Pietruszczak, Andrzej

O ścisłym wynikaniu logicznym i jego modyfikacji

Acta Universitatis Nicolai Copernici. Logika 3 (255), 5-20

1992

ACTA UNIVERSITATIS NICOLAI COPERNICI

LOGIKA III - NAUKI HUMANISTYCZNO-SPOŁECZNE - ZESZYT 255 - 1992

Katedra Logiki

Andrzej Pietruszczak

O ŚCISŁYM WYNIKANIU LOGICZNYM I JEGO MODYFIKACJI

Wynikanie traktujemy jako pewną relację zachodzącą między zdaniami. Oczywiście, relację tę możemy rozumieć na wiele sposobów, jak również na wiele sposobów wyrażać ją w języku potocznym. W pracy tej chcę bliżej zanalizować pojęcie wynikania logicznego zaprezentowane przez Horsta Wessla w [4]. Owocem tej analizy ma być propozycja pewnych istotnych modyfikacji tego pojęcia.

1. ZBIÓR FORMUŁ TEORII WYNIKANIA. Literami reprezentującymi (w sensie występowania zamiast) dowolne zdania w sensie logicznym (inaczej: zmiennymi zdaniowymi) będą: 'p', 'q', 'r', 'p_1', 'p_2', ..., itd. Przyjmijmy, że **ZM** jest zbiorem złożonym ze zmiennych zdaniowych. Niech Σ będzie zbiorem schematów zdaniowych koniunkcyjno-alternatywno-negacyjnej klasycznej logiki zdań, tj. Σ jest najmniejszym zbiorem zawierającym zbiór **ZM** i spełniającym warunek: jeżeli $\alpha,\beta\in\Sigma$, to $\ulcorner{\sim}\alpha\urcorner\in\Sigma$, $\ulcorner(\alpha\wedge\beta)\urcorner\in\Sigma$ oraz $\ulcorner(\alpha\vee\beta)\urcorner\in\Sigma$. Symbole '$\sim$', '$\wedge$' oraz '$\vee$' reprezentują odpowiednio, rozumiane klasycznie, funktory zdaniotwórcze negacji, koniunkcji oraz alternatywy. Ponadto, przyjmijmy tzw. metajęzykowe definicje implikacji materialnej i równoważności materialnej mówiące, że $\ulcorner(\alpha \supset \beta)\urcorner$ jest skrótem formuły $\ulcorner(\sim\alpha\vee\beta)\urcorner$, zaś $\ulcorner(\alpha \equiv \beta)\urcorner$ - skrótem $\ulcorner((\sim\alpha\vee\beta)\wedge(\sim\beta\vee\alpha))\urcorner$ [1].

Niech

$$\Phi := \{ \ulcorner\alpha \vdash \beta\urcorner : \alpha,\beta\in\Sigma \}$$

W powyższej definicji '⊢' jest dwuargumentowym funktorem zdaniotwórczym od argumentów zdaniowych. Stałą tę możemy odczytać za pomocą zwrotu 'z tego, że..., wynika to, że...'. Zbiór Φ odpowiada zbiorowi *FDE* (tzw. wynikań pierwszego stopnia; [2]).

Formuły ze zbioru Φ są schematami zdań stwierdzających zachodzenie wynikania. Jeżeli dana formuła $\ulcorner\alpha \vdash \beta\urcorner$ będzie tezą jakiejś teorii wynikania, to będzie wyrażać jedynie ten fakt, że ze zdania o schemacie α wynika (w sensie przyjętym w danej teorii) zdanie o schemacie β. Przy czym wynikanie to oparte jest jedynie na interpretacji użytych spójników oraz na sposobie połączenia nimi zdań składowych[2].

Teorie wynikania przedstawiane przez Horsta Wessla i Aleksandra Zinowjewa można budować w zbiorze Φ .

Wessel i Zinowjew traktują stałą '⊢' jako predykat 'z...wynika...' łączący nazwy zdań, a nie same zdania (przykładowo patrz: [4] s. 158 i [9] s. 155). W swoich pracach używają oni pewnych funktorów nazwotwórczych działających na zmienne zdaniowe (patrz: [4] s. 158 i [9] s. 155, 166 i 167). Funktory te są opuszczane w formułach teorii, " aby «zbliżyć» zapis do zwykłego języka" ([9] s. 155). O «wątpliwej wartosci» takich funktorów nazwotwórczych pisał już Alfred Tarski w [1] (s. 10).

Nie będziemy w ogóle zajmować się powyższą kwestią, gdyż nie wniosłoby to nic istotnego do formalnych badań nad '⊢' uprawianych w zbiorze Φ. Rzeczywiście, stała '⊢' traktowana jako predykat tym różni się zasadniczo od '⊢' traktowanej jako spójnik zdaniowy, iż nie podlega iteracji (patrz np.: [9] s. 156, [4] s. 159 oraz [4] s. 34-36). W zbiorze Φ zaś z założenia nie ma iteracji stałej '⊢'.

