\mathfrak{K}^*$, identycznie jak w ontologii. Jednak aksjomat ontologii Leśniewskiego nie będzie twierdzeniem tego definicyjnego rozszerzenia. Aby tak było musimy wzmocnić teorię Shepherdsona o dodatkowy aksjomat.

Przedstawimy również pewne konserwatywne rozszerzenie teorii Shepherdsona, w którym 'ε' jest stałą pierwotną. Podobnie jak powyżej, wzmacniając to rozszerzenie o nowe aksjomaty, uzyskamy konserwatywne rozszerzenia elementarnej ontologii Leśniewskiego. Wykorzystamy przy tym wynik z [14]. Pokażemy również, że dzięki temu wynikowi, można zbudować definicyjne rozszerzenie ontologii, będące rozszerzeniem teorii Shepherdsona.

Część I
Uwagi terminologiczne

1. STRUKTURY. MODELE. Niech $\mathcal{L}$ będzie takim językiem pierwszego rzędu bez identyczności, w alfabecie którego stałymi logicznymi są spójniki '¬', '∧', '∨', '→', '≡' oraz kwantyfikatory '∀' i '∃', zaś stałymi pozalogicznymi mogą być jedynie dwuargumentowe predykaty '*A*', '*I*', '*E*', '*O*' oraz 'ε'. Niech $\mathbf{F}_{\mathcal{L}}$ będzie zbiorem wszystkich formuł języka $\mathcal{L}$. Strukturą dla języka $\mathcal{L}$ jest dowolna para uporządkowana $\mathbb{A}_{\mathcal{L}}=<|\mathbb{A}_{\mathcal{L}}|,d_{\mathcal{L}}>$, w której $|\mathbb{A}_{\mathcal{L}}|$ jest zbiorem niepustym (uniwersum struktury), zaś $d_{\mathcal{L}}$ jest funkcją (denotacji stałych pozalogicznych) przyporządkowującą każdemu predykatowi języka $\mathcal{L}$ jakąś dwuargumentową relację w zbiorze $|\mathbb{A}_{\mathcal{L}}|$. Przez $\rho^{\mathbb{A}}$ oznaczać będziemy wartość funkcji $d_{\mathcal{L}}$ na predykacie ρ.

Struktura $\mathbb{A}_{\mathcal{L}}$ jest modelem formuły $\varphi\in\mathbf{F}_{\mathcal{L}}$ wtedy i tylko wtedy, gdy φ jest prawdziwa w $\mathbb{A}_{\mathcal{L}}$.

2. EPIMORFIZMY. Odwzorowanie e z $|\mathbb{A}_{\mathcal{L}}|$ na $|\mathbb{B}_{\mathcal{L}}|$ jest epimorfizmem struktury $\mathbb{A}_{\mathcal{L}}$ na strukturę $\mathbb{B}_{\mathcal{L}}$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnych $a,b\in|\mathbb{A}_{\mathcal{L}}|$: jeśli ρ jest predykatem języka $\mathcal{L}$, to

$$<a,b>\in\rho^{\mathbb{A}} \Leftrightarrow^{5} <e(a),e(b)>\in\rho^{\mathbb{B}}$$

Mówimy, że struktura $\mathbb{A}_{\mathcal{L}}$ jest epimorficzna ze strukturą $\mathbb{B}_{\mathcal{L}}$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje epimorfizm z $\mathbb{A}_{\mathcal{L}}$ na $\mathbb{B}_{\mathcal{L}}$. W tym przypadku prawdziwy jest lemat (*[1], s. 192 i 193*):

LEMAT 1 a) wartościowanie v zmiennych języka $\mathcal{L}$ spełnia w $\mathbb{A}_{\mathcal{L}}$ formułę $\varphi\in\mathbf{F}_{\mathcal{L}}$ wtedy i tylko wtedy, gdy wartościowanie $e\circ v$ spełnia w $\mathbb{B}_{\mathcal{L}}$ formułę φ.

b) $\varphi\in\mathbf{F}_{\mathcal{L}}$ jest prawdziwa w $\mathbb{A}_{\mathcal{L}}$ wtedy i tylko wtedy, gdy φ jest prawdziwa w $\mathbb{B}_{\mathcal{L}}$.□

3. STRUKTURY SPECJALNE. $\mathbb{A}_{\mathcal{L}}$ jest strukturą specjalną dla języka $\mathcal{L}$

wtedy i tylko wtedy, gdy $|\mathbb{A}_{\mathcal{L}}|$ jest niepustą rodziną zbiorów oraz dla dowolnych zbiorów X,Y z $|\mathbb{A}_{\mathcal{L}}|$ mamy:

- gdy 'A' występuje w alfabecie $\mathcal{L}$, to $\langle X,Y\rangle \in A^{\mathbb{A}} \Leftrightarrow X \subseteq Y$,
- gdy 'I' występuje w alfabecie $\mathcal{L}$, to $\langle X,Y\rangle \in I^{\mathbb{A}} \Leftrightarrow X \cap Y \neq \emptyset$,
- gdy 'O' występuje w alfabecie $\mathcal{L}$, to $\langle X,Y\rangle \in O^{\mathbb{A}} \Leftrightarrow X \setminus Y \neq \emptyset$,
- gdy 'E' występuje w alfabecie $\mathcal{L}$, to $\langle X,Y\rangle \in E^{\mathbb{A}} \Leftrightarrow X \cap Y = \emptyset$,
- gdy 'ε' występuje w alfabecie $\mathcal{L}$, to $\langle X,Y\rangle \in \varepsilon^{\mathbb{A}} \Leftrightarrow Card X=1$ i $X \subseteq Y$.

$Card\ X$ to moc zbioru X.

W przypdku struktur specjalnych języków z predykatem 'A', każdy epimorfizm jest izomorfizmem, tzn. jest także odwzorowaniem różnowartościowym.

4. STRUKTURY GENEROWANE PRZEZ NIEPUSTE RODZINY ZBIORÓW. Mówimy, że struktura $\mathbb{A}_{\mathcal{L}}$ jest generowana przez niepustą rodzinę zbiorów $\mathcal{R}$ wtedy i tylko wtedy, gdy jest specjalna dla $\mathcal{L}$ oraz $\mathcal{R}=|\mathbb{A}_{\mathcal{L}}|$. Wtedy strukturę $\mathbb{A}_{\mathcal{L}}$ będziemy oznaczać przez $\mathcal{R}_{\mathcal{L}}$.

5. TWIERDZENIE O EPIMORFIZMIE (REPREZENTACJI). Niech $\mathcal{L}$ będzie jednym z języków z p. 1. oraz $\mathcal{T}$ będzie, utworzoną w $\mathcal{L}$, teorią pierwszego rzędu bez identyczności o zbiorze aksjomatów specyficznych Ax. Mówimy, że struktura $\mathbb{A}_{\mathcal{L}}$ jest modelem teorii $\mathcal{T}$ wtedy i tylko wtedy, gdy każda formuła z Ax jest prawdziwa w $\mathbb{A}_{\mathcal{L}}$.

Niech $\mathcal{K}$ będzie jakąś niepustą klasą niepustych rodzin zbiorów. Mówimy, że dla teorii $\mathcal{T}$ zachodzi twierdzenie o epimorfizmie (lub inaczej: o reprezentacji) względem klasy $\mathcal{K}$ wtedy i tylko wtedy, gdy prawdą jest: *dla każdej struktury* $\mathbb{A}_{\mathcal{L}}$

$\mathbb{A}_{\mathcal{L}}$ jest modelem teorii $\mathcal{T}$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$\mathbb{A}_{\mathcal{L}}$ jest epimorficzna z jakąś strukturą $\mathcal{R}_{\mathcal{L}}$ dla $\mathcal{R} \in \mathcal{K}$.

Niech predykat ρ nie występuje w $\mathcal{L}$, zaś $\mathcal{L}_{\rho}$ będzie językiem, którego alfabet jest rozszerzeniem alfabetu języka $\mathcal{L}$ o ρ. Niech $\mathcal{T}$+*def*ρ będzie definicyjnym rozszerzeniem teorii $\mathcal{T}$ o definicję predykatu ρ, tj. teoria $\mathcal{T}$*+def*ρ ma zbiór aksjomatów specyficznych równy $Ax \cup \{(def\rho)\}$. Przy tych oznaczeniach zachodzi:

METATWIERDZENIE *Niech $\mathcal{K}$ będzie dowolną klasą niepustych rodzin zbiorów, względem której zachodzi twierdzenie o epimorfizmie dla teorii $\mathcal{T}$. Niech dla każdego $\mathcal{R} \in \mathcal{K}$, struktura $\mathcal{R}_{\mathcal{L}_\rho}$ jest modelem formuły (defρ). Wtedy również dla $\mathcal{T}$+defρ zachodzi twierdzenie o epimorfizmie względem klasy $\mathcal{K}$.*

DOWÓD Przyjmijmy, że ρ jest zdefiniowany w $\mathcal{T}$*+def*ρ za pomocą formuły $\ulcorner\rho xy \equiv \varphi(x,y)\urcorner$, gdzie $\varphi(x,y)$ należy do $F_{\mathcal{L}}$ i ma tylko dwie zmienne wolne 'x' oraz 'y'.

Niech $\mathbb{A}_{\mathcal{L}_\rho}$ będzie dowolnym modelem teorii $\mathcal{T}_\rho$. Powstaje on z pewnego modelu $\mathbb{B}_{\mathcal{L}}$ teorii $\mathcal{T}$. Mamy $|\mathbb{A}_{\mathcal{L}_\rho}|=|\mathbb{B}_{\mathcal{L}}|$ oraz $\rho^{\mathbb{A}}$ jest relacją wyznaczoną w $|\mathbb{B}_{\mathcal{L}}|$ przez formułę $\varphi(x,y)$. Na mocy założenia istnieje epimorfizm e z $\mathbb{B}_{\mathcal{L}}$ na pewną strukturę $\mathcal{R}_{\mathcal{L}}$, dla $\mathcal{R} \in \mathcal{K}$. Pokażemy, że funkcja e zachowuje warunek epimorfizmu również dla predykatu ρ, czyli że e jest epimorfizmem z $\mathbb{A}_{\mathcal{L}_\rho}$ na $\mathcal{R}_{\mathcal{L}_\rho}$. Istotnie, to że $\langle a,b\rangle \in \rho^{\mathbb{A}}$ jest równoważne temu, że każde wartościowanie v, dla którego $v(x)=a$ i $v(y)=b$ spełnia w $\mathbb{B}_{\mathcal{L}}$ formułę $\varphi(x,y)$. To zaś jest równoważne temu, że wartościowanie $e \circ v$ spełnia tę formułę w $\mathcal{R}_{\mathcal{L}}$ (lemat 1a). Zatem $e(a)$ i $e(b)$ są w relacji wyznaczonej w $\mathcal{R}$ przez formułę $\varphi(x,y)$, tj. w relacji będącej interpretacją ρ w $\mathcal{R}_{\mathcal{L}_\rho}$. □

Część II
Teoria Shepherdsona i jej konserwatywne rozszerzenia.
AI-atomy w modelach teorii sylogistycznych

1. **TEORIA S.** Niech L_{AI} będzie językiem pierwszego rzędu bez

identyczności o dwóch stałych pozalogicznych 'A' oraz 'I'. Dalej, gdy nazwa '$\mathbf{L}_{AI}$' ma być indeksem struktury (*resp.* struktury specjalnej generowanej przez jakąś rodzinę zbiorów), będziemy używać jedynie samego jej indeksu, tj. '$_{AI}$', pisząc przykładowo: '$\mathbb{A}_{AI}$', '$\mathcal{R}_{AI}$'.

