Gorzka, Cezary

A.N. Whiteheada metoda ekstensywnej abstrakcji z "Process and reality"

Acta Universitatis Nicolai Copernici. Logika 3 (255), 77-92

1992

ACTA UNIVERSITATIS NICOLAI COPERNICI

LOGIKA III - NAUKI HUMANISTYCZNO-SPOŁECZNE - ZESZYT 255 - 1992

Katedra Logiki

Cezary Gorzka

A. N. WHITEHEADA METODA EKSTENSYWNEJ ABSTRAKCJI Z *PROCESS AND REALITY*[1]

Trwałe miejsce w gronie wybitnych logików zapewniły Alfredowi North Whiteheadowi słynne *Principia Mathematica* (1910-1913) napisane wraz z Bertrandem Russellem. Natomiast pierwszymi pracami, dzięki którym dał się on poznać jako twórczy i oryginalny filozof oraz znawca fizyki teoretycznej (sic!) były trzy jego książki: *An Enquiry Concerning the Principles of Natural Knowledge* (1919), *The Concept of Nature* (1920) i *The Principle of Relativity, with Applications to Physical Science* (1922). Ostatnia z nich ukazała się dwa lata przed wyjazdem autora do USA i wraz z pozostałymi stanowi szczytowe osiągnięcie okresu londyńskiego jego twórczości, przypadającego na lata 1914-1924. W tym czasie Whitehead był profesorem matematyki stosowanej w Imperial College of Science and Technology w Londynie. Zagadnienia rozpatrywane w tych dziełach należą głównie do filozofii nauki i filozofii przyrody, chociaż ostatnie z wymienionych jest w przeważającej mierze poświęcone problemom z zakresu fizyki teoretycznej. Zawiera ono teorię grawitacji odmienną od ogólnej teorii względności, bo opartą o czasoprzestrzeń Minkowskiego. Jednak mimo tej istotnej różnicy przewidywania teorii Whiteheada w odniesieniu do takich zjawisk jak: obrót peryhelium Merkurego, zakrzywienie promieni świetlnych i przesunięcie ku podczerwieni w pobliżu dużych mas (są to podstawowe sprawdziany empiryczne ogólnej teorii względności) nie różnią się od przewidywań teorii Einsteina. Cennym, choć mało znanym wkładem wniesionym przez te dzieła do filozofii nauki jest **metoda ekstensywnej abstrakcji** (method of extensive abstraction). Pod tą nazwą kryje się skonstruowana przez Whiteheada interpretacja pojęć geometrycznych niezbędnych do matematycznego opisu czasoprzestrzeni jako pewnych dystrybutywnych zbiorów złożonych z czterowymiarowo rozciągłych procesów nazwanych przezeń **zdarzeniami** (events). W konsekwencji punkty, proste, zdarzenia elementarne, momenty, etc., można wykluczyć z grona realnych składników przyrody i uznać je za abstrakty uzyskane ze zdarzeń za pomocą specjalnych konstrukcji logicznych. Prowadzi to do ufundowania geometrii czasoprzestrzeni na specjalnej procesualnej ontologii przyrody utożsamianej w tym przypadku z formalną teorią zdarzeń.

Whitehead polecił zniszczyć wszystkie swoje notatki, manuskrypty i korespondencję, trudno więc ustalić kiedy odkrył on główne idee metody ekstensywnej abstrakcji. Jej pewne zalążki można rozpoznać w opublikowanej w 1906 roku rozprawie pt. *On Mathematical Concept of the Material World.* Po raz pierwszy pojęcie abstrakcyjnej klasy zdarzeń, które stanowi fundament tej metody wraz z jej rudymentarnym szkicem, pojawiło się w artykule *La Théorie Relationniste de l'Espace* opublikowanym na łamach *Revue de Metaphysique et Morale*, vol. 23 (1916). Był to autoreferat odczytu, który Whitehead wygłosił na Międzynarodowym Kongresie Filozoficznym w Paryżu w 1914 roku. Jednak prace nad samą metodą musiały rozpocząć się kilka lat wcześniej. Już bowiem w 1912 roku Bertrand Russell we wstępie do swojej książki *Our Knowledge of External World* zapowiadał rychłe ukazanie się kolejnego, czwartego tomu *Principia Mathematica*, który miał być wyłącznie dziełem Whiteheada, dotyczyć podstaw geometrii i zawierać m. in. szczegółowy wykład metody ekstensywnej abstrakcji. Tom ów nie został opublikowany, swoją zaś metodę po raz pierwszy Whitehead zaprezentował w pierwszej z wymienionych na wstępie książek. Zawarta w tej książce teoria zdarzeń[2] zakłada istnienie dwóch istotnie różnych typów zdarzeń: **zdarzeń skończonych** oraz zdarzeń nieskończonych, zwanych przez Whiteheada **trwaniami**. Podstawową relacją zachodzącą między zdarzeniami (skończonymi i trwaniami) jest dwuargumentowa relacja **rozciągłości**, którą można pojmować jako odwrotność merologicznej relacji bycia częścią. Podstawowym narzędziem służącym do ufundowania geometrii czasoprzestrzeni na bazie zdarzeń jest abstrakcyjna klasa zdarzeń. Tym terminem nazywa Whitehead dystrybutywny, nieskończony zbiór zdarzeń taki, że dla dowolnych dwóch zdarzeń należących do tego zbioru jedno z nich rozciąga się na drugie. Wprawdzie ta wersja metody ekstensywnej abstrakcji w zasadzie spełniła swoje zadanie i pozwoliła określić geometrię czasoprzestrzeni w terminach zdarzeń, jednak jej poważną wadą jest konieczność definiowania zdarzeń elementarnych resp. punktów, prostych, płaszczyzn za pomocą trwań. Whitehead zdawał sobie sprawę z różnych mankamentów tej metody i, w opublikowanym w 1929 roku swoim filozoficznym opus magnum pt. *Process and Reality* w jego części IV noszącej tytuł *The Theory of Extension*, przedstawił nowy, znacznie udoskonalony wariant tej metody. Od wersji wcześniejszej różni się on przede wszystkim tym, iż zakłada istnienie tylko jednego typu zdarzeń, mianowicie zdarzeń skończonych, które w *Process and Reality* nazywają się regionami (regions). Ponadto, relacją zachodzącą między regionami nie jest relacja rozciągłości, lecz ogólniejsza relacja nosząca nazwę **ekstensywnego połączenia** (extension connection). Pomysł tej zmiany zaczerpnął on od Theodore de Laguna[3].