Do badania predykatu 'z...wynika...' można również zbudować język formalny, w którym nie używany byłby funktor nazwotwórczy od argumentu zdaniowego. Jednak w takiej sytuacji występowałyby nie zmienne zdaniowe (za które w zastosowaniach podstawia się przecież zdania), lecz zmienne, za które w zastosowaniach podstawiałoby się nazwy zdań. Nie będziemy wchodzić w szczegóły budowy takiego języka, gdyż nie ma to istotnego związku z tematem pracy. Oczywiście, predykat wynikania nie podlegałby iteracji (jak każdy predykat; patrz [3], s. 34-36), lecz zdania atomowe utworzone za jego pomocą, można byłoby łączyć spójnikami zdaniowymi. Należy przy tym rozwiązać problem jak przedstawiać nazwy zdań złożonych, występujące w argumentach predykatu 'z...wynika...'. Najłatwiej użyć do tego celu języka pierwszego rzędu ze stałymi funkcyjnymi służącymi do budowy termów, reprezentujących (w sensie występowania zamiast) odpowiednio nazwy negacji zdania, koniunkcji zdań itd. Można byłoby użyć także języka, w którym zostałyby wprowadzone w sposób formalny quasi-cudzysłowy Quine'a.

2. TEORIA WYNIKANIA F^s. Aksjomatyczny system dedukcyjny F^s (ścisłego wynikania logicznego) jest rozwinięciem systemów tworzonych przez Zinowjewa[3] oraz systemu S^s (mocnego wynikania logicznego) zbudowanego przez Wessla i Zinowjewa[4].

Poniżej zdefiniuję kilka pojęć z klasycznego rachunku zdań, które będziemy wykorzystywać w dalszej części pracy.

Prawdziwościowym wartościowaniem zmiennych jest dowolna funkcja określona na **ZM** i przyjmująca wartości w zbiorze wartości logicznych {t,f}. Dla dowolnego wartościowania v, stosując klasyczną interpretację stałych '∼', '∧' i '∨', oraz indukcję po podformułach formuły α, wyznaczamy wartość logiczną $v(\alpha)$ formuły α przy wartościowaniu v [5].

Formuła α z Σ jest tautologią (*resp.* kontrtautologią) KRZ wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego wartościowania v zachodzi $v(\alpha)=t$ (*resp.* $v(\alpha)=f$). Formuła α jest kontyngentna wtedy i tylko wtedy, gdy ani nie jest tautologią, ani nie jest kontrtautologią.

Dla formuły α z Σ niech $\mathbf{ZM}\alpha$ będzie zbiorem zmiennych zdaniowych występujących w formule α.

Formuła $\ulcorner\alpha \vdash \beta\urcorner$ jest aksjomatem systemu $\mathbf{F}^s$ wtedy i tylko wtedy, gdy spełnia następujące trzy warunki:

(I) $\mathbf{ZM}\beta \subseteq \mathbf{ZM}\alpha$

(II) ani α nie jest kontrtautologią ani β nie jest tautologią

(III) podpada pod jeden z poniższych schematów:

$$A \vdash \sim\sim A \tag{A1}$$

$$\sim\sim A \vdash A \tag{A2}$$

$$A\wedge B \vdash A \tag{A3}$$

$$A\wedge B \vdash B\wedge A \tag{A4}$$

$$\sim(A\wedge B) \vdash (\sim A\vee \sim B) \tag{A5}$$

$$(\sim A\vee \sim B) \vdash \sim(A\wedge B) \tag{A6}$$

$$((A\vee B)\wedge C) \vdash ((A\wedge C)\vee B) \tag{A7}$$

$$((A\wedge C)\vee(B\wedge C)) \vdash ((A\vee B)\wedge C) \tag{A8}$$

$$A \vdash (A\wedge(B\vee \sim B)) \tag{A'9}$$

Tezami systemu $\mathbf{F}^s$ są te i tylko te formuły z Φ, które wyprowadzimy w standardowy sposób z aksjomatów za pomocą trzech reguł dowodzenia o następujących schematach:

$$\frac{A \vdash B \qquad B \vdash C}{A \vdash C} \tag{R2}$$

$$\frac{A \vdash B \qquad A \vdash C}{A \vdash (B \wedge C)} \tag{R2}$$

$$\frac{A \vdash B \qquad B \vdash A}{C \vdash C[A/B]} \tag{R3}$$

litery 'A', 'B' oraz 'C' zastępują tu dowolne formuły z Σ, lecz w przypadku (R3) spełniony jest dodatkowy warunek, że w miejscu 'C' nie stoi kontrtautologia, w miejscu zaś '$C[A/B]$' tautologia ('$C[A/B]$' symbolizuje formułę powstałą z formuły reprezentowanej przez 'C', po podstawieniu w miejsce formuły symbolizowanej przez 'A', symbolizowaną przez 'B').