W języku $\mathbf{L}_{AI}$ rozważmy teorię (Shepherdsona, [12]) opartą na poniższych aksjomatach:

$$Axx \tag{I}$$

$$(Axz \wedge Azy) \rightarrow Axy \tag{II}$$

$$(Izx \wedge Azy) \rightarrow Ixy \tag{III}$$

$$Ixy \rightarrow Ixx \tag{IV}$$

$$\neg Ixx \rightarrow Axy \tag{V}$$

Łatwo zauważyć, że z (I) i (III) wyprowadzimy twierdzenia:

$$Ixy \rightarrow Iyx \tag{1}$$

$$(Iuz \wedge Aux \wedge Azy) \rightarrow Ixy \tag{2}$$

Oczywiste jest stwierdzenie:

STWIERDZENIE 1. Każda struktura specjalna dla $\mathbf{L}_{AI}$ jest modelem teorii **S**.□

Niech $\mathfrak{K}$ będzie klasą wszystkich niepustych rodzin zbiorów. W pracy [12] dla teorii **S** udowodniono twierdzenie o epimorfizmie względem klasy $\mathfrak{K}$:

TWIERDZENIE 1. $\mathbb{A}_{AI}$ jest modelem teorii **S** wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje takie $\mathcal{R}\in\mathfrak{K}$, że $\mathbb{A}_{AI}$ jest epimorficzna ze strukturą $\mathcal{R}_{AI}$. □

2. ATOMY W MODELACH TEORII S. Niech $\mathbb{A}_{AI}$ będzie dowolną strukturą dla $\mathbf{L}_{AI}$. Mówimy, że a należąc do $|\mathbb{A}_{AI}|$ jest AI-atomem wtedy i tylko wtedy, gdy spełnia następujący warunek:

$$\langle a,a\rangle \in I^{\mathbb{A}} \text{ oraz dla każdego } b \text{ jeśli } \langle a,b\rangle \in I^{\mathbb{A}}, \text{ to } \langle a,b\rangle \in A^{\mathbb{A}} \tag{†}$$

Bezpośrednio z definicji epimorfizmu wynika, że jeśli e

jest epimorfizmem z $\mathbb{A}_{AI}$ na $\mathbb{B}_{AI}$, to dla dowolnego $a\in|\mathbb{A}_{AI}|$

$$a \text{ jest } AI\text{-atomem w } \mathbb{A}_{AI} \Leftrightarrow e(a) \text{ jest } AI\text{-atomem w } \mathbb{B}_{AI}$$

Oczywiście, interesować nas będą jedynie te przypadki AI-atomów, gdy struktura $\mathbb{A}_{AI}$ jest modelem teorii **S**. Jak wiemy, każda struktura specjalna dla $\mathbf{L}_{AI}$ generowana przez jakąś niepustą rodzinę zbiorów $\mathcal{R}$ jest modelem teorii **S**. W strukturze $\mathcal{R}_{AI}$ warunek (†) wyrazimy w następujący sposób. Zbiór $X\in\mathcal{R}$ jest AI-atomem wtedy i tylko wtedy, gdy

$$X\neq\emptyset \text{ oraz dla każdego } Y\in\mathcal{R} \text{ jeśli } X\cap Y\neq\emptyset, \text{ to } X\subseteq Y \qquad (‡)$$ [6]

Zauważmy, że każdy zbiór jednoelementowy w rodzinie $\mathcal{R}$ jest AI-atomem, lecz nie musi być odwrotnie[7]. Interesować nas będzie właśnie następująca klasa rodzin zbiorów:

$$\mathfrak{K}^*:=\{\mathcal{R}\in\mathfrak{K} : \text{każdy } AI\text{-atom w } \mathcal{R}_{AI} \text{ jest zbiorem jednoelementowym}\}$$

3. TWIERDZENIE O EPIMORFIZMIE DLA S WZGLĘDEM $\mathfrak{K}^*$. Dla teorii **S** udowodnijmy twierdzenie o epimorfizmie względem klasy $\mathfrak{K}^*$:

TWIERDZENIE 2. Struktura $\mathbb{A}_{AI}$ jest modelem teorii **S** wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje takie $\mathcal{R}\in\mathfrak{K}^*$, że $\mathbb{A}_{AI}$ jest epimorficzna ze strukturą $\mathcal{R}_{AI}$.

DOWÓD "$\Leftarrow$" Z lematu 1b, ze stwierdzenia 1 i z inkluzji $\mathfrak{K}^*\subseteq\mathfrak{K}$.

"$\Rightarrow$" Niech $\mathbb{A}_{AI}$ będzie dowolnym modelem teorii **S**. Niepusty zbiór ∇ zawarty w $|\mathbb{A}_{AI}|$ nazywamy filtrem w $\mathbb{A}_{AI}$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnych $a,b\in|\mathbb{A}_{AI}|$ spełnione są dwa warunki:

$$\text{jeśli } a\in\nabla \text{ i } \langle a,b\rangle\in A^{\mathbb{A}}, \text{ to } b\in\nabla \qquad (!)$$

$$\text{jeśli } a\in\nabla \text{ i } b\in\nabla, \text{ to } \langle a,b\rangle\in I^{\mathbb{A}} \qquad (!!)$$

Niech V będzie zbiorem wszystkich filtrów w $\mathbb{A}_{AI}$. Określamy funkcję $e:|\mathbb{A}_{AI}| \to 2^V$ wzorem $e(a):=\{\nabla\in V : a\in\nabla\}$. Przyjmijmy $\mathcal{R}:=\{e(a) : a\in|\mathbb{A}_{AI}|\}$. Zatem e jest «na» $\mathcal{R}$. Pokażemy, że e jest epimorfizmem z $\mathbb{A}_{AI}$ na $\mathcal{R}_{AI}$ oraz że $\mathcal{R}\in\mathfrak{K}^*$.

Niech dla $a,b\in|\mathbb{A}_{AI}|$, $[a,b]:=\{c : \langle a,c\rangle\in A^{\mathbb{A}} \text{ lub } \langle b,c\rangle\in A^{\mathbb{A}}\}$.

Na mocy (I), $a,b\in[a,b]$. Pokażemy, że

$$<a,b>\in I^{\mathbb{A}} \Leftrightarrow [a,b] \text{ jest filtrem w } \mathbb{A}_{AI} . \qquad (\times)$$

Istotnie, niech $<a,b>\in I^{\mathbb{A}}$. Wtedy: do (!), o ile $c\in[a,b]$ i $<c,d>\in A^{\mathbb{A}}$, to na mocy (II) również $d\in[a,b]$; do (!!), jeśli $c,d\in[a,b]$, to zarówno $<a,c>\in A^{\mathbb{A}}$ lub $<b,c>\in A^{\mathbb{A}}$ oraz $<a,d>A^{\mathbb{A}}$ lub $<b,d>\in A^{\mathbb{A}}$. Stąd lub $<a,c>\in A^{\mathbb{A}}$ i $<a,d>\in A^{\mathbb{A}}$, lub $<a,c>\in A^{\mathbb{A}}$ i $<b,d>\in A^{\mathbb{A}}$, lub $<a,d>\in A^{\mathbb{A}}$ i $<b,c>\in A^{\mathbb{A}}$, lub $<b,c>\in A^{\mathbb{A}}$ i $<b,d>\in A^{\mathbb{A}}$. Teraz na mocy (IV),(1) i (2) mamy $<c,d>\in I^{\mathbb{A}}$. Odwrotnie, jeśli $[a,b]$ jest filtrem, to skoro $a,b\in[a,b]$, więc na mocy (!!) mamy $<a,b>\in I^{\mathbb{A}}$.

Jeżeli $<a,b>\in A^{\mathbb{A}}$, to na mocy (!), $e(a) \subseteq e(b)$. Odwrotnie, rozważmy dwa przypadki. Gdy $<a,a>\notin I^{\mathbb{A}}$, to na mocy (V), $<a,b>\in A^{\mathbb{A}}$. Gdy zaś $<a,a>\in I^{\mathbb{A}}$, to $[a,a]$ jest filtrem w $\mathbb{A}_{AI}$ i $a\in[a,a]$. Zatem $[a,a]\in e(a)$, co na mocy założenia daje $[a,a]\in e(b)$. Stąd $b\in[a,a]$, tzn. $<a,b>\in A^{\mathbb{A}}$.

Jeśli $<a,b>\in I^{\mathbb{A}}$, to na mocy $(\times)$, $[a,b]$ jest filtrem w $\mathbb{A}_{AI}$ i $a,b\in[a,b]$. Zatem $[a,b]\in e(a)\cap e(b)$. Odwrotnie, jeśli $e(a)\cap e(b)\neq\varnothing$, to istnieje taki filtr ∇, że $a\in\nabla$ i $b\in\nabla$. Wtedy na mocy (!!), mamy $<a,b>\in I^{\mathbb{A}}$.

Na koniec pokażemy, że $\mathcal{R}\in\mathfrak{K}^*$. Niech X będzie dowolnym AI-atomem w $\mathcal{R}_{AI}$, tzn. spełnia warunek (‡). Ponieważ e jest na, więc istnieje w $|\mathbb{A}_{AI}|$ takie a, że spełnia warunek (†) i $X=e(a)$. Na mocy $(\times)$, $[a,a]$ jest filtrem w $\mathbb{A}_{AI}$. Pokażemy, że $[a,a]$ jest jedynym elementem zbioru $e(a)$. Istotnie, niech $\nabla\in e(a)$. Wtedy dla dowolnego $b\in\nabla$, na mocy (!!), mamy $<a,b>\in I^{\mathbb{A}}$, gdyż $a\in\nabla$. Zatem na mocy (†), również $<a,b>\in A^{\mathbb{A}}$, czyli $b\in[a,a]$. Zatem $\nabla \subseteq [a,a]$. Ponadto, dla dowolnego b, jeśli $b\in[a,a]$, to $<a,b>\in A^{\mathbb{A}}$, więc na mocy (!), $b\in\nabla$, gdyż $a\in\nabla$. Zatem również $[a,a] \subseteq \nabla$. □[8]

Wyciągnijmy teraz następujący wniosek:

WNIOSEK 1. Dla każdej formuły φ języka L_{AI} poniższe trzy warunki są równoważne:

(*o*) φ jest twierdzeniem teorii **S**,

(*i*) dla każdego $\mathcal{R}\in\mathfrak{R}$, struktura $\mathcal{R}_{AI}$ jest modelem φ,

(*ii*) dla każdego $\mathcal{R}\in\mathfrak{R}^*$, struktura $\mathcal{R}_{AI}$ jest modelem φ.

DOWÓD "(*o*)⇒(*i*)" stwierdzenie 1; "(*i*)⇒(*ii*)" z inkluzji $\mathfrak{R}^* \subseteq \mathfrak{R}$. "(*ii*)⇒(*o*)" Jeżeli $\mathfrak{A}_{AI}$ jest dowolnym modelem teorii **S**, to na mocy twierdzenia 2, istnieje takie $\mathcal{R}\in\mathfrak{R}^*$, że $\mathfrak{A}_{AI}$ jest epimorficzny z $\mathcal{R}_{AI}$. Na mocy (*ii*) i lematu 1b, φ jest prawdziwa również w modelu $\mathfrak{A}_{AI}$. Ponieważ był to dowolny model, więc na mocy twierdzenia Gödla o pełności, φ jest twierdzeniem teorii **S**. □

Zatem możemy interpretować teorię **S** jako *teorię struktur specjalnych dla* L_{AI} *generowanych odpowiednio przez:*

(*IS 1*) *rodziny z* $\mathfrak{R}$,

(*IS 2*) *rodziny z* $\mathfrak{R}^*$.

Oczywiście, interpretacja (*IS 1*) jest szersza od interpretacji (*IS 2*). Jednak przy rozszerzaniu teorii **S** możemy wybrać równoprawnie jedną z nich.

4. **KONSERWATYWNE ROZSZERZENIA TEORII S.** Niech $L_{AI\varepsilon}$ będzie językiem pierwszego rzędu bez identyczności o trzech stałych pozalogicznych '*A*', '*I*' oraz 'ε'. Przyjmijmy podobną umowę o indeksach jak w p.1. *W języku* $L_{AI\varepsilon}$ *zbudujemy dwa konserwatywne rozszerzenia teorii* **S**. Ich «zamierzone» interpretacje będą odpowiednio kontynuacją jednej z interpretacji (*IS 1*) bądź (*IS 2*) teorii **S**. Te dwie kontynuacje nie są równoważne.