Poglądowo dwa regiony można uważać za ekstensywnie połączone, gdy mają one region wspólny lub zewnętrznie przylegają wzdłuż swoich brzegów lub stykają się w jednym albo kilku punktach.

Zarówno w przypadku metody wcześniejszej, jak i tej opisanej w *Process and Reality* punktem wyjścia dalszych konstrukcji jest odpowiednio zmieniona cantorowska idea przedziałów zstępujących, którą w pierwszym przypadku wyraża abstrakcyjna klasa (resp. zbiór) zdarzeń, w drugim zaś jej udoskonalony odpowiednik noszący nazwę '**abstrakcyjnego zbioru regionów**' (abstractive set of regions). Są to zatem dwa warianty tej samej w istocie metody różniące się przede wszystkim tym, że w wariancie późniejszym, aby zdefiniować punkty, proste, płaszczyzny i przestrzenie trójwymiarowe Whitehead nie musiał postulować istnienia szczególnego typu regionów, które odgrywałyby rolę podobną do trwań z *An Enquiry Concerning the Principles of Natural Knowledge*. Wprawdzie regiony należy pojmować jak ograniczone obszary czasoprzestrzeni[4] i pod tym względem nie różnią się one od zdarzeń skończonych, jednak ich statut ontyczny jest całkowicie inny od statutu zdarzeń z wczesnej filozofii Whiteheada. Szczęściem dla zrozumienia metody ekstensywnej abstrakcji znajomość niuansów jego metafizyki nie jest konieczna i bez uszczerbku dla jasności dalszych wywodów można się śmiało bez niej obejść.

W tej udoskonalonej wersji metody ekstensywnej abstrakcji pojęciami pierwotnymi są regiony oraz dwuargumentowa relacja ekstensywnego połączenia, którą oznaczam symbolem '*con*'. Zmiennymi przebiegającymi zbiór $\mathcal{R}$ regionów będą litery 'x', 'y', 'z', 'u' (z indeksami lub bez).

Definicje relacji **rozciągłości** (zwrotnej; konwers relacji **bycia częścią**) (symbolicznie oznaczanej przez '$\mathcal{K}$'), relacji **rozłączności** (symbolicznie - '*ncon*'), relacji **przecięcia** (symbolicznie - '*sec*') i relacji **oddzielenia** (symbolicznie - '*nsec*') są następujące:

$$\text{'}\mathcal{K}(x,y)\text{'} =: \text{'}\forall z(con(z,y) \rightarrow con(z,x))\text{'} \tag{D1}$$

$$\text{'}ncon(x,y)\text{'} =: \text{'}\neg con(x,y)\text{'} \tag{D2}$$

$$\text{'}sec(x,y)\text{'} =: \text{'}\exists z(\mathcal{K}(x,z) \wedge \mathcal{K}(y,z))\text{'} \tag{D3}$$

$$\text{'}nsec(x,y)\text{'} =: \text{'}\neg sec(x,y)\text{'} \tag{D4}$$

Uogólnionymi odpowiednikami relacji dołączania i przyłączania z wcześniejszej wersji metody ekstensywnej abstrakcji[5] są odpowiednio relacje **zewnętrznego połączenia** (symbolicznie - '*econ*') (external connection) i **stycznego zawierania** (symbolicznie - '$\mathcal{K}^+$') (tangential inclusion). Określa je Whitehaed następująco:

$$\text{'}econ(x,y)\text{'} =: \text{'}con(x,y) \wedge nsec(x,y)\text{'} \tag{D5}$$

$$\text{'}\mathcal{K}^+(x,y)\text{'} =: \text{'}\mathcal{K}(x,y) \wedge \exists z(econ(z,x) \wedge econ(z,y)\text{'}) \tag{D6}$$