W [4] dowodzi się twierdzenie o pełności dla $\mathbf{F}^s$:

Formuła $\ulcorner\alpha \vdash \beta\urcorner$ *jest tezą* $\mathbf{F}^s$ *wtedy i tylko wtedy, gdy spełnia warunki (I) i (II) oraz formuła* $\ulcorner\alpha \supset \beta\urcorner$ *jest tautologią KRZ.*

Prawa strona równoważności w powyższym twierdzeniu o pełności określa, według Wessla, tzw. "niezawodne reguły ścisłego wynikania". Zatem twierdzenie o pełności głosi, że dana formuła z Φ jest tezą $\mathbf{F}^s$ wtedy i tylko wtedy, gdy jest ona niezawodną regułą ścisłego wynikania.

Omówię teraz krótko przyjęte przez Wessla intuicyjne rozumienie warunków (I) i (II) występujących w tym określeniu (treść trzeciego - jako klasycznego - jest oczywista). Przez "jednostki sensu" danego zdania Wessel (podobnie jak Zinowjew) rozumie terminy oraz zdania proste wchodzące w skład tego zdania. W przypadku, gdy ograniczamy rozpatrywanie formuł do wyrażeń rachunku zdań, musimy przyjąć, że "jednostki sensu" danego zdania (tu zdania proste) reprezentowane są przez zmienne zdaniowe. Zatem warunek (I) głosi, że zbiór "jednostek sensu" zdania o schemacie β ma zawierać się w zbiorze "jednostek sensu" zdania o schemacie α. Warunek (II) głoszący, że "ze sprzeczności nie wynika logicznie żadne zdanie oraz zdanie tautologiczne nie wynika z żadnego zdania[6]", składa się z przeciwieństw, lecz nie z zaprzeczeń, dwóch klasycznych zasad mówiących odpowiednio, że "ze zdania sprzecznego wynika każde zdanie" oraz " zdanie tautologiczne wynika z każdego zdania".

3. TEORIA WYNIKANIA S^s. System mocnego wynikania logicznego S^s ma te same schematy reguł dowodzenia (z pominięciem zastrzeżenia w (R3)) oraz aksjomaty spełniające jedynie warunki (I) i (III), przy czym schemat (A'9) zastąpiony jest schematem:

$$A \vdash (B \vee \sim B) \qquad \text{(A9)}$$

Dla systemu tego zachodzi następujące twierdzenie o pełności:

Formuła $\ulcorner\alpha \vdash \beta\urcorner$ jest tezą S^s wtedy i tylko wtedy, gdy spełnia warunek (I) oraz formuła $\ulcorner\alpha \supset \beta\urcorner$ jest tautologią KRZ.

Zinowjew i Wessel uznają $\ulcorner\alpha\vdash \beta\urcorner$ za tzw. "niezawodną regułę mocnego wynikania", gdy α i β spełniają warunek (I), zaś $\ulcorner\alpha \supset\beta\urcorner$ jest tautologią KRZ (tzn., gdy $\ulcorner\alpha \vdash \beta\urcorner$ jest tezą systemu S^s).

W [4] (s. 163 i 164) analizowane są «braki» mocnego wynikania logicznego, spowodowane wyłączeniem warunku (II). My warunek ten przyjmiemy, więc nie będziemy wchodzić w szczegóły tej analizy. Oczywiście, przyjmiemy również warunek klasycznego wynikania logicznego głoszący, że formuła $\ulcorner\alpha \supset \beta\urcorner$ ma być tautologią KRZ.

4. ANALIZA WARUNKU (I). W pracy tej podejmiemy jedynie polemikę z warunkiem (I). Uważamy, że jest on nieodpowiedni przy precyzowaniu pojęcia wynikania logicznego i trzeba go zastąpić innym warunkiem.

Zauważmy, że do tez systemu F^s nie należą poniższe formuły, które Wessel uważa za odpowiedniki paradoksów implikacji materialnej i implikacji ścisłej Lewisa:

$$p \vdash (q \supset p) \qquad p \vdash (\sim p \supset q)$$

$$p \vdash (p \vee q) \qquad q \vdash (p \vee q)$$

$$(p \wedge \sim p) \vdash q \qquad p \vdash (q \vee \sim q)$$

Formuły te nie spełniają warunku (I) , ostatnie dwie dodatkowo - warunku (II). Oczywiście, warunek (I) może być zastąpiony tylko takim, który nie będzie spełniany przez powyższe formuły.