Istotnie, ponieważ $\mathfrak{R}^* \subset \mathfrak{R}$, więc zbiór formuł języka $L_{AI\varepsilon}$ prawdziwych w każdej strukturze $\mathcal{R}_{AI\varepsilon}$ dla $\mathcal{R}\in\mathfrak{R}$ jest podzbiorem zbioru formuł prawdziwych w każdej strukturze $\mathcal{R}_{AI\varepsilon}$ dla $\mathcal{R}\in\mathfrak{R}^*$. Jest to jednak zawieranie właściwe, co wynika z poniższego lematu (wykorzystywanego również później w p.6):

LEMAT 2. Dla dowolnej rodziny $\mathcal{R}\in\mathfrak{K}$:

struktura $\mathcal{R}_{AI\varepsilon}$ jest modelem poniższej formuły

$$(Ixx\wedge\forall z(Ixz\rightarrow Axz)) \rightarrow \varepsilon xx \tag{3}$$

wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathcal{R}\in\mathfrak{K}^*$.

DOWÓD "⇒" Załóżmy, że (3) jest prawdziwa w $\mathcal{R}_{AI\varepsilon}$ oraz niech X będzie dowolnym AI-atomem w $\mathcal{R}_{AI\varepsilon}$. Wtedy na mocy (‡), każde wartościowanie v, dla którego $v(\text{'}x\text{'}) = X$, spełnia formułę '$Ixx \wedge \forall z(Ixz\rightarrow Axz)$'. Zatem v spełnia również formułę 'εxx', czyli $\langle X,X\rangle\in\varepsilon^{\mathcal{R}}$. Stąd X jest jednoelementowy.

"⇐" Niech $\mathcal{R}\in\mathfrak{K}^*$. Weźmy dowolne wartościowanie v spełniające poprzednik implikacji (3) w $\mathcal{R}_{AI\varepsilon}$. Wtedy $v(\text{'}x\text{'})$ jest AI-atomem w $\mathcal{R}_{AI\varepsilon}$, czyli jest zbiorem jednoelementowym. Stąd v spełnia formułę 'εxx'. Zatem każde wartościowanie spełniające poprzednik implikacji (3), spełnia również jej następnik. □

5. TEORIA S^{ε}. W języku $L_{AI\varepsilon}$ zbudujemy rozszerzenie S^{ε} teorii S, którego «zamierzona» interpretacja będzie kontynuacją interpretacji (*IS 1*). Teoria S^{ε} ma następujące aksjomaty: (I)-(V) oraz

$$\varepsilon xy \rightarrow (\varepsilon xx\wedge Ixx\wedge Axy) \tag{VI}$$

$$(Axz\wedge\varepsilon zz\wedge Ixy) \rightarrow \varepsilon xy \tag{VII}$$

Łatwo zauważyć, że twierdzeniami teorii S^{ε} są poniższe formuły prawdziwe w każdej strukturze $\mathcal{R}_{AI\varepsilon}$ dla $\mathcal{R}\in\mathfrak{K}$:

$$(\varepsilon xx \wedge Ixy) \rightarrow Axy \tag{4}$$

$$(\varepsilon xx \wedge Ixy) \rightarrow \varepsilon xy \tag{5}$$

$$(Axy \wedge \varepsilon yy) \rightarrow (\varepsilon xx \vee \neg Ixx) \tag{6}$$

$$(\varepsilon xx \wedge Axy) \rightarrow \varepsilon xy \tag{7}$$ [9]

Podobnie jak dla teorii S, zachodzi stwierdzenie:

STWIERDZENIE 2. Każda struktura specjalna dla $L_{AI\varepsilon}$ jest modelem teorii S^{ε}. □

Udowodnimy, że dla teorii S^{ε} prawdziwe jest twierdzenie o epimorfizmie względem klasy $\mathfrak{K}$:

TWIERDZENIE 3. Struktura $\mathbb{A}_{AI\varepsilon}$ jest modelem teorii S^{ε} wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje takie $\mathcal{R}\in\mathfrak{K}$, że $\mathbb{A}_{AI\varepsilon}$ jest epimorficzna ze strukturą $\mathcal{R}_{AI\varepsilon}$.

DOWÓD "$\Leftarrow$" Z lematu 1b) oraz ze stwierdzenia 2.

"$\Rightarrow$" Niech $\mathbb{A}_{AI\varepsilon}$ będzie dowolnym modelem teorii S^{ε}. Identycznie jak w dowodzie twierdzenia 2 definiujemy pojęcie filtru w $\mathbb{A}_{AI\varepsilon}$. Niech V będzie sumą mnogościową zbioru $|\mathbb{A}_{AI\varepsilon}|$ oraz zbioru wszystkich filtrów w $\mathbb{A}_{AI\varepsilon}$. Określamy funkcję $e:|\mathbb{A}_{AI\varepsilon}| \to 2^{V}$ wzorem:

$$e(a):=\begin{cases} \{\nabla\in V : a\in\nabla\} & , \text{ gdy } \langle a,a\rangle\in\varepsilon^{\mathbb{A}} \\ \{\nabla\in V : a\in\nabla\} \cup \{c : \langle c,c\rangle\in I^{\mathbb{A}} \text{ i } \langle c,a\rangle\in A^{\mathbb{A}}\} & , \text{ gdy } \langle a,a\rangle\notin\varepsilon^{\mathbb{A}} \end{cases}$$

Przyjmijmy $\mathcal{R}:=\{e(a) : a\in|\mathbb{A}_{AI\varepsilon}|\}$. Zatem e jest «na» $\mathcal{R}$. Pokażemy, że e jest epimorfizmem z $\mathbb{A}_{AI\varepsilon}$ na $\mathcal{R}_{AI\varepsilon}$. W dowodzie tego faktu kilkakrotnie wykorzystamy poniższe warunki:

$$\langle a,a\rangle\in I^{\mathbb{A}} \Leftrightarrow e(a)\neq \emptyset \qquad (w\ 1)$$

Istotnie, zdefiniujmy zbiór $[a,b]$ jak w dowodzie twierdzenia 2 oraz niech $[a]:=[a,a]$. Jeśli $\langle a,a\rangle\in I^{\mathbb{A}}$, to na mocy (×) z dowodu twierdzenia 2, $[a]$ jest filtrem w $\mathbb{A}_{AI\varepsilon}$ i $a\in[a]$, czyli $e(a)\neq\emptyset$. Odwrotnie, gdy $\langle a,a\rangle\notin I^{\mathbb{A}}$, to na mocy (!!) z określenia filtru, a nie należy do żadnego filtru. Ponadto, na mocy (1), (III) i (IV), $\{c : \langle c,c\rangle\in I^{\mathbb{A}} \text{ i } \langle c,a\rangle\in A^{\mathbb{A}}\} = \emptyset$. Zatem $e(a) = \emptyset$.

$$\text{Jeśli } \langle a,a\rangle\in I^{\mathbb{A}} \text{ i } \langle a,a\rangle\notin\varepsilon^{\mathbb{A}}, \text{ to } \{[a],a\}\subseteq e(a) \qquad (w\ 2)$$

Istotnie, wynika to z (I),(×) i definicji funkcji e.

$$\langle a,a\rangle\in\varepsilon^{\mathbb{A}} \Leftrightarrow [a] \text{ jest filtrem i } e(a)=\{[a]\} \qquad (w\ 3)$$

Istotnie, jeśli $\langle a,a\rangle\in\varepsilon^{\mathbb{A}}$, to na mocy (VI) i (×), $[a]$ jest filtrem, więc $[a]\in e(a)$. Załóżmy, że $\nabla\in e(a)$, czyli $a\in\nabla$. Jeśli dowolnie wybrany $b\in\nabla$, to na mocy (!!) w określeniu filtrów,

$\langle a,b\rangle\in I^{\mathbb{A}}$. Stąd, na mocy (4), $\langle a,b\rangle\in A^{\mathbb{A}}$. Zatem $b\in[a]$, tj. $\nabla\subseteq[a]$. Zawieranie $[a]\subseteq\nabla$ wynika z (!) w określeniu filtru. Zatem, na mocy określenia funkcji e, $e(a)=\{[a]\}$. Odwrotnie, ponieważ $[a]$ jest filtrem, więc $\langle a,a\rangle\in I^{\mathbb{A}}$. Zatem $\{c : \langle c,c\rangle\in I^{\mathbb{A}}$ i $\langle c,a\rangle\in A^{\mathbb{A}}\}\neq\emptyset$. Stąd, skoro nie jest zawarty w $e(a)$, $\langle a,a\rangle\in\varepsilon^{\mathbb{A}}$.

Jeśli *Card* $e(a)=1$, to $\langle a,a\rangle\in\varepsilon^{\mathbb{A}}$. (*w* 4)

Istotnie, na mocy (*w 1*), $\langle a,a\rangle\in I^{\mathbb{A}}$. Stąd na mocy (*w 2*) $\langle a,a\rangle\in\varepsilon^{\mathbb{A}}$.

Załóżmy teraz, że $\langle a,b\rangle\in A^{\mathbb{A}}$. Rozpatrzmy dwa przypadki. 1° gdy $\langle b,b\rangle\in\varepsilon^{\mathbb{A}}$: wtedy na mocy (6), albo $\langle a,a\rangle\in\varepsilon^{\mathbb{A}}$ albo $\langle a,a\rangle\notin I^{\mathbb{A}}$. W sytuacji pierwszej, $e(a)=\{[a]\}=\{[b]\}=e(b)$. W sytuacji drugiej na mocy (*w 1*), $e(a)=\emptyset\subseteq e(b)$. 2° gdy $\langle b,b\rangle\notin\varepsilon^{\mathbb{A}}$: wtedy z warunku (!) z określenia filtru otrzymujemy: jeśli $\nabla\in e(a)$, to $\nabla\in e(b)$. Ponadto, z określenia funkcji e oraz z (II) otrzymujemy: jeśli $c\in e(a)$, to $c\in e(b)$. Zatem $e(a)\subseteq e(b)$.

Odwrotnie: załóżmy, że $e(a)\subseteq e(b)$. Wtedy, gdy $\langle a,a\rangle\notin I^{\mathbb{A}}$, to na mocy (V), $\langle a,b\rangle\in A^{\mathbb{A}}$. Jeśli zaś $\langle a,a\rangle\in I^{\mathbb{A}}$, to na mocy ($\times$), zbiór $[a]$ jest filtrem i $[a]\in e(a)$. Zatem $[a]\in e(b)$. Stąd $b\in[a]$, czyli $\langle a,b\rangle\in A^{\mathbb{A}}$.

Niech $\langle a,b\rangle\in I^{\mathbb{A}}$. Wtedy na mocy ($\times$), $[a,b]$ jest filtrem oraz $[a,b]\in e(a)\cap e(b)$. Odwrotnie: załóżmy, że $e(a)\cap e(b)\neq\emptyset$. Mamy dwa przypadki. 1° istnieje taki filtr ∇, że $\nabla\in e(a)\cap e(b)$: wtedy $a\in\nabla$ i $b\in\nabla$, więc z (!!) w określeniu filtru mamy $\langle a,b\rangle\in I^{\mathbb{A}}$. 2° istnieje takie $c\in|\mathbb{A}_{AI\varepsilon}|$, że $c\in e(a)\cap e(b)$: wtedy $\langle c,c\rangle\in I^{\mathbb{A}}$ i $\langle c,a\rangle\in A^{\mathbb{A}}$ i $\langle c,b\rangle\in A^{\mathbb{A}}$. Zatem na mocy (2), $\langle a,b\rangle\in I^{\mathbb{A}}$.