Główną korzyścią płynącą z przyjęcia relacji ekstensywnego połączenia, jako relacji pierwotnej, jest możliwość odróżnienia relacji dołączenia od «punktowej styczności». Tę ostatnią można obecnie określić nastepująco: $econ(x,y) \wedge \neg junc'(x,y)$ [6]. W tym wariancie metody ekstensywnej abstrakcji ważną rolę odgrywa relacja **niestycznego zawierania** (symbolicznie - '$n\mathcal{K}^+$') (non-tangential inclusion). Jej określenie jest następujące:

$$\text{'}n\mathcal{K}^+(x,y)\text{'} =: \text{'}\mathcal{K}(x,y) \wedge \neg\mathcal{K}^+(x,y)\text{'} \tag{D7}$$

Whitehead w ogóle nie aksjomatyzował tej wersji metody ekstensywnej abstrakcji, wszystkie zaś twierdzenia, na które się powoływał traktował na równi z założeniami. Jednak jedno z nich oznaczone numerem 7 [7] i głoszące, że $\forall x \neg \mathcal{K}(x,x)$ jest sprzeczne z podaną przez niego definicją (D1), z której wprost wynika, że $\forall x \mathcal{K}(x,x)$. Nie jest to poważny mankament jego metody i łatwo go usunąć podając explicite aksjomaty charakteryzujące relację ekstensywnego połaczenia. Sądzę, że następujące zdania najtrafniej opisują jej podstawowe własności:

$$\forall x\, con(x,x) \tag{A1}$$

$$\forall x \forall y (con(x,y) \rightarrow con(y,x)) \tag{A2}$$

$$\forall x \forall y \big(\forall z (con(z,x) \equiv con(z,y)) \rightarrow x=y\big) \tag{A3}$$

Aksjomat pierwszy stwierdza zwrotność relacji *con*, drugi jej symetryczność a trzeci jest niejako mereologicznym odpowiednikiem teoriomnogościowego aksjomatu ekstensjonalności. Prostymi konsekwencjami tej aksjomatyki i definicji (D1)-(D7) są tezy:

$$\forall x \mathcal{K}(x,x) \tag{T1}$$

$$\forall x \forall y \big(\forall z (\mathcal{K}(x,z) \equiv \mathcal{K}(y,z)) \rightarrow x=y\big) \tag{T2}$$

$$\forall x \forall y \big((\mathcal{K}(x,y) \wedge \mathcal{K}(y,x)) \rightarrow x=y\big) \tag{T3}$$

$$\forall x\, sec(x,x) \tag{T4}$$

$$\forall x \forall y (sec(x,y) \equiv sec(y,x)) \tag{T5}$$

$$\forall x \forall y \forall z \big((sec(x,y) \wedge \mathcal{K}(z,y)) \rightarrow sec(x,z)\big) \tag{T6}$$

$$\forall x \forall y (nsec(x,y) \equiv nsec(y,x)) \tag{T7}$$

$$\forall x \forall y \big(nsec(x,y) \equiv \forall z (\mathcal{K}(x,z) \rightarrow nsec(z,y))\big) \tag{T8}$$

$$\forall x \forall y \forall z \big((\mathcal{K}(x,y) \wedge \mathcal{K}(y,z)) \rightarrow \mathcal{K}(x,z)\big) \tag{T9}$$

$$\forall x \forall y \forall z \big((\mathcal{K}(x,y) \wedge con(z,y)) \rightarrow con(z,x)\big) \tag{T10}$$

$$\forall x \forall y (\mathcal{K}(x,y) \rightarrow con(x,y)) \tag{T11}$$

$$\forall x \forall y \forall z \big((\mathcal{K}(x,y) \wedge ncon(z,x)) \rightarrow ncon(z,y)\big) \tag{T12}$$

$$\forall x \forall y (sec(x,y) \rightarrow con(x,y)) \tag{T13}$$

$$\forall x \forall y (ncon(x,y) \equiv ncon(y,x)) \tag{T14}$$

$$\forall x \neg econ(x,x) \tag{T15}$$

$$\forall x \forall y \big(con(x,y) \equiv (econ(x,y) \vee sec(x,y)) \big) \qquad \text{(T16)}$$

$$\forall x \forall y \Big[\neg \exists z\, econ(z,x) \rightarrow \big(\mathcal{K}(x,y) \equiv \forall z (sec(z,y) \rightarrow sec(z,x)) \big) \Big] \qquad \text{(T17)}$$

$$\forall x \forall y \big(\mathcal{K}(x,y) \equiv (\mathcal{K}^{+}(x,y) \vee n\mathcal{K}^{+}(x,y)) \big) \qquad \text{(T18)}$$

$$\forall x \forall y \forall z \big((n\mathcal{K}^{+}(x,y) \wedge con(z,y)) \rightarrow sec(z,x) \big) \qquad \text{(T19)}$$

$$\forall x \forall y \forall z \big((\mathcal{K}(x,y) \wedge n\mathcal{K}^{+}(y,z)) \rightarrow n\mathcal{K}^{+}(x,z) \big) \qquad \text{(T20)}$$

$$\forall x \forall y \forall z \big((n\mathcal{K}^{+}(x,y) \wedge \mathcal{K}(y,z)) \rightarrow n\mathcal{K}^{+}(x,z) \big) \qquad \text{(T21)}$$

$$\forall x \forall y \forall z \big((n\mathcal{K}^{+}(x,y) \wedge n\mathcal{K}^{+}(y,z)) \rightarrow n\mathcal{K}^{+}(x,z) \big) \qquad \text{(T22)}$$