Jak zauważa sam Wessel, na "sens" zdania składają się jego "jednostki sensu" oraz "sens" występujących w nim spójników zdaniowych. Wydaje się jednak, że wymóg postawiony w warunku (I) nie oddaje tego w pełni. Na zakończenie prezentacji pojęcia ścisłego wynikania, zanalizujmy kilka, związanych z nim, problemów interpretacyjnych.

PROBLEM 1. Dlaczego mamy odrzucać jako niepoprawną formułę:

$$p \vdash (p \vee q) \tag{1}$$

przy czym mamy akceptować formuły:

$$(p \wedge \sim q) \vdash (p \vee q) \tag{2}$$

$$(p \wedge q) \vdash (p \vee \sim q) \tag{3}$$

Ad (2): wydaje się, że brak w pierwszym argumencie (tzw. racji) stałej '$\vdash$' "jednostki sensu" reprezentowanej przez 'q', jest mniej odczuwalny niż występowanie w racji "składnika jej sensu " reprezentowanego przez '$\sim q$'. Skoro sama "jednostka sensu" reprezentowana przez 'p' nie wystarcza do przyjęcia "sensu" reprezentowanego przez '$(p \vee q)$', to tym bardziej "sens" reprezentowany przez '$(p \wedge \sim q)$' nie powinien wystarczać.

Ad (3): analogiczna uwaga jak do (2).

Dwa poniższe problemy związane są z rolą "jednostek sensu" występujących jedynie w podformułach tautologicznych (*resp.* kontrtautologicznych):

PROBLEM 2. Dlaczego odrzucamy formułę (1), a akceptujemy formuły:

$$(p\wedge(q\vee {\sim}q)) \vdash (p\vee q) \tag{4}$$

$$(p\vee(q\wedge {\sim}q)) \vdash (p\vee q) \tag{5}$$

Ad (4): powstaje pytanie, czy w ogóle ma jakiekolwiek znaczenie "jednostka sensu" symbolizowana przez 'q' w racji tej formuły, skoro - zgodnie z akceptowaniem przez Wessla warunków (II) i (III) - formuła '$(q\vee {\sim}q)$' nic nam nie wnosi, zaś z samego 'p' nie wynika '$(p\vee q)$'?

Ad (5): analogiczna uwaga jak do (4).

Uważamy, że wszystkie formuły (1)-(5) należy odrzucić.

PROBLEM 3. Dlaczego mamy odrzucać formuły:

$$p \vdash (p\wedge(q\vee {\sim}q)) \tag{6}$$

$$p \vdash (p\vee(q\wedge {\sim}q)) \tag{7}$$

a akceptować formuły:

$$(p\wedge q) \vdash (p\wedge(q\vee {\sim}q)) \tag{8}$$

$$(p\wedge(q\vee {\sim}q)) \vdash (p\wedge(q\vee {\sim}q)) \tag{9}$$

$$(p\vee(q\wedge {\sim}q)) \vdash (p\wedge(q\vee {\sim}q)) \tag{10}$$

$$(p\wedge q) \vdash (p\vee(q\wedge {\sim}q)) \tag{11}$$

$$(p\vee(q\wedge {\sim}q)) \vdash (p\vee(q\wedge {\sim}q)) \tag{12}$$

$$(p\wedge(q\vee {\sim}q)) \vdash (p\vee(q\wedge {\sim}q)) \tag{13}$$

Ad (8): Skoro - zgodnie z poglądami Wessla - składnik '$(q\vee {\sim}q)$' w drugim argumencie (w tzw. następstwie) stałej '$\vdash$' nie wynika z 'p', gdyż nie wynika z niczego, więc z czego ma on wynikać w przypadku racji '$(p\wedge q)$'. Na pewno nie wpływa na niego składnik 'p' w racji. Nie wpływa również na niego składnik 'q' w racji, skoro odrzucamy formułę '$q \vdash (q\vee {\sim}q)$'.

Ad (9): zwróćmy uwagę na to, że odrzucamy formułę '$(q\vee \sim q) \vdash (q\vee \sim q)$'. Dalej analogiczne uwagi jak do (8).

Ad (10): zwróćmy uwagę na to, że odrzucamy formułę '$(q\wedge \sim q) \vdash (q\vee \sim q)$'. Dalej analogiczne uwagi jak do (8).

Ad (11): jaki wpływ ma składnik 'q' w racji na przyjęcie następstwa postaci '$(p\vee(q\wedge \sim q))$', skoro samo 'p' nie miało na to wpływu?

Ad (12): zwróćmy uwagę na to, że odrzucamy formułę '$(q\wedge \sim q) \vdash (q\wedge \sim q)$'. Dalej analogiczne uwagi jak do (11).

Ad (13): uwagi analogiczne jak do powyższych.

Uważamy, że formuły (6)-(13) należy zaakceptować.