Niech $\langle a,b\rangle\in\varepsilon^{\mathbb{A}}$. Wtedy na mocy (VI) i (*w 3*), $\langle a,a\rangle\in\varepsilon^{\mathbb{A}}$, $e(a)=\{[a]\}$ i $\langle a,b\rangle\in A^{\mathbb{A}}$. Zatem $e(a)=\{[a]\}\subseteq e(b)$. Odwrotnie: załóżmy, że *Card* $e(a)=1$ i $e(a)\subseteq e(b)$. Na mocy (*w 4*) i (*w 3*), $\langle a,a\rangle\in\varepsilon^{\mathbb{A}}$ i $e(a)=\{[a]\}$. Mamy więc $[a]\in e(b)$, czyli $b\in[a]$. Stąd $\langle a,b\rangle\in A^{\mathbb{A}}$. Zatem na mocy (7), $\langle a,b\rangle\in\varepsilon^{\mathbb{A}}$. □

Podobnie jak wniosek 1, dowodzimy:

WNIOSEK 2. Dla każdej formuły φ języka $L_{AI\varepsilon}$: φ jest twierdzeniem teorii S^{ε} wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $\mathcal{R}\in\mathfrak{K}$, struktura $\mathcal{R}_{AI\varepsilon}$ jest modelem φ. □

Z wniosków 1 i 2 wynika, że teoria S^{ε} jest konserwatywnym rozszerzeniem teorii S, tzn. dla każdej formuły φ języka L_{AI}, φ jest twierdzeniem teorii S^{ε} wtedy i tylko wtedy, gdy φ jest twierdzeniem teorii S.

6. DEFINICYJNE ROZSZERZENIE TEORII S. Zbudujmy teraz w języku $L_{AI\varepsilon}$ rozszerzenie teorii S, którego «zamierzona» interpretacja będzie kontynuacją interpretacji (*IS 2*).

Za pomocą lematu 2 udowodnijmy:

STWIERDZENIE 3. Dla dowolnej rodziny $\mathcal{R}\in\mathfrak{K}$:

struktura $\mathcal{R}_{AI\varepsilon}$ jest modelem poniższej równoważności

$$\varepsilon xy \Leftrightarrow (Ixx \wedge \forall z(Ixz \rightarrow Axz) \wedge Axy) \qquad (def\ \varepsilon)$$

wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathcal{R}\in\mathfrak{K}^*$.

DOWÓD "⇒" Weźmy dowolne $\mathcal{R}\in\mathfrak{K}$. Jeśli formuła (*def* ε) jest prawdziwa w $\mathcal{R}_{AI\varepsilon}$, to w $\mathcal{R}_{AI\varepsilon}$ prawdziwa jest również formuła (3), gdyż (I) jest prawdziwe w każdej strukturze specjalnej dla $L_{AI\varepsilon}$. Zatem na mocy lematu 2, $\mathcal{R}\in\mathfrak{K}^*$.

"⇐" Niech $\mathcal{R}\in\mathfrak{K}^*$. Wtedy na mocy lematu 2, (3) jest prawdziwe w $\mathcal{R}_{AI\varepsilon}$. Ponadto, ponieważ formuła (7) jest prawdziwa w każdej strukturze specjalnej dla $L_{AI\varepsilon}$, więc w $\mathcal{R}_{AI\varepsilon}$ prawdziwa jest również implikacja

$$(Ixx \wedge \forall z(Ixz \rightarrow Axz) \wedge Axy) \rightarrow \varepsilon xy \qquad (8)$$

Ponadto, poniższa implikacja:

$$\varepsilon xy \rightarrow (Ixx \wedge \forall z(Ixz \rightarrow Axz) \wedge Axy) \qquad (9)$$

jest prawdziwa w każdej strukturze specjalnej dla $L_{AI\varepsilon}$, gdyż własność tę mają również formuły (VI) i (4). □

W języku $L_{AI\varepsilon}$ zbudujmy definicyjne rozszerzenie teorii **S** za pomocą formuły (*def*ε). Oznaczmy je przez '**S+def**ε'. Ze stwierdzeń 1 i 3 wynika:

STWIERDZENIE 4. Dla dowolnej rodziny $\mathcal{R}\in\mathfrak{K}$:

struktura $\mathcal{R}_{AI\varepsilon}$ jest modelem teorii **S+def**ε wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathcal{R}\in\mathfrak{K}^*$. □

Wykorzystując stwierdzenie 3 oraz metatwierdzenie z cz.I p.5, otrzymujemy:

TWIERDZENIE 4. $\mathbb{A}_{AI\varepsilon}$ jest modelem teorii **S+def**ε wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje takie $\mathcal{R}\in\mathfrak{K}^*$, że $\mathbb{A}_{AI\varepsilon}$ jest epimorficzna ze strukturą $\mathcal{R}_{AI\varepsilon}$. □[10]

Podobnie jak wniosek 1, dowodzimy:

WNIOSEK 3. Dla każdej formuły φ języka $L_{AI\varepsilon}$: φ jest twierdzeniem teorii **S+def**ε wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $\mathcal{R}\in\mathfrak{K}^*$, struktura $\mathcal{R}_{AI\varepsilon}$ jest modelem φ. □

Z wniosków 2 i 3 wynika, że teoria **S+def**ε jest rozszerzeniem teorii $\mathbf{S}^{\varepsilon}$ (oczywiście **S+def**ε jest konserwatywnym rozszerzeniem **S**). Zauważmy, że dodając do aksjomatów teorii $\mathbf{S}^{\varepsilon}$ formułę (3) otrzymamy teorię równoważną z teorią **S+def**ε. Istotnie, implikację prostą w (*def*ε) wyprowadzimy z (VI) i (4), zaś z (3) i (7) implikację odwrotną.

Na koniec tego punktu zauważmy, że dla każdego $\mathcal{R}\in\mathfrak{K}$ w strukturze $\mathcal{R}_{AI}$ prawdziwa jest poniższa równoważność:

$$(Ixx\wedge\forall z(Ixz\rightarrow Axz)\wedge Axy) \equiv (Ixy\wedge\forall z(Ixz\rightarrow Axz)) \qquad (10)$$

Łatwo ją wyprowadzić z tez (I),(2) i (IV) teorii **S**. Zatem tezą teorii **S+def**ε jest równoważność:

$$\varepsilon xy \equiv (Ixy\wedge\forall z(Ixz\rightarrow Axz)) \qquad (11)$$

7.PREDYKATY '*E*' ORAZ '*O*' W TEORIACH S, $\mathbf{S}^{\varepsilon}$ ORAZ S+defε. Oczywiste jest, że dla dowolnego $\mathcal{R}\in\mathfrak{K}$, poniższe formuły:

$$Exy \equiv \neg Ixy \qquad (def_1E)$$

$$Oxy \equiv \neg Axy \qquad (def_1O)$$

są prawdziwe w strukturze specjalnej generowanej przez $\mathcal{R}$.

Zatem w odpowiednich językach, za pomocą formuł (def_1E) oraz (def_1O), możemy zbudować definicyjne rozszerzenia teorii **S**, $\mathbf{S}^{\varepsilon}$ oraz **S+def**ε. Na mocy metatwierdzenia z cz. I p. 6, dla rozszerzeń teorii **S** oraz $\mathbf{S}^{\varepsilon}$ (*resp.* teorii **S+def**ε) zajdzie twierdzenie o epimorfizmie względem klasy $\mathfrak{K}$ (*resp.* klasy $\mathfrak{K}^*$).

Część III
Stałe sylogistyczne w elementarnej ontologii. ε-struktury i struktury ε-niezdegenerowane

Poniższa formuła jest prawdziwa w każdej strukturze specjalnej dla $\mathbf{L}_{AI\varepsilon}$:

$$\varepsilon xy \rightarrow \big(\exists z(\varepsilon zx)\wedge\forall z\forall u((\varepsilon zx\wedge\varepsilon ux)\rightarrow \varepsilon zu)\wedge\forall z(\varepsilon zx\rightarrow\varepsilon zy)\big) \qquad (12)$$

Zatem (12) jest twierdzeniem teorii $\mathbf{S}^{\varepsilon}$ oraz **S+def**ε. Jednak implikacja odwrotna do (12), tj. formuła

$$\big(\exists z(\varepsilon zx)\wedge\forall z\forall u((\varepsilon zx\wedge\varepsilon ux)\rightarrow \varepsilon zu)\wedge\forall z(\varepsilon zx\rightarrow\varepsilon zy)\big) \rightarrow \varepsilon xy \qquad (13)$$

nie jest prawdziwa w strukturze specjalnej dla $\mathbf{L}_{AI\varepsilon}$ generowanej przez rodzinę $\{\{1\},\{1,2\}\}$ należącą do $\mathfrak{K}^*$. Zatem (13) nie jest twierdzeniem teorii **S+def**ε oraz $\mathbf{S}^{\varepsilon}$.

Niech $\mathbf{L}_{\varepsilon}$ będzie językiem pierwszego rzędu bez identyczności, w którym jedynym predykatem jest 'ε'. W języku tym budujemy teorię **O** (elementarna ontologia Leśniewskiego[11]) o jedynym aksjomacie specyficznym:

$$\varepsilon xy \equiv \big(\exists z(\varepsilon zx)\wedge\forall z\forall u((\varepsilon zx\wedge\varepsilon ux)\rightarrow\varepsilon zu)\wedge\forall z(\varepsilon zx\rightarrow\varepsilon zy)\big) \qquad (\mathfrak{L})$$

1. ε-STRUKTURY. Zdefiniujmy następującą klasę niepustych rodzin zbiorów:

$$\mathfrak{K}^{\varepsilon} := \{\ \mathcal{R} \in \mathfrak{K} : \text{dla każdego } a \text{ jeśli } a \in \bigcup \mathcal{R}, \text{ to } \{a\} \in \mathcal{R}\}$$

Oczywiście, $\mathfrak{K}^{\varepsilon} \subset \mathfrak{K}*$ [12].

Niech $\mathcal{L}$ będzie językiem pierwszego rzędu bez identyczności, w którym występuje predykat 'ε'. Za M. Takano wprowadźmy określenie ([14]). Strukturę $\mathbb{A}_{\mathcal{L}}$ specjalną dla $\mathcal{L}$ nazywamy ε-strukturą wtedy i tylko wtedy, gdy $|\mathbb{A}_{\mathcal{L}}| \in \mathfrak{K}^{\varepsilon}$, tj. gdy spełnia warunek:

$$\text{jeśli } a \in X \in |\mathbb{A}_{\mathcal{L}}|, \text{ to } \{a\} \in |\mathbb{A}_{\mathcal{L}}|$$

W [14] udowodniono twierdzenie, które w naszej terminologii mówi, że dla teorii **O** zachodzi twierdzenie o epimorfizmie względem klasy $\mathfrak{K}^{\varepsilon}$:

TWIERDZENIE 4. $\mathbb{A}_{\varepsilon}$ jest modelem teorii **O** wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje takie $\mathcal{R} \in \mathfrak{K}^{\varepsilon}$, że $\mathbb{A}_{\varepsilon}$ jest epimorficzna z $\mathcal{R}_{\varepsilon}$. □

2. STRUKTURY ε-NIEZDEGENEROWANE. Niech $\mathcal{L}$ będzie językiem pierwszego rzędu bez identyczności, w którym występuje co najmniej predykat 'ε'. Dla struktur języka $\mathcal{L}$ wprowadźmy następujące pojęcia. Element $a \in |\mathbb{A}_{\mathcal{L}}|$ nazywamy ε-atomem w $\mathbb{A}_{\mathcal{L}}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\langle a,a\rangle \in \varepsilon^{\mathbb{A}}$. Element $a \in |\mathbb{A}_{\mathcal{L}}|$ nazywamy ε-zdegenerowanym w $\mathbb{A}_{\mathcal{L}}$ wtedy i tylko wtedy, gdy spełnia trzy poniższe warunki:

1° a nie jest ε-atomem,

2° istnieje takie b, że b jest ε-atomem i $\langle b,a\rangle \in \varepsilon^{\mathbb{A}}$,

3° dla dowolnych c i d jeśli c i d spełniają warunek 2°, to $\langle c,d\rangle \in \varepsilon^{\mathbb{A}}$.

Strukturę $\mathbb{A}_{\mathcal{L}}$ nazywamy ε-niezdegenerowaną wtedy i tylko wtedy, gdy w $\mathbb{A}_{\mathcal{L}}$ nie istnieje element ε-zdegenerowany[13].