Dzięki relacji $n\mathcal{K}^{+}$ można obecnie tak zmodyfikować definicję abstrakcyjnej klasy zdarzeń[8], by jej desygnatami były te i tylko te zbiory regionów, których elementy nie są styczne wewnętrznie. W metodzie ekstensywnej abstrakcji z *An Enquiry Concerning the Principles of Natural Knowladge* takim zbiorom regionów odpowiadają proste abstrakcyjne klasy zdarzeń. Jednak w tamtej wersji tej metody, której relacją pierwotną jest relacja rozciągłości, nie sposób zdefiniować tych klas tak łatwo i bezpośrednio jak jest to możliwe teraz dzięki przyjęciu relacji ekstensywnego połączenia, jako relacji pierwotnej[9].

Za Whiteheadem przez '**abstrakcyjny zbiór regionów**' rozumiemy dowolny zbiór α spełniający następujące warunki: (D8)

$$\alpha \neq \varnothing \qquad \text{(i)}$$

$$\forall x \in \alpha \forall y \in \alpha \big(x \neq y \rightarrow (n\mathcal{K}^{+}(x,y) \vee n\mathcal{K}^{+}(x,y)) \big) \qquad \text{(ii)}$$

$$\neg \exists x \forall y \in \alpha\ \mathcal{K}(y,x) \qquad \text{(iii)}$$

Istnienie abstrakcyjnych zbiorów regionów zabezpiecza następujący aksjomat:

$$\forall x \exists y (x \neq y \wedge n\mathcal{K}^{+}(x,y)) \qquad \text{(A4)}$$

Zachodzi następujące twierdzenie:

$$\forall x \exists \alpha\ x \in \alpha \qquad \text{(T23)}$$

DOWÓD. Skorzystamy z twierdzenia Hausdorffa o maksymalnym łańcuchu, które głosi, że:

> każdy częściowo uporządkowany zbiór A zawiera łańcuch maksymalny, tj. taki podzbiór całkowicie uporządkowany $A_0 \subseteq A$, który nie zawiera się w żadnym innym całkowicie uporządkowanym podzbiorze zbioru A.

Wybierzmy dowolny region x_o. Na mocy (T22) relacja $n\mathcal{K}^+(x,y) \vee x=y$ jest przechodnia, na mocy zaś (T3) jest antysymetryczna. Zatem częściowo porządkuje ona zbiór $\beta = \{y : n\mathcal{K}^+(x_o,y) \vee x_o=y\}$. W myśl twierdzenia Hausdorffa istnieje w β łańcuch maksymalny α taki, że $x_o \in \alpha$. Z definicji łańcucha wynika, że (i) $\alpha \neq \emptyset$, (ii) $\forall x \in \alpha \ \forall y \in \alpha$ $(x=y \vee n\mathcal{K}^+(x,y) \vee n\mathcal{K}^+(y,x))$. Załóżmy, że nie zachodzi warunek (iii) z (D8), tzn. istnieje taki region y_o, że $\forall y \in \alpha \ \mathcal{K}(y,y_o)$. Wtedy zgodnie z (A4) istniałby taki region z_o, że $n\mathcal{K}^+(y_o,z_o) \wedge y_o \neq z_o$. Zatem na mocy definicji relacji $n\mathcal{K}^+$ i (T3) $\neg\mathcal{K}(z_o,y_o)$, czyli $z_o \notin \alpha$. Ponieważ $\mathcal{K}(x_o,y_o) \wedge n\mathcal{K}^+(y_o,z_o)$, więc, na mocy (T20), $z_o \in \beta$. Podobnie, zbiór $\alpha \cup \{z_o\}$ jest całkowicie uporządkowanym podzbiorem zbioru β. Zatem zbiór α nie byłby łańcuchem maksymalnym. Q.E.D.

Zauważmy, że również dzięki aksjomatowi (A4) uzyskujemy twierdzenie, które zabezpiecza przed trywialną interpretacją relacji *con* jako identyczności:[10]

$$\neg\forall x \forall y (con(x,y) \equiv x=y) \tag{T24}$$

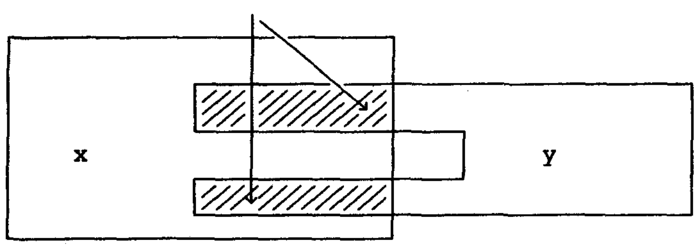
DOWÓD. Istotnie, przy takiej interpretacji również relacje $\mathcal{K}$, *sek* oraz $n\mathcal{K}^+$ pokrywałyby się z identycznością, a *econ* i $\mathcal{K}^+$ byłyby relacją pustą. Zatem z negacji twierdzenia (T24), przyjętych definicji i aksjomatu (A4) uzyskujemy sprzeczność, gdyż wyprowadzimy kontrtautologiczny wniosek '$\forall x \exists y(x=y \wedge x \neq y)$'. Q.E.D.