Z zupełnie innym zagadnieniem związany jest następujący problem:

PROBLEM 4. *Dlaczego odrzucamy jako niepoprawną formułę (1), przy czym akceptujemy formuły:*

$$(p\wedge q) \vdash (p\vee q) \tag{14}$$

$$(p\vee(p\wedge q)) \vdash (p\vee q) \tag{15}$$

$$((p\wedge \sim q)\vee(p\wedge q)) \vdash (p\vee q) \tag{16}$$

Ad (14): pomimo tego, że racja i następstwo mają te same "jednostki sensu", jednak następstwo nie mówi o nich «całej prawdy» zawartej w racji, jest «słabsze informacyjnie». Uważamy, że w akceptowalnym wynikaniu ⌜$\alpha\vdash \beta$⌝, zdanie symbolizowane przez β może być uboższe w treść od zdania reprezentowanego przez α, jednak powinno wyciągać z α maksymalną treść o "jednostkach sensu" występujących w β.

Ad (15): Przyjmijmy nawet, że "zdanie [reprezentowane przez 'p'] jest uboższe w treść niż zdanie [reprezetowane przez '$(p\vee(p\wedge q))$']", ([5], s. 17). Jednak i w takim przypadku racja gwarantuje nam prawdziwość zdania symbolizowanego przez 'p', więc stosuje się tu uwaga przedstawiona w ad. (14).

Ad (16): "można utrzymywać, [że] zdanie [symbolizowane przez '$(p\vee(p\wedge q))$'] jest «skrótem» [reprezentowanego przez '$(p\wedge \sim q)\vee(p\wedge q)$]" ([5], s. 17), więc stosujemy uwagę do (15).

Uważamy, że formuły (14)-(16) należy odrzucić.

Wszystkie poprzednio analizowane motywy pojawiają się w poniższym problemie:

PROBLEM 5. Dlaczego mamy odrzucić formuły:

$$p \vdash (p\vee(p\wedge q)) \qquad (17)$$

$$p \vdash (p\wedge(p\vee q)) \qquad (18)$$

przy czym akceptować formuły:

$$(p\wedge q) \vdash (p\vee(p\wedge q)) \qquad (19)$$

$$(p\wedge \sim q) \vdash (p\vee(p\wedge q)) \qquad (20)$$

$$(p\wedge q) \vdash (p\wedge(p\vee q)) \qquad (21)$$

$$(p\wedge \sim q) \vdash (p\wedge(p\vee q)) \qquad (22)$$

$$(p\wedge(q\vee \sim q)) \vdash (p\vee(p\wedge q)) \qquad (23)$$

$$(p\vee(q\wedge \sim q)) \vdash (p\vee(p\wedge q)) \qquad (24)$$

$$(p\wedge(q\vee \sim q)) \vdash (p\wedge(p\vee q)) \qquad (25)$$

$$(p\vee(q\wedge \sim q)) \vdash (p\wedge(p\vee q)) \qquad (26)$$

Ad (17), (19), (20),(23) i (24): gdy akceptujemy przyjęte przez Wessla rozwiązanie, wyraźnie uważamy, że '$(p\vee(p\wedge q))$' ma więcej treści niż 'p'. Jest to sprawa dyskusyjna (patrz [5], s. 17). Można się nawet zgodzić, że ta dodatkowa treść wynika dzięki składnikowi 'q' w racji, ale dlaczego ma wynikać dzięki składnikowi '$\sim q$'? Chyba ta dodatkowa treść również nie wynika z '$(q\vee \sim q)$'? Nie może też na nią wpływać alternatywa, której jednym z członów jest sprzeczność.

Ad (18), (21), (22), (25) i (26): w tym wypadku, podobnie jak wyżej, gdy akceptujemy przyjęte przez Wessla rozwiązanie, uważamy, że '$(p\wedge(p\vee q))$' ma więcej treści niż 'p'. Dalej stosują się podobne uwagi jak poprzednio.

Uważamy, że wszystkie formuły (17)-(26) należy zaakceptować.

5. MODYFIKACJA POJĘCIA ŚCISŁEGO WYNIKANIA LOGICZNEGO. W punkcie tym chciałbym zaproponować, w miejsce warunku (I), nowy warunek jaki spełniać ma ściste wynikanie. W tym celu potrzebnych nam będzie kilka pojęć pomocniczych.