LEMAT 3. Każdy model teorii **O** jest ε-niezdegenerowany.

DOWÓD Przypuśćmy, że a jest elementem ε-zdegenerowanym w modelu $\mathbb{A}_{\varepsilon}$. Wtedy wartościowanie v, dla którego $v(\text{'}x\text{'})=v(\text{'}y\text{'})=a$, spełnia poprzednik implikacji (13). Stąd v spełnia również następnik tej implikacji, tj. $\langle a,a\rangle\in\varepsilon^{\mathbb{A}}$. Zatem a jest ε-atomem, co jest sprzeczne z warunkiem 1° w definicji elementu ε-zdegenerowanego. W $\mathbb{A}_\varepsilon$ nie ma więc elementów ε-zdegenerowanych. □[14]

3. **RODZINY ε-NIEZDEGENEROWANE.** Niech, jak poprzednio, $\mathcal{L}$ będzie językiem pierwszego rzędu bez identyczności, w którym występuje co najmniej predykat 'ε'. Rozważmy przypadek, gdy $\mathbb{A}_{\mathcal{L}}$ jest strukturą specjalną dla $L_{\mathcal{L}}$ i ma uniwersum $\mathcal{R}$ (tzn. $\mathbb{A}_{\mathcal{L}}=\mathcal{R}_{\mathcal{L}}$). Zbiór $X\in\mathcal{R}$ jest ε-atomem w $\mathbb{A}_{\mathcal{L}}$ wtedy i tylko wtedy, gdy X jest jednoelementowy. Ponadto, zbiór $X\in\mathcal{R}$ jest ε-zdegenerowany w $\mathcal{R}_{\mathcal{L}}$ wtedy i tylko wtedy, gdy spełnia warunek:

$Card\ X>1$ i dla dokładnie jednego $Y\in\mathcal{R}$, $Card\ Y=1$ i $Y\subset X$ (#)[15]

Zdefiniujmy następującą klasę niepustych rodzin zbiorów:

$\mathfrak{R}^{\varepsilon n}:=\{\mathcal{R}\in\mathfrak{R}$: żaden zbiór w $\mathcal{R}$ nie spełnia warunku (#)$\}$

Zachodzi lemat:

LEMAT 4. Struktura $\mathcal{R}_{\mathcal{L}}$ jest ε-niezdegenerowana wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathcal{R}\in\mathfrak{R}^{\varepsilon n}$. □

Oczywiście, $\mathfrak{R}^{\varepsilon}\subset\mathfrak{R}^{\varepsilon n}$ oraz klasy $\mathfrak{R}^{\varepsilon n}$ i $\mathfrak{R}^*$ krzyżują się.

Udowodnijmy stwierdzenie:

STWIERDZENIE 5. Dla dowolnej rodziny $\mathcal{R}\in\mathfrak{R}$:

struktura $\mathcal{R}_\varepsilon$ jest modelem teorii **O** wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathcal{R}\in\mathfrak{R}^{\varepsilon n}$.

DOWÓD "⇒" wynika z lematów 3 i 4.

"⇐" Ze względu na uwagę we wstępie do tej części, wystarczy pokazać, że (13) jest prawdziwa w $\mathcal{R}_\varepsilon$, gdy $\mathcal{R}\in\mathfrak{R}^{\varepsilon n}$. Weźmy dowolne wartościowanie v spełniające poprzednik (13) w $\mathcal{R}_\varepsilon$. Zatem v('x') jest zbiorem niepustym, gdyż v spełnia '$\exists z(\varepsilon zx)$'. Skoro $\mathcal{R}\in\mathfrak{R}^{\varepsilon n}$ i v spełnia w $\mathcal{R}_\varepsilon$ formułę '$\forall z\forall u((\varepsilon zx\wedge\varepsilon ux)\rightarrow\varepsilon zu)$', więc v('x') musi być zbiorem jednoelementowym. Fakt ten i spełnianie w $\mathcal{R}_\varepsilon$ przez

v formuły '$\forall z(\varepsilon zx \to \varepsilon zy)$', wystarcza aby stwierdzić, że zbiór v('x') zawiera się w zbiorze v('y'). Zatem v spełnia w $\mathcal{R}_\varepsilon$ następnik implikacji (13), tj. formułę 'εxy'. □

Z powyższego stwierdzenia, twierdzenia 4 oraz inkluzji $\mathfrak{K}^\varepsilon \subset \mathfrak{K}^{\varepsilon n}$, wynika wniosek:

WNIOSEK 4. Dla każdej formuły φ języka $\mathbf{L}_\varepsilon$ poniższe trzy warunki są równoważne:

(*o*) φ jest twierdzeniem teorii **O**,

(*i*) dla każdego $\mathcal{R} \in \mathfrak{K}^{\varepsilon n}$, struktura $\mathcal{R}_\varepsilon$ jest modelem φ,

(*ii*) dla każdego $\mathcal{R} \in \mathfrak{K}^\varepsilon$, struktura $\mathcal{R}_\varepsilon$ jest modelem φ. □

Zatem możemy interpretować teorię **O** jako *teorię struktur specjalnych dla* $\mathbf{L}_\varepsilon$ *generowanych odpowiednio przez:*

(*IO 1*) *rodziny z* $\mathfrak{K}^{\varepsilon n}$,

(*IO 2*) *rodziny z* $\mathfrak{K}^\varepsilon$.

Oczywiście, interpretacja (*IO 1*) jest szersza od interpretacji (*IO 2*). Jednak przy rozszerzaniu teorii **O** możemy wybrać równoprawnie jedną z nich.

4. KONSERWATYWNE ROZSZERZENIA TEORII O. W języku $\mathbf{L}_{AI\varepsilon}$ zbudujemy cztery konserwatywne rozszerzenia teorii **O**. «Zamierzone» interpretacje dwóch z nich będą odpowiednio kontynuacją jednej z interpretacji (*IO 1*) bądź (*IO 2*) teorii **O**. Te dwie kontynuacje nie są równoważne.

Istotnie, ponieważ $\mathfrak{K}^\varepsilon \subset \mathfrak{K}^{\varepsilon n}$, więc zbiór formuł języka $\mathbf{L}_{AI\varepsilon}$ prawdziwych w każdej strukturze $\mathcal{R}_{AI\varepsilon}$ dla $\mathcal{R} \in \mathfrak{K}^{\varepsilon n}$ jest podzbiorem zbioru formuł prawdziwych w każdej strukturze $\mathcal{R}_{AI\varepsilon}$ dla $\mathcal{R} \in \mathfrak{K}^\varepsilon$. Jest to jednak zawieranie właściwe, gdyż przykładowo poniższe formuły:

$$\forall z(\varepsilon zx \to \varepsilon zy) \to Axy \tag{14}$$

$$Ixy \to \exists z(\varepsilon zx \wedge \varepsilon zy) \tag{15}$$

nie są prawdziwe w strukturze specjalnej dla $L_{AI\varepsilon}$ generowanej przez rodzinę $\{\{1,2\},\{2,3\}\}$ należącą do $\mathfrak{K}^{\varepsilon n}$ oraz zachodzi poniższy lemat:

LEMAT 5. Formuły (14) i (15) są prawdziwe w każdej strukturze $\mathcal{R}_{AI\varepsilon}$ dla $\mathcal{R}\in\mathfrak{K}^{\varepsilon}$.

DOWÓD Niech $\mathcal{R}\in\mathfrak{K}^{\varepsilon}$. Jeśli wartościowanie v spełnia w $\mathcal{R}_{AI\varepsilon}$ poprzednik implikacji (14), to $v(\text{'}x\text{'})\subseteq v(\text{'}y\text{'})$, tj. spełnia również jej następnik. Istotnie, niech $a\in v(\text{'}x\text{'})$. Wtedy $\{a\}\in\mathcal{R}$. Stąd $<\{a\},v(\text{'}x\text{'})>\in\varepsilon^{\mathcal{R}}$, czyli również $<\{a\},v(\text{'}y\text{'})>\in\varepsilon^{\mathcal{R}}$. Zatem $a\in v(\text{'}y\text{'})$.

Jeśli wartościowanie v spełnia w $\mathcal{R}_{AI\varepsilon}$ poprzednik implikacji (15), to spełnia również jej następnik. Istotnie, niech $v(\text{'}x\text{'})\cap v(\text{'}y\text{'})\neq \emptyset$, tj. istnieje takie a, że $a\in v(\text{'}x\text{'}) \cap v(\text{'}y\text{'})$. Wtedy $\{a\}\in\mathcal{R}$ i $<\{a\},v(\text{'}x\text{'})>\in\varepsilon^{\mathcal{R}}$ oraz $<\{a\},v(\text{'}y\text{'})>\in\varepsilon^{\mathcal{R}}$. □

Z wiosku 4 dla teorii O wynika, że dla dowolnej klasy $\mathcal{K}$ takiej, że $\mathfrak{K}^{\varepsilon}\subset \mathcal{K} \subset \mathfrak{K}^{\varepsilon n}$, dana formuła będzie tezą teorii O wtedy i tylko wtedy, gdy jest prawdziwa w każdej strukturze $\mathcal{R}_{\varepsilon}$ dla $\mathcal{R}\in\mathcal{K}$. Dla dwóch z takich klas odpowiednie będą, rozpatrywane w cz.IV, trzecie i czwarte konserwatywne rozszerzenie teorii O.

4. DEFINICYJNE ROZSZERZENIE TEORII O. Zbudujmy teraz w języku $L_{AI\varepsilon}$ definicyjne rozszerzenie teorii O, którego «zamierzona» interpretacja będzie kontynuacją interpretacji (*IO 2*)[16].

Za pomocą lematu 5 udowodnijmy stwierdzenie:

STWIERDZENIE 6. Poniższe formuły:

$$Axy \equiv \forall z(\varepsilon zx\rightarrow\varepsilon zy) \qquad (defA)$$

$$Ixy \equiv \exists z(\varepsilon zx\wedge\varepsilon zy) \qquad (defI)$$

są prawdziwe w każdej strukturze $\mathcal{R}_{AI\varepsilon}$ dla $\mathcal{R}\in\mathfrak{K}^{\varepsilon}$.

DOWÓD Wynika to z lematu 5 oraz z faktu, że implikacje:

$$Axy \rightarrow \forall z(\varepsilon zx\rightarrow\varepsilon zy)$$

$$\exists z(\varepsilon zx\wedge\varepsilon zy) \rightarrow Ixy$$

są prawdziwe w każdej strukturze specjalnej dla $L_{AI\varepsilon}$. □

Niech **O+def***AI* będzie definicyjnym rozszerzeniem teorii **O** za pomocą definicji (*defA*) i (*defI*). Wykorzystując stwierdzenie 6, twierdzenie 4 oraz metatwierdzenie z cz.I p.5, otrzymujemy:

TWIERDZENIE 5. $\mathfrak{A}_{AI\varepsilon}$ jest modelem teorii **O+def***AI* wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje takie $\mathcal{R}\in\mathfrak{K}^{\varepsilon}$, że $\mathfrak{A}_{AI\varepsilon}$ jest epimorficzna ze strukturą $\mathcal{R}_{AI\varepsilon}$. □

Z powyższego twierdzenia wyprowadzimy wniosek:

WNIOSEK 5. Dla każdej formuły φ języka $L_{AI\varepsilon}$: φ jest twierdzeniem teorii **O+def***AI* wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $\mathcal{R}\in\mathfrak{K}^{\varepsilon}$, struktura $\mathcal{R}_{AI\varepsilon}$ jest modelem φ. □

Z wniosków 5 i 2 (*resp.* 5 i 3 oraz inkluzji $\mathfrak{K}^{\varepsilon}\subset\mathfrak{K}^{*}$) wynika, że **O+def***AI* jest rozszerzeniem teorii $\mathbf{S}^{\varepsilon}$ (*resp.* **S+def**ε). Oczywiście, **O+def***AI* jest konserwatywnym rozszerzeniem **O**.