Teraz łatwo uzyskać, jako kolejny wniosek, twierdzenie przeczące przechodności relacji *con*:

$$\exists x \exists y \exists z (con(x,y) \wedge con(y,z) \wedge \neg con(x,z)) \tag{T25}$$

DOWÓD. Koniunkcja aksjomatu (A1) i negacji twierdzenia (T25) (inaczej: $\forall x\, con(x,x) \wedge \forall x \forall y \forall z\big((con(x,y) \wedge con(y,z)) \rightarrow con(x,z)\big)$) jest logicznie równoważna stwierdzeniu '$\forall x \forall y\big(con(x,y) \equiv \forall z(con(z,x) \rightarrow con(z,y))\big)$'. Zatem, z definicji (D1) otrzymujemy, że $\forall x \forall y(\mathcal{K}(x,y) \equiv con(y,x))$. Stąd, z aksjomatów (A1) i (A2) oraz twierdzenia (T3) otrzymujemy wniosek '$\forall x \forall y(con(x,y) \equiv x=y)$', sprzeczny z (T24). Q.E.D.

Dla regionów iloczyn daje się określić tylko w szczególnych przypadkach. Nie istnieją w teorii Whiteheada regiony puste, niektóre zaś regiony mogą przecinać się w taki sposób, że ich wszystkie regiony wspólne są wzajemnie odzielone i nie tworzą regionu wspólnego, co ilustruje poniższy rysunek:



Aby precyzyjnie określić taką sytuację wprowadzimy następujący predykat: region x jest **pseudoiloczynem** regionów y oraz z, który oznaczam symbolem '$psec(x,y,z)$'. Jego definicja jest następująca:

$$'psec(x,y,z)' =: '\mathcal{K}(y,x) \wedge \mathcal{K}(z,x) \wedge \forall u\big((sec(x,u) \wedge \mathcal{K}(y,u) \wedge \mathcal{K}(z,u)) \rightarrow \mathcal{K}(x,u)\big)' \tag{D9}$$

Dla przecinających się regionów istnienie pseudoiloczynów zapewnia następujący aksjomat:

$$\forall x \forall y \forall z\big((\mathcal{K}(x,z) \wedge \mathcal{K}(y,z)) \rightarrow \exists u(\mathcal{K}(u,z) \wedge psec(u,x,y))\big) \tag{A5}$$

Łatwo sprawdzić, że zachodzą następujące twierdzenia:

$$\forall x\, psec(x,x,x) \tag{T26}$$

$$\forall x \forall y \forall z(psec(x,y,z) \equiv psec(x,z,y)) \tag{T27}$$

$$\forall x \forall y(\mathcal{K}(x,y) \rightarrow psec(y,x,y)) \tag{T28}$$

$$\forall x \forall y \forall z \forall u \big((psec(x,y,z) \wedge psec(u,y,z) \rightarrow (x=u \vee nsec(x,u)) \big) \qquad (T29)$$

$$\forall x \forall y (\exists z\, psec(z,x,y) \equiv sec(x,y)) \qquad (T30)$$

Dalej będziemy używać poniższych definicji:

Jeśli dla pary przecinających się regionów istnieje dokładnie jeden pseudoiloczyn, to o takich regionach mówimy, że przecinają się **jednokrotnie** a ich pseudoiloczyn nazywamy krótko **iloczynem** i oznaczamy przez '$x \cdot y$'. Jeśli natomiast istnieje więcej niż jeden pseudoiloczyn, to o takich regionach mówimy, że przecinają się **wielokrotnie**. (D10)

W zbiorze wszystkich abstrakcyjnych zbiorów regionów relacje **przykrywania** ('cov') i **$\mathcal{K}$-równoważniści** ('$\overset{\mathcal{K}}{\approx}$') określamy następująco:

$$\text{'}cov(\alpha,\beta)\text{'} =: \text{'}\forall x{\in}\alpha \exists y{\in}\beta\ \mathcal{K}(x,y)\text{'} \qquad (D11)$$

$$\text{'}\alpha \overset{\mathcal{K}}{\approx} \beta\text{'} =: \text{'}cov(\alpha,\beta) \wedge cov(\beta,\alpha)\text{'} \qquad (D12)$$

Łatwo sprawdzić, że relacja cov jest zwrotna i przechodnia (na mocy przechodniości $\mathcal{K}$) a $\mathcal{K}$-równoważność jest relacją równoważności. Jej klasy abstrakcji nazywa Whitehead '**elementami geometrycznymi**' (geometrical element). Zmiennymi przebiegającymi elementy geometryczne będą litery '$\mathbb{A}$', '$\mathbb{B}$' i '$\mathbb{C}$'. W zbiorze $\mathcal{EG}$ wszystkich elementów geometrycznych relację $\mathcal{COV}$, będącą odpowiednikiem relacji pokrywania cov, określamy następująco:

$$\text{'}\mathcal{COV}(\mathbb{A},\mathbb{B})\text{'} =: \text{'}\exists \alpha{\in}\mathbb{A} \exists \beta{\in}\mathbb{B}\ cov(\alpha,\beta)\text{'} \qquad (D13)$$