Na zbiorze $\{t,f\}$ wprowadźmy funkcję $\neg$ określoną następującymi równościami: $\neg t=f$ oraz $\neg f=t$. Przyjmijmy, że litery 'ρ' oraz 'q' są zmiennymi syntaktycznymi przebiegającymi zbiór $\mathbb{ZM}$. Utwórzmy teraz funkcję ze zbioru $\{t,f\}^{\mathbb{ZM}}$ w $\{t,f\}^{\mathbb{ZM}}$, która dowolnemu wartościowaniu v przyporządkowuje wartościowanie v^-_ρ określone w następujący sposób:

$$v^-_\rho(q)=\begin{cases} v(q) & \text{, gdy } q\neq\rho \\ \neg v(q) & \text{, gdy } q=\rho \end{cases}$$

Powyższa funkcja służy nam do wprowadzenia definicji:

DEFINICJA 1. *Zmienna ρ jest istotna w formule α z Σ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje takie wartościowanie v, że $v(\alpha)\neq v^-_\rho(\alpha)$.*

Niech $\mathbb{ZMI}\alpha$ będzie zbiorem zmiennych istotnych w formule α. Zauważmy, że ma on następujące własności:

- $\mathbb{ZMI}\alpha \subseteq \mathbb{ZM}\alpha$,
- $\mathbb{ZMI}\alpha \neq \emptyset$ wtedy i tylko wtedy, gdy α jest kontyngentna,
- jeśli wartościowania v i w pokrywają się na $\mathbb{ZMI}\alpha$, to $v(\alpha) = w(\alpha)$.

Tę ostatnią można udowodnić indukcyjnie po ilości zmiennych z $\mathbb{ZM}\alpha\backslash\mathbb{ZMI}\alpha$, na których różnią się wartościowania v i w.

Warunek, który ma zastąpić (I), przedstawia się następująco:

(*) *dla dowolnego wartościowania v : jeżeli $v(\beta)$=t, to istnieje takie wartościowanie w, że $w(\alpha)$=t, przy czym v oraz w pokrywają się na zbiorze* $\mathbb{ZM}\beta$.

Zauważmy, że jeżeli formuła $\ulcorner\alpha \vdash \beta\urcorner$ z Φ spełnia powyższy warunek oraz α jest kontrtautologią, to również β jest kontrtautologią.

Drugi warunek, jaki spełniać ma zmodyfikowane ścisłe wynikanie, jest następujący:

(**) β jest formułą kontyngentną.

Jak łatwo zauważyć, układ warunków (*) i (**) jest mocniejszy od układu warunków (*) i (II). Istotnie, jeżeli β jest formułą kontyngentną, to z definicji nie jest tautologią, zaś na mocy (*), α nie jest kontrtautologią

Zmodyfikowane ścisłe wynikanie logiczne ma oczywiście spełniać również warunek klasycznego wynikania:

(***) *dla dowolnego wartościowania v : jeśli $v(\alpha)$=t, to $v(\beta)$=t*

Również łatwo można zauważyć, że układ warunków (*)-(***) jest równoważny z układem warunków (*), (II) i (***). Istotnie, warunki (*) plus (**) są mocniejsze od (*) i (II). Ponadto, z warunków (II) i (***) wynika następujący, mocniejszy od (II), warunek:

(II_m) formuły α oraz β są kontyngentne.

Jest on mocniejszy od (**).

Jak łatwo zauważyć, z warunków (II) i (***) wyprowadzimy następujący, słabszy od (I), warunek występujący w tzw. osłabionym wynikaniu logicznym ([9]) :

(I_s) $$\mathbb{ZM}\alpha \cap \mathbb{ZM}\beta \neq \emptyset$$

Zatem wyprowadzimy go również z układu (*)-(***).

Zauważmy, że układu warunków (*)-(***) nie spełniają poprzednio wymienione odpowiedniki paradoksów implikacji materialnej i implikacji ścisłej, oraz wszystkie formuły (1)-(5), (14)-(16). Układ ten spełniają jednak formuły (6)-(13), (17)-(26).

Udowodnimy twierdzenie:

TWIERDZENIE 1. *Jeśli formuła* $\ulcorner\alpha \vdash \beta\urcorner$ *spełnia warunki* (*) *i* (***), *to spełnia również poniższy warunek:*

(I$_0$) $\mathbb{ZM}0\beta \subseteq \mathbb{ZM}0\alpha.$

DOWÓD Przyjmijmy nie wprost, że istnieje taka zmienna ρ, iż $\rho\in\mathbb{ZM}0\beta$ oraz $\rho\notin\mathbb{ZM}0\alpha$. Na mocy tego założenia β jest formułą kontyngentną oraz istnieje takie wartościowanie v , że $v(\beta)\neq v^{-}_{\rho}(\beta)$. Zatem α również jest kontyngentna. Rozważmy możliwe dwa przypadki alternatywne: *a)* $v(\beta)=\mathbf{t}$ i $v^{-}_{\rho}(\beta)=\mathbf{f}$; *b)* $v^{-}_{\rho}(\beta)=\mathbf{t}$ i $v(\beta)=\mathbf{f}$. *Przypadek a):* Na mocy warunku (*), istnieje takie wartościowanie w, że $w(\alpha)=\mathbf{t}$, przy czym v oraz w pokrywają się na zbiorze $\mathbb{ZM}0\beta$. Na mocy drugiego warunku w założeniu nie wprost, również $w^{-}_{\rho}(\alpha)=\mathbf{t}$. Teraz na mocy (***), otrzymujemy, że $w^{-}_{\rho}(\beta)=\mathbf{t}$. Oczywiście, v^{-}_{ρ} pokrywa się na zbiorze $\mathbb{ZM}0\beta$ z w^{-}_{ρ}. Zatem otrzymujemy sprzeczność z $v^{-}_{\rho}(\beta)\neq w^{-}_{\rho}(\beta)$. *Przypadek b):* analogicznie jak w *a)*, wychodząc od wartościowania v^{-}_{ρ}. □