5. PREDYKATY '*E*' ORAZ '*O*' W TEORII O+def*AI*. Podobne rozważania, jak w poprzednich punktach dla formuł (*defA*) i (*defI*), analogiczne do badań w cz.II p.7 dla formuł (def_1O) i (def_1E), możemy przeprowadzić również dla poniższych formuł:

$$Oxy \equiv \neg\forall z(\varepsilon zx\rightarrow\varepsilon zy) \qquad (def_2O)$$

$$Exy \equiv \neg\exists z(\varepsilon zx\wedge\varepsilon zy) \qquad (def_2E)$$

Część IV
Odtworzenie elementarnej ontologii w niezdegenerowanychnych teoriach sylogistycznych

W części tej zbudujemy (nierównoważne) rozszerzenia teorii **S+def**ε i $\mathbf{S}^{\varepsilon}$ takie, iż formuła ($\mathfrak{L}$) będzie tezą tych rozszerzeń.

1. TEORIA $\mathbf{S}^{\varepsilon}_{\varepsilon n}$. W języku $L_{AI\varepsilon}$ zbudujemy teorię, która będzie konserwatywnym rozszerzeniem teorii **O**. Jej «zamierzona» interpretacja będzie kontynuacją interpretacji (*IO 1*) teorii **O**.

Teorią tą będzie rozszerzenie $S^{\varepsilon}_{\varepsilon n}$ teorii S^{ε}. Jego aksjomatami są formuły (I)-(VII) oraz:

$$\big(\exists z(\varepsilon zx)\wedge\forall z\forall u((\varepsilon zx\wedge\varepsilon ux)\to\varepsilon zu)\big)\to\varepsilon xx \qquad \text{(VIII)}$$

Zauważmy, że z (VIII) możemy bezpośrednio wyprowadzić implikację (13). Zatem, korzystając z uwagi we wstępie do cz.III, widzimy, iż tezą teorii $S^{\varepsilon}_{\varepsilon n}$ jest formuła ($\mathfrak{L}$). Czyli $S^{\varepsilon}_{\varepsilon n}$ jest rozszerzeniem teorii **O**. Za pomocą badań semantycznych pokażemy, że jest to rozszerzenie konserwatywne.

Udowodnijmy:

TWIERDZENIE 6. Struktura $\mathbb{A}_{AI\varepsilon}$ jest modelem teorii $S^{\varepsilon}_{\varepsilon n}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathbb{A}_{AI\varepsilon}$ jest modelem teorii S^{ε} i $\mathbb{A}_{AI\varepsilon}$ jest strukturą ε-niezdegenerowaną.

DOWÓD "⇒" Przypuśćmy, że *a* jest elementem ε-zdegenerowanym w $\mathbb{A}_{AI\varepsilon}$. Wtedy wartościowanie *v*, dla którego *v*('*x*')=*a*, spełnia poprzednik implikacji (VIII). Stąd *v* spełnia również następnik tej implikacji, więc *a* jest ε-atomem, co jest sprzeczne z warunkiem 1° w definicji elementu ε-zdegenerowanego. W $\mathbb{A}_{AI\varepsilon}$ nie ma więc elementów ε-zdegenerowanych.

"⇐" Załóżmy, że wartościowanie *v* spełnia poprzednik implikacji (VIII) w $\mathbb{A}_{AI\varepsilon}$. Zatem element *v*('*x*') spełnia warunki 2° i 3° w definicji elementu ε-zdegenerowanego. Ponieważ $\mathbb{A}_{AI\varepsilon}$ jest ε-niezdegenerowana, więc *v*('*x*') nie może spełniać warunku 1°, czyli jest ε-atomem w $\mathbb{A}_{AI\varepsilon}$. Zatem wartościowanie *v* spełnia również w $\mathbb{A}_{AI\varepsilon}$ następnik implikacji (VIII). □

Z powyższego twierdzenia, z lematu 4 i stwierdzenia 2 (*resp.* ze stwierdzenia 5) wynika:

STWIERDZENIE 7. Dla dowolnej rodziny $\mathcal{R}\in\mathfrak{K}$:

struktura $\mathcal{R}_{AI\varepsilon}$ jest modelem teorii $S^{\varepsilon}_{\varepsilon n}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathcal{R}\in\mathfrak{K}^{\varepsilon n}$. □

Z twierdzeń 3 i 6 oraz lematu 4 wyciągamy wniosek, będący twierdzeniem o epimorfizmie dla $S^{\varepsilon}_{\varepsilon n}$ względem klasy $\mathfrak{K}^{\varepsilon n}$:

TWIERDZENIE 7. Struktura $\mathbb{A}_{AI\varepsilon}$ jest modelem teorii $S^{\varepsilon}_{\varepsilon n}$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje takie $\mathcal{R}\in\mathfrak{K}^{\varepsilon n}$, że $\mathbb{A}_{AI\varepsilon}$ jest epimorficzna z $\mathcal{R}_{AI\varepsilon}$.

DOWÓD "⇒" Na mocy twierdzenia 6, $\mathbb{A}_{AI\varepsilon}$ jest ε-niezdegenerowana i jest modelem teorii S. Stąd, na mocy twierdzenia 3 i warunków epimorfizmu, istnieje takie $\mathcal{R}\in\mathfrak{K}$, że $\mathbb{A}_{AI\varepsilon}$ jest epimorficzna ze strukturą $\mathcal{R}_{AI\varepsilon}$ oraz $\mathcal{R}_{AI\varepsilon}$ jest ε-niezdegenerowana, tj. $\mathcal{R}\in\mathfrak{K}^{\varepsilon n}$.

"⇐" Na mocy lematu 4 i warunków epimorfizmu, $\mathbb{A}_{AI\varepsilon}$ jest ε-niezdegenerowana, więc na mocy twierdzeń 3 i 6, $\mathbb{A}_{AI\varepsilon}$ jest modelem teorii $S^{\varepsilon}_{\varepsilon n}$. □

Z ostatniego twierdzenia wyciągamy wniosek:

WNIOSEK 6. Dla każdej formuły φ języka $L_{AI\varepsilon}$: φ jest twierdzeniem teorii $S^{\varepsilon}_{\varepsilon n}$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $\mathcal{R}\in\mathfrak{K}^{\varepsilon n}$, struktura $\mathcal{R}_{AI\varepsilon}$ jest modelem φ. □

Z wniosków 4 i 6 wynika, że $S^{\varepsilon}_{\varepsilon n}$ jest konserwatywnym rozszerzeniem teorii O. Zaś z wniosków 5 i 6 oraz inkluzji $\mathfrak{K}^{\varepsilon}\subset\mathfrak{K}^{\varepsilon n}$ wynika, że O+def*AI* jest rozszerzeniem teorii $S^{\varepsilon}_{\varepsilon n}$.

2. STRUKTURY *AI*-NIEZDEGENEROWANE. Niech $\mathcal{L}$ będzie językiem pierwszego rzędu bez identyczności, w którym występują co najmniej dwa predykaty '*A*' oraz '*I*'. Dla struktur języka $\mathcal{L}$ wprowadźmy następujące pojęcia. Element $a\in|\mathbb{A}_{\mathcal{L}}|$ nazywamy *AI*-zdegenerowanym w strukturze $\mathbb{A}_{\mathcal{L}}$ wtedy i tylko wtedy, gdy spełnia trzy poniższe warunki:

1) *a* nie jest *AI*-atomem,

2) istnieje takie *b*, że *b* jest *AI*-atomem i $\langle b,a\rangle\in A^{\mathbb{A}}$,

3) dla dowolnych *c* i *d* spełniających warunek 2), $\langle c,d\rangle\in A^{\mathbb{A}}$.

Rozważmy przypadek szczegółowy, gdy $\mathbb{A}_{\mathcal{L}}$ jest modelem teorii

S lub **S+def**ε. Wtedy warunki 2) i 3) są odpowiednio równoważne poniższym warunkom:

2′) istnieje takie b, że b jest AI-atomem i $\langle b,a\rangle \in I^{\mathbb{A}}$,

3′) dla dowolnych c i d spełniających warunek 2′), $\langle c,d\rangle \in I^{\mathbb{A}}$.

Istotnie, wynika to z tego, iż formuły (10),(I) i (2) są twierdzeniami teorii **S**.

Strukturę $\mathbb{A}_{\mathcal{L}}$ nazywamy AI-niezdegenerowaną wtedy i tylko wtedy, gdy w $\mathbb{A}_{\mathcal{L}}$ nie istnieje element AI-zdegenerowany[17].

3. **RODZINY** ***AI*-NIEZDEGENEROWANE.** Zdefiniujmy następującą klasę niepustych rodzin zbiorów:

$\mathfrak{K}^{AIn} := \{\ \mathcal{R}\in\mathfrak{K}$: struktura $\mathcal{R}_{AI}$ jest AI-niezdegenerowana $\}$

Zauważmy, że dla $\mathcal{R}\in\mathfrak{K}^*$ pojęcia AI-atomu i ε-atomu są równoważne. Podobnie jest z pojęciami AI-zdegenerowania oraz ε-zdegenerowania w $\mathcal{R}_{AI\varepsilon}$, gdyż dla dowolnego $X\in\mathcal{R}\in\mathfrak{K}^*$, X jest AI-zdegenerowany w $\mathcal{R}_{AI}$ wtedy i tylko wtedy, gdy spełnia warunek (#) z cz.III p.3. Zatem jeśli $\mathcal{R}\in\mathfrak{K}^{AIn}\cap\mathfrak{K}^*$, to $\mathcal{R}\in\mathfrak{K}^{\varepsilon n}$. Ponadto, jeśli $\mathcal{R}\in\mathfrak{K}^{\varepsilon n}\cap\mathfrak{K}^*$, to $\mathcal{R}\in\mathfrak{K}^{AIn}$. Zatem otrzymujemy:

LEMAT 6. $\mathfrak{K}^{AIn}\cap\mathfrak{K}^* = \mathfrak{K}^{\varepsilon n}\cap\mathfrak{K}^*$. □

Stąd wynika, że $\mathfrak{K}^{\varepsilon}\subset\mathfrak{K}^{AIn}$.

4. **TEORIA** $\mathbf{S}_{AIn}$. W języku $\mathbf{L}_{AI}$ zbudujmy rozszerzenie $\mathbf{S}_{AIn}$ teorii **S** dodając do aksjomatów (I)-(V) poniższą implikację (ze zmienną wolną 'x'):

$$\begin{gathered}\Big(\exists z\big(Izx\wedge\forall u(Izu\to Azu)\big)\wedge\\ \wedge\forall z\forall u\big((Izx\wedge\forall y(Izy\to Azy)\wedge Iux\wedge\forall y(Iuy\to Auy))\to Izu\big)\Big)\to\\ \forall z(Ixz\to Axz)\end{gathered}\qquad\text{(IX)}$$

«Sens intuicyjny» tej formuły związany jest z AI-atomami (patrz: określenie (†) p.2. cz.II. i teza (10) teorii **S**, p.6. cz.II). Można go odtworzyć wykorzystując - wyprowadzone dalej - tezy (16)-(18) oraz «intuicje» związane z definicją (*def*ε).

Udowodnijmy twierdzenie:

TWIERDZENIE 8. Struktura $\mathbb{A}_{AI}$ jest modelem teorii S_{AIn} wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathbb{A}_{AI}$ jest modelem teorii S i $\mathbb{A}_{AI}$ jest strukturą AI-niezdegenerowaną.

DOWÓD "⇒" Przypuśćmy, że a jest elementem AI-zdegenerowanym w $\mathbb{A}_{AI}$. Wtedy wartościowanie v, dla którego $v(\text{'}x\text{'})=a$, spełnia poprzednik implikacji (IX). Stąd v spełnia również następnik tej implikacji oraz, na mocy tez (1) i (IV), $\langle a,a\rangle \in I^{\mathbb{A}}$. Zatem a jest AI-atomem, co jest sprzeczne z warunkiem 1) w definicji elementu AI-zdegenerowanego. W $\mathbb{A}_{AI}$ nie ma więc takich elementów.