Nietrudno sprawdzić, że relacja $\mathcal{COV}$ jest zwrotna, antysymetryczna i przechodnia, a więc para uporządkowana ($\mathcal{EG}$, $\mathcal{COV}$) jest zbiorem częściowo uporządkowanym. W zgodzie z naszymi czasoprzestrzennymi intuicjami, Whitehead implicite zakłada prawdziwość następującego aksjomatu:

W zbiorze $\mathcal{EG}$ istnieją elementy minimalne w sensie relacji $\mathcal{COV}$. (A6)

Za Whiteheadem:

każdy taki element minimalny nazywamy **'punktem'** (point) (D14)

Porównując powyższą definicję punktu z definicją zdarzenia elementarnego z *An Enquiry the Principles of Natural Knowledge* wyraźnie widać korzyści jakie metoda ekstensywnej abstrakcji czerpie ze zmiany relacji rozciągłości na relację ekstensywnego połączenia. Aby określić punkt, autor *Process and Reality* nie musi już zakładać istnienia specjalnych typów regionów odpowiadających trwaniom, ani spełnienia warunku (W)[11]. Ponadto, wiernie oddaje ono euklidesowy charakter punktu, tj. «bycie bez części i bez wielkości», który - zdaniem Whiteheada - konstytuuje idea punktu. Tak więc, jeden z najpoważniejszych mankamentów wczesnej wersji metody ekstensywnej abstrakcji został z powodzeniem usunięty.

Zmiennymi przebiegającymi punkty będą symbole: '$\mathbb{P}$', '$\mathbb{P}_1$', '$\mathbb{P}_2$', ...itd.

Przez **zupełny** zbiór punktów rozumie Whitehead zbiór punktów przykrywanych przez jakiś element geometryczny. Dokładniej:

zbiór punktów $\mathfrak{P}$ jest zupełny wtedy i tylko wtedy,

gdy istnieje element geometryczny $\mathbb{A}$ taki, że (D15)

$$\mathfrak{P}=\{ \mathbb{P} : \mathcal{COV}(\mathbb{A},\mathbb{P})\}$$

Proste, płaszczyzny i przestrzenie trójwymiarowe definiuje Whitehead za pomocą **regionu owalnego** (ovate region), którego geometrycznym odpowiednikiem jest zbiór wypukły. Bezpośrednie, wzorowane na definicji zbioru wypukłego, określenie regionu owalnego nie jest możliwe, gdyż musiałoby ono opierać się na pojęciu odcinka prostoliniowego, które dopiero mamy zdefiniować. Na obecnym etapie jedynymi środkami, którymi dysponuje metoda ekstensywnej abstrakcji są scharakteryzowane powyżej relacje między regionami i punkty. Zdaniem Whiteheada, są one wystarczające na to, by jednoznacznie określić warunki, które musi spełniać pewien zbiór regionów, żeby utożsamić go ze zbiorem wszystkich regionów owalnych. W konsekwencji region owalny można zdefiniować pośrednio, jako taki region, który jest elementem takiego zbioru.

Potrzebne nam przy tym będą następujące pojęcia pomocnicze: mówimy, że abstrakcyjny zbiór regionów α **tkwi** w regionie x, co symbolicznie oznaczamy przaz '$t(\alpha,x)$', wtedy i tylko wtedy, gdy $\exists y\in\alpha\ K(x,y)$. Za pomocą relacji t zdefiniujemy w poniższy sposób relację $\mathcal{T}$ tkwienia elementu geometrycznego $\mathbb{A}$ w regionie x :

'$\mathcal{T}(\mathbb{A},x)$' =: '$\exists\alpha\in\mathbb{A}\ t(\alpha,x)$' (D16)

O zbiorze $\mathcal{R}$ wszystkich regionów Whitehead zakłada, że zawiera pewien podzbiór W, który spełnia poniżej wymienione warunki (*i*)-(*vii*) i który jest maksymalny w sensie relacji inkluzji wśród wszystkich podzbiorów spełniających te warunki (tj. $\forall X\subseteq\mathcal{R}$ jeśli $W \subseteq X$ i X spełnia warunki (*i*)-(*vii*), to $X = W$) [12].

Dowolny element zbioru W nazywa się regionem **owalnym** (D17)

Zbiór W nazywa Whitehead **klasą regionów owalnych** (D18)

Zbiór W ma spełniać siedem następujących warunków:

(*i*) $\forall x\in W\ \forall y\in W\ \big(\mathit{sec}(x,y) \rightarrow$ (x i y przecinają się jednokrotnie $\wedge\ x\cdot y\in W)\big)$,

(*ii*) $\forall x\in\mathcal{R}\setminus W\ \exists y\in W$ (x i y przecinają się wielokrotnie),

(*iii*) $\forall x\in W\ \exists y\in\mathcal{R}\setminus W$ (x i y przecinają się wielokrotnie),

(*iv*) $\forall x\in W\ \forall y\in W\ (\mathit{econ}(x,y) \rightarrow \mathbb{b}(x)\cap\mathbb{b}(y)$ jest zupełnym zbiorem punktów,