Oczywiście, warunek (**) nie odgrywa roli w powyższym twierdzeniu, gdyż jeśli β nie jest kontyngentna, to $\mathbb{ZM}0\beta = \emptyset$. Ponadto zauważmy:

UWAGA Ani z układu (I$_0$), (**), (***) ani z układu (I$_0$), (II), (***) nie wynika warunek (*). Świadczą o tym formuły (2),(3) i (14).

Udowodnijmy poniższy lemat:

LEMAT 1. *Jeśli* $\mathbf{ZM}\!\!\restriction\!\alpha \subseteq \mathbf{ZM}\!\!\restriction\!\beta$ *oraz formuła* $\ulcorner\alpha \vdash \beta\urcorner$ *spełnia warunki* (*)-(***), *to również formuła* $\ulcorner\beta \vdash \alpha\urcorner$ *je spełnia.*

DOWÓD Weźmy dowolne wartościowanie v, dla którego $v(\beta)=$ t (takie wartościowanie istnieje na mocy (**)). Ponieważ $\ulcorner\alpha \vdash \beta\urcorner$ spełnia warunek (*), więc istnieje takie wartościowanie w , że $w(\alpha)=$t oraz v i w równe są na zbiorze $\mathbf{ZM}\!\!\restriction\!\beta$. Ponieważ z założenia $\mathbf{ZM}\!\!\restriction\!\alpha \subseteq \mathbf{ZM}\!\!\restriction\!\beta$, więc również $v(\alpha)=$ t. Zatem formuła $\ulcorner\beta \vdash \alpha\urcorner$ spełnia warunek (***). Spełnia również warunek (*), ponieważ $\ulcorner\alpha \vdash \beta\urcorner$ spełnia warunek (***).Ponadto, α jest kontyngentna, gdyż β jest kontyngentna. □

Z powyższego lematu i twierdzenia wyciągamy jako wniosek:

TWIERDZENIE 2. *Jeśli* $\mathbf{ZM}\!\!\restriction\!\alpha = \mathbf{ZM}\!\!\restriction\!\beta$, *to warunki* (*)-(***) *są spełniane w sposób równoważny przez formuły* $\ulcorner\alpha \vdash \beta\urcorner$ *i* $\ulcorner\beta \vdash \alpha\urcorner$. □

Na koniec, wprowadźmy następujące pojęcie pomocnicze, mające związek z problemem 4:

DEFINICJA 2. *Formuła* α *z* Σ *ustala wartość zmiennej* p *wtedy i tylko wtedy, gdy* α *jest kontyngentna oraz dla dowolnych wartościowań* v *i* w *jeśli* $v(\alpha)=\text{t}=w(\alpha)$, *to* $v(p)=w(p)$.

Niech $\mathbf{ZMU}\alpha$ będzie zbiorem zmiennych mających ustaloną wartość przez formułę α. Zauważmy, że

- dla dowolnych $p\in\mathbf{ZMU}\alpha$ oraz wartościowania v, jeśli $v(\alpha)=$t, to $v_p^-(\alpha)=$f.
- $\mathbf{ZMU}\alpha \subseteq \mathbf{ZM}\!\!\restriction\!\alpha$

Rzeczywiście, jeśli $p\in\mathbf{ZMU}\alpha$, to musi istnieć takie wartościowanie w, że $w(\alpha)=$t, oraz dla każdego wartościowania v jeśli $v(\alpha)=$t, to $v_p^-(\alpha)=$f. Zatem dla w mamy $w(\alpha)=$t i $w_p^-(\alpha)=$f.

Udowodnijmy kilka twierdzeń podających związek pomiędzy zbiorami $\mathbf{ZMU}\alpha$ i $\mathbf{ZM}\!\!\restriction\!\alpha$ oraz warunkami (*)-(***).