"⇐" Załóżmy, że wartościowanie v spełnia poprzednik implikacji (IX) w $\mathbb{A}_{AI}$. Zatem element $v(\text{'}x\text{'})$ spełnia warunki 2′) i 3′) w definicji elementu AI-zdegenerowanego. Ponieważ $\mathbb{A}_{AI}$ jest AI-niezdegenerowana, więc $v(\text{'}x\text{'})$ nie może spełniać warunku 1), czyli jest AI-atomem w $\mathbb{A}_{AI}$. Zatem wartościowanie v spełnia również w $\mathbb{A}_{AI}$ następnik implikacji (IX). □

Z twierdzenia 8 i stwierdzenia 1 wynika stwierdzenie:

STWIERDZENIE 8. Dla dowolnej rodziny $\mathcal{R}\in\mathfrak{K}$: struktura $\mathcal{R}_{AI}$ jest modelem teorii S_{AIn} wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathcal{R}\in\mathfrak{K}^{AIn}$. □

Z twierdzeń 2 i 8 oraz lematu 6 wyciągamy wniosek, będący twierdzeniem o epimorfizmie dla teorii S_{AIn} względem klasy $\mathfrak{K}^{AIn} \cap \mathfrak{K}^*$:

TWIERDZENIE 9. Struktura $\mathbb{A}_{AI}$ jest modelem teorii S_{AIn} wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje takie $\mathcal{R}\in\mathfrak{K}^{AIn}\cap\mathfrak{K}^*$, że $\mathbb{A}_{AI}$ jest epimorficzna z $\mathcal{R}_{AI}$.

DOWÓD "⇒" Na mocy twierdzenia 8, $\mathbb{A}_{AI}$ jest AI-niezdegenerowana i jest modelem teorii S. Stąd, na mocy twierdzenia 2 oraz warunków epimorfizmu, istnieje takie $\mathcal{R}\in\mathfrak{K}^*$, że $\mathbb{A}_{AI}$ jest epimorficzna ze strukturą $\mathcal{R}_{AI}$ oraz $\mathcal{R}_{AI}$ jest AI-niezdegenerowana.

"$\Leftarrow$" Na mocy lematu 6 i warunków epimorfizmu, $\mathbb{A}_{AI}$ jest AI-niezdegenerowana, więc na mocy twierdzeń 2 i 8, $\mathbb{A}_{AI}$ jest modelem teorii S_{AIn}. □

Wyciągnijmy wniosek, analogiczny do wniosku 1:

WNIOSEK 7. Dla każdej formuły φ języka L_{AI} poniższe trzy warunki są równoważne:

(*o*) φ jest twierdzeniem teorii S_{AIn},

(*i*) dla każdego $\mathcal{R}\in\mathfrak{K}^{AIn}$, struktura $\mathcal{R}_{AI}$ jest modelem φ,

(*ii*) dla każdego $\mathcal{R}\in \mathfrak{K}^{AIn}\cap \mathfrak{K}^*$, struktura $\mathcal{R}_{AI}$ jest modelem φ.

DOWÓD "(*o*)$\Rightarrow$(*i*)" ze stwierdzenia 8. "(*i*)$\Rightarrow$(*ii*)" z $\mathfrak{K}^{AIn}\cap\mathfrak{K}^* \subset \mathfrak{K}^{AIn}$. "(*ii*)$\Rightarrow$(*o*)" Jeżeli $\mathbb{A}_{AI}$ jest dowolnym modelem teorii S_{AIn} , to na mocy twierdzenia 9, istnieje takie $\mathcal{R}\in\mathfrak{K}^*$, że $\mathbb{A}_{AI}$ jest epimorficzny z $\mathcal{R}_{AI}$ oraz $\mathcal{R}_{AI}$ jest AI-niezdegenerowana. Na mocy (*ii*) i lematu 1b, φ jest prawdziwa również w modelu $\mathbb{A}_{AI}$. Ponieważ był to dowolny model, więc na mocy twierdzenia Gödla o pełności, φ jest twierdzeniem teorii S_{AIn}. □

Z wniosków 5 i 7 oraz inkluzji $\mathfrak{K}^{\varepsilon}\subset \mathfrak{K}^{\varepsilon n}\cap\mathfrak{K}^*= \mathfrak{K}^{AIn}\cap\mathfrak{K}^*$ wynika, że teoria **O+def***AI* jest rozszerzeniem teorii S_{AIn}, lecz nie jest ono konserwatywne (przykładowo formuła '$Ixy \rightarrow \exists z(Izz\wedge Azx\wedge Azy)$' jest tezą **O+def***AI* a nie jest tezą S_{AIn}).

5. TEORIA S_{AIn}+defε. W języku $L_{AI\varepsilon}$ zbudujmy definicyjne rozszerzenie teorii S_{AIn} za pomocą formuły (*def*ε). Oznaczmy je przez 'S_{AIn}+defε'.

Korzystając z (*def*ε) oraz tezy (11) teorii **S+def**ε, wyprowadzimy jako tezę teorii S_{AIn}+defε poniższą formułę:

$$\big(\exists z(\varepsilon zx)\wedge\forall z\forall u((\varepsilon zx\wedge\varepsilon ux)\rightarrow Izu)\big) \rightarrow \forall z(Ixu\rightarrow Axz) \tag{16}$$

Z niej oraz z tez (1),(IV) i (11) otrzymujemy jako tezę:

$$\big(\exists z(\varepsilon zx)\wedge\forall z\forall u((\varepsilon zx\wedge\varepsilon ux) \rightarrow Izu)\big) \rightarrow \varepsilon xx \tag{17}$$

Ponieważ z (11) wyprowadzimy formułę:

$$(\forall z \forall u((\varepsilon zx \wedge \varepsilon ux) \rightarrow \varepsilon zu)) \equiv (\forall z \forall u((\varepsilon zx \wedge \varepsilon ux) \rightarrow Izu)) \quad (18)$$

więc z (17) i (18) wyprowadzimy (VIII). Zatem, korzystając z uwagi z p.1, widzimy, że tezą teorii S_{AIn}+defε jest jedyny aksjomat teorii **O** (tj. formuła ($\mathfrak{L}$)). Zatem S_{AIn}+defε jest rozszerzeniem teorii **O**. Za pomocą badań semantycznych pokażemy, że jest to rozszerzenie konserwatywne.

Ze stwierdzeń 4 i 8 oraz lematu 6 wynika:

STWIERDZENIE 9. Dla dowolnej rodziny $\mathcal{R} \in \mathfrak{K}$:

struktura $\mathcal{R}_{AI\varepsilon}$ jest modelem teorii S_{AIn}+defε wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathcal{R} \in \mathfrak{K}^{AIn} \cap \mathfrak{K}^*$. □

Wykorzystując stwierdzenie 3 oraz metatwierdzenie z cz.I p.5, otrzymujemy:

TWIERDZENIE 10. Struktura $\mathbb{A}_{AI\varepsilon}$ jest modelem teorii S_{AIn}+defε wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje takie $\mathcal{R} \in \mathfrak{K}^{AIn} \cap \mathfrak{K}^*$, że $\mathbb{A}_{AI\varepsilon}$ jest epimorficzna ze strukturą $\mathcal{R}_{AI\varepsilon}$. □

Wyciągnijmy wniosek :

WNIOSEK 8. Dla każdej formuły φ języka $L_{AI\varepsilon}$: φ jest twierdzeniem teorii S_{AIn}+defε wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $\mathcal{R} \in \mathfrak{K}^{AIn} \cap \mathfrak{K}^*$, struktura $\mathcal{R}_{AI\varepsilon}$ jest modelem φ. □

Z wniosków 5 i 8 oraz inkluzji $\mathfrak{K}^{\varepsilon} \subset \mathfrak{K}^* \cap \mathfrak{K}^{AIn}$ wynika, że teoria **O**+defAI jest rozszerzeniem teorii S_{AIn}+defε. Z tych dwóch faktów wynika, iż S_{AIn}+defε jest konserwatywnym rozszerzeniem teorii **O**. Istotnie, jest rozszerzeniem, gdyż ($\mathfrak{L}$) jest tezą teorii S_{AIn}+defε. Ponadto, jeśli formuła φ języka L_{ε} jest twierdzeniem teorii S_{AIn}+defε, to φ jest również tezą teorii **O**+defAI, czyli musi być również tezą teorii **O**, gdyż **O**+defAI jest konserwatywnym rozszerzeniem teorii **O**.

Z wniosków 6 i 8 oraz inkluzji $\mathfrak{K}^* \cap \mathfrak{K}^{AIn} \subset \mathfrak{K}^{\varepsilon n}$ wynika, że teoria S_{AIn}+defε jest rozszerzeniem teorii $S^{\varepsilon}_{\varepsilon n}$.

Korzystając z tez (11) i (18) teorii **S+def**ε, widzimy, że równoważność '(VIII)≡(IX)' jest tezą tej teorii, tzn. jest wyprowadzalna z formuł *(I)-(V),(def*ε*)*. Oznacza to, że S_{AIn}**+def**ε jest równoważna teorii opartej na aksjomatach (I)-(V), (*def*ε), (VIII). Wynik ten można również uzasadnić semantycznie, korzystając z lematu 6.

6. TEORIA $S^{\varepsilon}_{AI\varepsilon n}$. Konserwatywnym rozszerzeniem teorii **O** będzie również następujące rozszerzenie teorii $S^{\varepsilon}_{\varepsilon n}$, zbudowane w języku $L_{AI\varepsilon}$. Aksjomatami tego rozszerzenia będą formuły (I)-(IX). Oznaczmy je przez '$S^{\varepsilon}_{AI\varepsilon n}$'.

Dla teorii $S^{\varepsilon}_{AI\varepsilon n}$ można udowodnić twierdzenie o epimorfizmie względem klasy $\mathfrak{K}^{AIn}\cap\mathfrak{K}^{\varepsilon n}$, z niego zaś otrzymać wniosek:

WNIOSEK 9. Dla każdej formuły φ języka $L_{AI\varepsilon}$: φ jest twierdzeniem teorii $S^{\varepsilon}_{AI\varepsilon n}$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $\mathcal{R}\in\mathfrak{K}^{AIn}\cap\mathfrak{K}^{\varepsilon n}$, struktura $\mathcal{R}_{AI\varepsilon}$ jest modelem φ. □

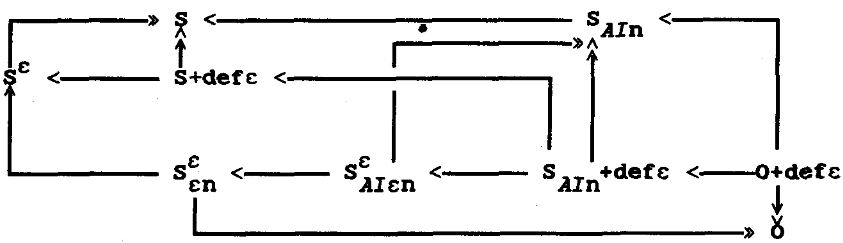
Ponieważ $S^{\varepsilon}_{\varepsilon n}$ jest rozszerzeniem teorii **O**, więc również $S^{\varepsilon}_{AI\varepsilon n}$ jest rozszerzeniem **O**. Pokażemy, iż jest to rozszerzenie konserwatywne. Istotnie, na mocy wniosków 8 i 9 oraz warunku:

$$\mathfrak{K}^{AIn}\cap\mathfrak{K}^{*} = \mathfrak{K}^{\varepsilon n}\cap\mathfrak{K}^{*} = \mathfrak{K}^{AIn}\cap\mathfrak{K}^{\varepsilon n}\cap\mathfrak{K}^{*} \subset \mathfrak{K}^{AIn}\cap\mathfrak{K}^{\varepsilon n}$$

widzimy, że teoria S_{AIn}**+def**ε jest rozszerzeniem teorii $S^{\varepsilon}_{AI\varepsilon n}$. Ponieważ S_{AIn}**+def**ε było konserwatywnym rozszerzeniem teorii **O**, więc również takim jest $S^{\varepsilon}_{AI\varepsilon n}$.