(*v*) $\forall x\in\mathcal{R}\setminus W\ \exists y\in W\ (\mathit{econ}(x,y) \wedge \mathbb{b}(x)\cap\mathbb{b}(y)$ nie jest zupełnym zbiorem punktów),

(*vi*) $\forall x\in W\ \exists y\in\mathcal{R}\setminus W\ (\mathit{econ}(x,y) \wedge \mathbb{b}(x)\cap\mathbb{b}(y)$ nie jest zupełnym zbiorem punktów), (*vii*) $\forall x \in \mathcal{W}\ \exists y \in \mathcal{W}\ (x \neq y \wedge n\mathcal{K}^{+}(x,y))$,

gdzie $\mathcal{b}(x)$ jest brzegiem regionu x, tj. takim elementem geometrycznym, który spełnia następujący warunek[13]:

$$\exists y(\mathcal{T}(\mathcal{b}(x),y) \wedge sec(y,x) \wedge y \neq x \wedge \neg\mathcal{K}(x,y))$$

Dalsze definicje zakładają prawdziwość następującego aksjomatu:

Dla dowolnego co najwyżej czteroelementowego i niepustego zbioru punktów $\mathfrak{P}$ istnieje abstrakcyjny zbiór α taki, że (A7)

(i) $\alpha \subseteq \mathcal{W}$, tj. elementami α są jedynie regiony owalne,

(ii) $\forall \mathbb{P} \in \mathfrak{P}\ \forall \beta \in \mathbb{P}\ cov(\alpha,\beta)$,

(iii) wśród zbiorów abstrakcyjnych spełniających dwa ostatnie warunki zbiór α jest minimalny w sensie relacji *cov*,

(iv) gdy $\mathfrak{P}$ jest jednoelementowy, to jedyny jego element jest klasą abstrakcji zbioru α w relacji $\overset{\mathcal{K}}{\approx}$; inaczej: jeśli $\mathfrak{P}=\{\mathbb{P}\}$ dla pewnego $\mathbb{P}$, to $\alpha \in \mathbb{P}$.

Niech $\mathfrak{P}$ będzie pewnym niepustym, lecz nie więcej niż czteroelementowym zbiorem punktów, α niech będzie abstrakcyjnym zbiorem postulowanym przez aksjomat (A7), zaś element geometryczny $\mathbb{A}$ niech będzie klasą abstrakcji zbioru α w relacji $\overset{\mathcal{K}}{\approx}$.

Element geometryczny $\mathbb{A}$ nazywa Whitehead **'płaskim elementem geometrycznym'** (flat geometrical element), a zupełny zbiór punktów określony przez $\mathbb{A}$ (tj. zbiór $\{\mathbb{P} : \mathcal{COV}(\mathbb{A},\mathbb{P})\}$) nazywa **'płaskim zbiorem punktów wyznaczonym przez** $\mathfrak{P}$'.

Płaski zbiór punktów wyznaczony przez dwuelementowy zbiór punktów $\mathfrak{P}=\{\mathbb{P}, \mathbb{P}_1\}$ (inaczej: przez punkty $\mathbb{P}$ i $\mathbb{P}_1$) nazywa się **'odcinkiem prostoliniowym** o końcach $\mathbb{P}$ i $\mathbb{P}_1$'.

Płaski zbiór punktów wyznaczony przez trójelementowy zbiór punktów $\mathfrak{P}=\{\mathbb{P}, \mathbb{P}_1, \mathbb{P}_2\}$ (inaczej: przez punkty $\mathbb{P}$, $\mathbb{P}_1$ i $\mathbb{P}_2$) nazywa się **'trójkątem** o wierzchołkach $\mathbb{P}$, $\mathbb{P}_1$ i $\mathbb{P}_2$' wtedy i tylko wtedy, gdy nie jest on podzbiorem żadnego odcinka prostoliniowego.

Płaski zbiór punktów wyznaczony przez czteroelementowy zbiór punktów $\mathfrak{P}=\{\mathbb{P}, \mathbb{P}_1, \mathbb{P}_2, \mathbb{P}_3\}$ (inaczej: przez punkty $\mathbb{P}$, $\mathbb{P}_1$, $\mathbb{P}_2$ i $\mathbb{P}_3$) nazywa się **'czworościanem** o wierzchołkach $\mathbb{P}$, $\mathbb{P}_1$, $\mathbb{P}_2$ i $\mathbb{P}_3$' wtedy i tylko wtedy, gdy nie jest on podzbiorem ani żadnego odcinka prostoliniowego, ani żadnego trójkąta.

'Prostą' nazywa Whitehead niepusty zbiór $\mathfrak{L}$ punktów taki, że

(*1*) żadne trzy punkty należące do $\mathfrak{L}$ nie wyznaczają trójkąta,

(*2*) dla dowolnych dwóch punktów $\mathbb{P}$ i $\mathbb{P}_1$ należących do $\mathfrak{L}$ odcinek prostoliniowy o końcach $\mathbb{P}$ i $\mathbb{P}_1$ zawiera się w $\mathfrak{L}$,

(*3*) nie istnieje zbiór punktów spełniający warinki (*1*) i (*2*), zawierający zbiór $\mathfrak{L}$ i różny od $\mathfrak{L}$.