LEMAT 2. *Jeśli formuła* $\ulcorner\alpha \vdash \beta\urcorner$ *spełnia warunek* (*), *to*

$$\mathbf{ZMU}\alpha \cap \mathbf{ZMI}\beta \subseteq \mathbf{ZMU}\beta.$$

DOWÓD Niech $p \in \mathbf{ZMU}\alpha \cap \mathbf{ZMI}\beta$. Wtedy β jest formułą kontyngentną. Weźmy dowolne wartościowania v i w takie, że $v(\beta) = t = w(\beta)$. Na mocy warunku (*), istnieją wartościowania v' i w' pokrywające się odpowiednio z v i w na zbiorze $\mathbf{ZMI}\beta$ oraz takie, że $v'(\alpha) = t = w'(\alpha)$. Na mocy faktu, iż $p \in \mathbf{ZMU}\alpha$, otrzymujemy $v'(p) = w'(p)$. Stąd z uwagi na to, iż $p \in \mathbf{ZMI}\beta$ oraz v' i w' pokrywają się odpowiednio z v i w na zbiorze $\mathbf{ZMI}\beta$ mamy również $v(p) = w(p)$. □

Zachodzi ponadto:

LEMAT 3. *Jeśli formuła* $\ulcorner\alpha \vdash \beta\urcorner$ *spełnia warunek* (***), α *zaś nie nie jest kontrtautologią, to* $\mathbf{ZMU}\beta \subseteq \mathbf{ZMU}\alpha$.

DOWÓD Niech $p \in \mathbf{ZMU}\beta$. Wtedy β jest formułą kontyngentną. Zatem, na mocy założenia, α również jest formułą kontyngentną. Reszta dowodu wynika z warunku (***). □

Z powyższych dwóch lematów i inkluzji $\mathbf{ZMU}\beta \subseteq \mathbf{ZMI}\beta$ otrzymujemy, jako natychmiastowy wniosek:

TWIERDZENIE 3. *Jeśli* $\ulcorner\alpha \vdash \beta\urcorner$ *spełnia warunki* (*)-(***), *to*

$$\mathbf{ZMU}\alpha \cap \mathbf{ZMI}\beta = \mathbf{ZMU}\beta. \quad \square$$

BIBLIOGRAFIA

[1] T a r s k i A., *Pojęcie prawdy w językach nauk dedukcyjnych*, Warszawa 1933.

[2] T o k a r z M., *O wynikaniu pierwszego stopnia*, Acta Universitatis Wratislaviensis No 352, Prace Filozoficzne XX, Logika 6 (1978), s. 33-41.

[3] Q u i n e W. V. O., *Logika matematyczna*, Warszawa 1974.

[4] W e s s e l H., *Logik*, Berlin 1984.

[5] W ó j c i c k i R., *Romana Suszki semantyka sytuacyjna*, Studia Filozoficzne nr 7, 1984, s. 3-19.

[6] Z i n o w j e w A., *Łogika wyskazywanii i tieorija wywoda*, Moskwa 1962.

[7] Z i n o w j e w A., *Łogiczeskoje sledowanije* [w:] *Problemy łogiki i tieorii poznanija*, Moskwa 1968.

[8] Z i n o w j e w A., *Kompleksnaja łogika*, Moskwa 1970.

[9] Z i n o w j e w A., *Logika nauki*, Warszawa 1976.

PRZYPISY

[1] Oczywiście, mogliśmy wprowadzić symbole '$\supset$' oraz '$\equiv$' bezpośrednio w definicji zbioru Σ (tzn. formuły postaci $\ulcorner(\alpha \supset \beta)\urcorner$ i $\ulcorner(\alpha \equiv \beta)\urcorner$ należałyby do zbioru Σ, a nie byłyby jedynie skrótami innych formuł z Σ). Nie chcemy jednak w tym przypadku odchodzić od sposobu zastosowanego w [4].

[2] Za pomocą formuł z Φ nie wyrazimy przykładowo prawa mówiącego, że jeżeli ze zdania prawdziwego wynika drugie zdanie, to również to drugie jest prawdziwe. W tym przypadku musielibyśmy posłużyć się formułą '$(p\wedge(p\vdash q))\supset q$'. Dla prawa zaś mówiącego, że jeśli z jakiegoś zdania wynika drugie zdanie fałszywe, to również to pierwsze jest fałszywe, trzeba by użyć formuły '$((p \vdash q) \wedge {\sim}q) \supset {\sim}p$'.

[3] Znajdują się one m. in. w [6], [7], [8] i [9].

[4] System ten można znaleźć w [4], jest on równoważny systemowi S^{M} , przedstawionemu w [9].

[5] Używamy tego samego oznaczenia, lecz nie prowadzi to do nieporozumień, gdyż z założenia funkcja v jest określona na $\mathbb{Z}$M. Zamiast $v(\alpha)$ moglibyśmy pisać $\mathrm{Val}_{v}(\alpha)$.

[6] "Gdyż jest ważne z samych powodów logicznych"; [4], s. 165.