Podobnie - korzystając z tego, że S_{AIn}**+def**ε jest konserwatywnym rozszerzeniem teorii S_{AIn} - pokazujemy, że $S^{\varepsilon}_{AI\varepsilon n}$ jest konserwatywnym rozszerzeniem teorii S_{AIn} [18].

7. PODSUMOWANIE. Przedstawmy diagram, na którym zapis $T_2 \longleftarrow T_1$ oznacza, że teoria T_1 jest rozszerzeniem teorii T_2. Oczywiście, $\longleftarrow$ jest relacją przechodnią. Ponadto, zapis $T_2 \twoheadleftarrow T_1$ ma oznaczać rozszerzenie konserwatywne. Oczywiście, diagram $\begin{tikzcd} & T_3 & \\ T_1 \arrow[ur] \arrow[rr] & & T_2 \arrow[ul] \end{tikzcd}$ uzupełnimy do diagramu $\begin{tikzcd} & T_3 \arrow[dr] & \\ T_1 \arrow[ur] \arrow[rr] & & T_2 \arrow[ul] \end{tikzcd}$



BIBLIOGRAFIA

[1] B a t ó g T., *Podstawy logiki*, Poznań 1986.

[2] G u m a ń s k i L., *Logika klasyczna a założenia egzystencjalne*, Zeszyty Naukowe UMK, Filozofia I, Toruń 1960, s. 3-64.

[3] I s h i m o t o A., *A propositional fragment of Leśniewski's ontology*, Studia Logica, XXXVI 4 (1977), s. 285-299.

[4] I w a n u ś B., *On Leśniewski's Elementary Ontology*, Studia Logica XXXI (1973), s. 73-119.

[5] K o t a r b i ń s k i T., *Elementy teorii poznania, logiki formalnej i metodologii nauk*, wydanie II, Wrocław 1961.

[6] K ü n g G., *Nominalistische Logik heute*, Allgemeine Zeitschrift für Philosophie 1:1777, s. 29-52.

[7] K ü n g G., *Systemy Leśniewskiego* [w:] *Logika formalna. Zarys encyklopedyczny*, red. W.Marciszewski, Warszawa 1987.

[8] P i e t r u s z c z a k A., *Bezkwantyfikatorowy rachunek nazw. Systemy i ich metateoria*, Toruń 1991.

[9] P i e t r u s z c z a k A., *Pewien boole'owski rachunek*

nazw a elementarna teoria algebr Boole'a, Ruch Filozoficzny t. XLV 1 (1988), s.59-66.

[10] P i e t r u s z c z a k A., *Rachunek nazw Wedberga a system S_1 Iwanusia*, Ruch Filozoficzny t. XLV 3 (1988), s. 275-282.

[11] P i e t r u s z c z a k A., *Teoriomnogościowa formalizacja pewnej interpretacji formuł rachunku nazw z kwantyfikatorami*, Acta Uniwersitatis Nicolai Copernici, Nauki Humanistyczno-Społeczne, Logika II, zeszyt 235, 1991, s. 41-52.

[12] S h e p h e r d s o n J. C., *On the Interpretation of Aristotelian Syllogistic*, Journal of Symbolic Logic, vol. 21 no. 2 (1956), s. 137-147.

[13] S u c h o ń W., *Sylogistyka a nazwy puste*, Studia Filozoficzne 11-12 1984, s. 69-74.

[14] T a k a n o M., *A Semantical Investigation into Leśniewski's Axiom of His Ontology*, Studia Logica XLIV 1 (1985), s. 71-77.

PRZYPISY

[1] Na temat tzw. słabego i mocnego rozumienia stałych sylogistycznych, patrz m. in. w [2],[5],[13] i [8].

[2] Patrz m. in. [4],[5],[6],[7],[14] i [8].

[3] O takim utożsamianiu pisałem w [11]. Ponadto, w [9] i [10] dokładnie omówiłem przypadek, gdy wszystkie aksjomaty specyficzne badanej teorii pierwszego rzędu są formułami bezkwantyfikatorowymi (tzw. teorie otwarte). Wtedy bezkwantyfikatorowy fragment tej teorii możemy utożsamić z odpowiednim systemem bezkwantyfikatorowego rachunku nazw.

[4] W [11] przedstawiono próbę formalizacji pewnej interpretacji tych kwantyfikatorów (pochodzącej od Künga [6], [7]).

[5] '$\Leftrightarrow$' jest skrótem metajęzykowego zwrotu 'wtedy i tylko wtedy, gdy'.

[6] Warunek (†) jest w modelach teorii S mocniejszy od poniższego warunku:

$$\begin{aligned} &\langle a,a\rangle\in I^{\mathbb{A}} \text{ oraz dla dowolnego } b, \\ &\text{jeśli } \langle b,b\rangle\in I^{\mathbb{A}} \text{ i } \langle b,a\rangle\in A^{\mathbb{A}}\text{, to } \langle a,b\rangle\in A^{\mathbb{A}} \end{aligned} \qquad (+)$$

Ponieważ formuła:

$$(Iyy\wedge Ayx)\to Ixy$$

jest twierdzeniem teorii S, więc warunek (†) pociąga warunek (+). To, że nie zachodzi wynikanie odwrotne pokażemy na konkretnym przykładzie modelu teorii S. Zauważmy, że w dowolnej strukturze $\mathcal{R}_{AI}$ warunek (+) wyrazimy w następujący sposób:

$$X\neq\emptyset \text{ oraz dla każdego } Y\in\mathcal{R} \text{ jeśli } \emptyset\neq Y\subseteq X\text{, to } X\subseteq Y \qquad (++)$$

Zatem w rodzinie $\{\{1,2\},\{2,3\}\}$ oba jej elementy spełniają warunek (++), lecz nie spełniają warunku (‡).

Zauważmy, że jeśli rodzina $\mathcal{R}$ jest domknięta ze względu na iloczyn mnogościowy (tj. $X,Y\in\mathcal{R}$ pociąga $X\cap Y\in\mathcal{R}$), to warunek (‡) jest równoważny z warunkiem (++). Istotnie, jeśli $X\cap Y\neq\emptyset$, to na mocy $X\cap Y\subseteq X$, również $X\subseteq X\cap Y$. Zatem $X\subseteq Y$.

Ogólnie, warunki (†) oraz (+) są równoważne dla teorii o aksjomatach specyficznych (I),(II),(V) oraz

$$Ixy \equiv \exists z(Izz\wedge Azx\wedge Azy)$$

zbudowanej w L_{AI} i będącej rozszerzeniem teorii S ([11]). Istotnie, jeśli $\langle a,b\rangle\in I^{\mathbb{A}}$, to istnieje takie c, że $\langle c,c\rangle\in I^{\mathbb{A}}$ oraz $\langle c,a\rangle\in A^{\mathbb{A}}$ i $\langle c,b\rangle\in A^{\mathbb{A}}$. Zatem na mocy (+) i (II), $\langle a,b\rangle\in A^{\mathbb{A}}$.

[7] Przykładowo, w jednoelementowej rodzinie $\{\{1,2\}\}$.

[8] Zauważmy, że dla S nie zachodzi twierdzenie o epimorfizmie względem klasy tych niepustych rodzin, w których każdy zbiór spełniający warunek (++) z przypisu 6 jest jednoelementowy. Kontrprzykładem jest struktura specjalna dla L_{AI} o uniwersum $\{\{1,2\},\{2,3\}\}$.

[9] Łatwo pokazać, że układ aksjomatów (I)-(VII) jest równoważny układowi (I)-(VI),(5),(6) oraz układowi (I)-(VI),(4),(6),(7).

[10] Zauważmy, że dla dowolnej rodziny $\mathcal{R}\in\mathfrak{K}$ zachodzi: struktura $\mathcal{R}_{AI\varepsilon}$ jest modelem poniższej równoważności

$$\varepsilon xy \equiv (Ixx \wedge \forall z((Izz\wedge Azx) \rightarrow Axz) \wedge Axy)$$

wtedy i tylko wtedy, gdy każdy $X\in\mathcal{R}$ spełniający warunek (++) z przypisu 6 jest jednoelementowy.

Jednak, ze względu na uwagę w przypisie 8, do definicyjnego rozszerzenia teorii **S** za pomocą powyższej równoważności nie możemy zastosować metatwierdzenia z cz.I. Co więcej, dla takiego rozszerzenia definicyjnego nie zachodzi nawet twierdzenie o epimorfizmie względem klasy $\mathfrak{K}$. Istotnie, struktura $\mathbb{A}_{AI\varepsilon}$ o uniwersum $\{1,2\}$, w której $I^{\mathbb{A}}$ jest relacją pełną, zaś $A^{\mathbb{A}}$ i $\varepsilon^{\mathbb{A}}$ są identycznością, jest modelem tego rozszerzenia. Struktura $\mathbb{A}_{AI\varepsilon}$ nie jest modelem formuły (9) prawdziwej w każdej strukturze specjalnej dla $\mathbf{L}_{AI\varepsilon}$. Zatem na mocy lematu 1b, $\mathbb{A}_{AI\varepsilon}$ nie jest epimorficzna z żadną strukturą specjalną dla $\mathbf{L}_{AI\varepsilon}$.

[11] Przyjmujemy oznaczenie '**O**', gdyż nazwa 'elementarna ontologia' wraz z oznaczeniem '**EO**', przyjęta jest rownież dla innej teorii pierwszego rzędu bez identyczności ([4]), będącej rozszerzeniem teorii **O** powstałym po dodaniu jako aksjomatów specyficznych wszystkich formuł postaci:

$$\exists x\forall y(\varepsilon yx \equiv (\varepsilon yy\wedge\varphi))$$

gdzie φ jest formułą języka $\mathbf{L}_{\varepsilon}$, w której 'x' nie występuje jako zmienna wolna.

[12] Inkluzja ta nie jest odwracalna, gdyż $\{\{1\},\{1,2\}\}$ należy do $\mathfrak{K}^*$ a nie należy do $\mathfrak{K}^{\varepsilon}$.

[13] W [3] wprowadzono następujące pojęcia dla modeli teorii **O**. Element a nazywamy singularnym w $\mathbb{A}_{\varepsilon}$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\langle a,a\rangle\notin\varepsilon^{\mathbb{A}} \text{ i dla dokładnie jednego } b\in|\mathbb{A}_{\varepsilon}|,\ \langle b,a\rangle\in\varepsilon^{\mathbb{A}}$$

Oczywiście, każdy element singularny jest ε-zdegenerowany.

Strukturę $\mathbb{A}_{\varepsilon}$ nazywamy singularną wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje element singularny w $\mathbb{A}_{\varepsilon}$. Oczywiście, żadna struktura ε-niezdegenerowana nie jest singularna, lecz równoważność tych pojęć zachodzi tylko dla tzw. modeli normalnych ontologii ([14]), w których warunek $\langle a,b\rangle\in\varepsilon^{\mathbb{A}}$ i $\langle b,a\rangle\in\varepsilon^{\mathbb{A}}$ pociąga $a=b$.

[14] W [3] udowodniono lemat mówiacy, że żaden model teorii

O nie jest singularny. Biorąc pod uwagę poprzedni przypis, widzimy, że wynika to z lematu 3.

[15] W strukturach specjalnych dla L_ε (są to modele normalne teorii O; patrz przypis 13) pojęcie ε-zdegenerowania pokrywa się z pojęciem singularności, więc singularność sprowadza się wtedy również do warunku (#).

[16] W części IV w p.1, p.5 i p.6 zbudujemy trzy dalsze konserwatywne rozszerzenia teorii O.

[17] Dla modeli teorii **S+defε** pojęcia *AI*-atomu i ε-atomu (*resp.* *AI*-zdegenerowania i ε-zdegenerowania) są równoważne. Zatem dany model teorii **S+defε** jest *AI*-niezdegenerowany wtedy i tylko wtedy, gdy jest ε-niezdegenerowany.

[18] Podobne rozważania do powyższych można byłoby przeprowadzić dla teorii S^{ε}_{AIn} opartej na aksjomatach (I)-(VII),(IX). Jednak nie jest ona rozszerzeniem teorii O.