Płaszczyzna to niepusty zbiór punktów $\mathfrak{N}$ taki, że

(*a*) nie zawiera się w żadnej prostej,

(*b*) trójkąt wyznaczony przez dowolne trzy punkty należące do $\mathfrak{N}$ zawiera się w $\mathfrak{N}$,

(*c*) każdy skończony zbiór punktów z $\mathfrak{N}$ zawiera się w jakimś trójkącie również zawartym w $\mathfrak{N}$,

(*d*) nie istnieje zbiór punktów, który spełnia warunki (*a*)-(*c*), zawiera $\mathfrak{N}$ i jest różny od $\mathfrak{N}$.

Przestrzeń trójwymiarowa to niepusty zbiór $\mathfrak{S}$ punktów taki, że

(I) nie zawiera się w żadnej płaszczyźnie,

(II) czworościan wyznaczony przez dowolną czwórkę punktów z $\mathfrak{S}$ zawiera się w $\mathfrak{S}$,

(III) każdy skończony zbiór punktów z $\mathfrak{S}$ zawiera się w jakimś czworościanie również zawartym w $\mathfrak{S}$,

(IV) nie istnieje zbiór punktów spełniający warunki (I)-(III), zawierający $\mathfrak{S}$ i różny od $\mathfrak{S}$.

W tej wersji metody ekstensywnej abstrakcji Whitehead dążył do zdefiniowania punktów, prostych, płaszczyzn i przestrzeni trójwymiarowych w sposób na tyle ogólny, aby mogły one znaleźć zastosowanie w dowolnej geometrii jednostajnej włącznie z geometrią rzutową. Sądzę, iż w zasadzie udało mu się tego dokonać. Nie wiadomo natomiast w jaki sposób zamierzał on posłużyć się tymi konstrukcjami do opisu czasoprzestrzeni. Wszak w tym celu należy wzbogacić zasób pojęć pierwotnych tak, by możliwe było odróżnienie przestrzeni od czasu. Whitehead tego nie uczynił. Niejasna jest również jego propozycja, by metrykę czasoprzestrzeni określić za pomocą tzw. metody Cayley'a-Kleina. Metodę tę można stosować tylko w geometrii rzutowej, ta zaś zakłada istnienie tzw. punktów w nieskończoności, którym nie sposób - moim zdaniem - przypisać empirycznego sensu.

PRZYPISY

[1] Niniejszy artykuł jest kontynuacją mojej pracy *A. N. Whiteheada metoda ekstensywnej abstrakcji. Część I*, Acta Uniwersitatis Nicolai Copernici, Nauki Humanistyczno-Społeczne, Logika I, zeszyt 224, 1991, s. 43-66. Jednak jest od niej niezależny. W wielu miejscach stosowana jest odmienna symbolika oraz uproszczone określenia. Odsyłacze do wcześniejszej pracy stosowane są jedynie w celu porównań.

Autor jest wdzięczny doktorowi Andrzejowi Pietruszczakowi za wnikliwą lekturę i krytyczne uwagi o niniejszej pracy, dzięki którym wiele jej fragmentów zyskało na precyzji i jasności.

[2] Omawiam ją szczegółowo w: ibid.

[3] Por. T. de Laguna: *Point, Line, and Surface, as Set of Solids*, Journal of Philosophy, XIX (1924), s. 449-461.

[4] W języku topologii powiedzielibyśmy, że regiony są homeomorficzne z kulami otwartymi lub domkniętymi w $\mathbf{R}^4$.

[5] Por. definicje dołączania i przyłączania w C. Gorzka: *A. N. Whiteheada metoda ekstensywnej abstrakcji. Część I*, ibid., s. 50.

[6] Relację *junc'* definiujemy tymi samymi warunkami co w: ibid., s. 47-50. Należy jedynie zamienić w wyjściowych definicjach symbol 'K' - oznaczający niezwrotną relację rozciągłości z *An Enquiry Concerning the Principles of Natural Knowledge* - na symbol '*K*'.

[7] Por. A. N. Whitehead, *Process and Reality*, The Free Press, 1978, s. 296.

[8] Por. C. Gorzka, *A. N. Whiteheada metoda ekstensywnej abstrakcji. Część I*, s. 51.

[9] Ibid., s. 60.

[10] Twierdzenia (T24) i (T25) oraz ich dowody pochodzą od dra Andrzeja Pietruszczaka.

[11] Ibid., s. 57.

[12] Sprawą otwartą jest to, czy istnienie zbioru *W* wynika z aksjomatów (A1)-(A6), czy też trzeba wprowadzić dodatkowy, gwarantujący jego istnienie. Podobnie, nie wiadomo czy zbiór *W* ma być jedyną klasą zbiorów owalnych, tj. czy można dopuścić istnienie innych zbiorów spełniających warunki (*i*)-(*vii*) oraz maksymalnych w sensie relacji inkluzji wśród wszystkich podzbiorów zbioru $\mathcal{R}$ spełniających te warunki.

[13] Por. definicję brzegu z definicją z: ibid., s. 59.