Gorzka, Cezary

Whiteheadowski rachunek indywiduów

Acta Universitatis Nicolai Copernici. Logika 3 (255), 93-101

1992

ACTA UNIVERSITATIS NICOLAI COPERNICI
LOGIKA III - NAUKI HUMANISTYCZNO-SPOŁECZNE - ZESZYT 255 - 1992

Katedra Logiki

Cezary Gorzka

WHITEHEADOWSKI RACHUNEK INDYWIDUÓW

Termin **'rachunek indywiduów'** (calculus of individuals) wprowadzili do literatury logicznej Henry S. Leonard i Nelson Goodman[1] dla oznaczenia teorii, która choć powstała niezależnie od Whiteheada teorii zdarzeń resp. regionów, jednak można ją pojmować jako pewne logiczne uogólnienie tej ostatniej. W ramach teorii Whiteheada zdarzenia resp. regiony interpretuje się jako pewne czasoprzestrzennie rozciągłe przedmioty i dlatego możliwość tworzenia ich sumy i iloczynu są bardzo ograniczone. Ta pierwsza istnieje tylko dla połączonych zdarzeń a iloczyn jest jednoznacznie określony wyłącznie dla jednokrotnie przecinających się zdarzeń resp. regionów. Nie istnieje również zdarzenie resp. region uniwersalny, zdarzenie zaś będące dopełnieniem jednego zdarzenia w drugim może istnieć tylko w szczególnych przypadkach. Rachunek indywiduów nie zakłada ciągłości indywiduów (przynajmniej w sensie ciągłości czasoprzestrzennej), tworzenie zaś sumy nie podlega żadnym ograniczeniom. Istnieje też indywiduum uniwersalne. W rachunkach wzorowanych na teorii Leonarda i Goodmana pewne restrykcje nakłada się na tworzenie iloczynu i dopełnienia. Jest to spowodowane tym, że w rachunkach tego rodzaju odrzuca się indywiduum zerowe (null individual). W konsekwencji iloczyn daje się określić tylko dla przecinających się indywiduów a dopełnienie istnieje dla każdego indywiduum różnego od indywiduum uniwersalnego. Leonard i Goodman za podstawę swgo rachunku przyjęli relację nieciągłości (relation of discreteness), której w Whiteheada teorii zadrzeń odpowiada relacja oddzielania (*nsec*). Przedstawiona w tym artykule teoria, którą nazwałem 'whiteheadowskim rachunkiem indywiduów' opiera się na relacji **ekstensywnego połączenia** jako terminie pierwotnym i w części odnoszącej do własności tej relacji została ona opisana w mojej pracy *A. N. Whiteheada metoda ekstensywnej abstrakcji z "Process and Reality"*[2]. Zawarte w tej pracy aksjomaty (A1)-(A3) i definicje (D1)-(D7) przyjmuję jako odpowiednio aksjomatyczną charakterystykę ekstensywnego połączenia (*con*) w tym rachunku i określenia dla następujących relacji: **rozciągłości** (K), **rozłączności** (*ncon*), **przecięcia** (*sec*), **oddzielenia** (*nsec*), **zewnętrznego połączenia** (*econ*), **stycznego zawierania się** (K^+) i **niestycznego zawierania się** (nK^+). Argumentom relacji ekstensywnego połączenia, które nazywam 'indywiduami' nie przypisuję żadnej interpretacji. W części charakteryzującej relację ekstensywnego połączenia whiteheadowski rachunek indywiduów jest teorią pierwszego rzędu z identycznością. Jej podstawowymi konsekwencjami są tezy (T1)-(T3) oraz (T10)-(T22)[3], przy czym te ostatnie, z uwagi na występowanie w nich relacji *con*, *ncon*, *econ*, K^+ i nK^+, są specyficzne dla tego rachunku i w tym sensie moża orzekać o nim, że jest bogatszy od rachunku Leonarda i Goodmana.

Niech litery 'X', 'Y', 'Z' będą zmiennymi przebiegającymi zbiory indywiduów, tzn. podzbiory zbioru {x: *con*(x,x)}. W ślad za Leonardem i Goodmanem dla zdefiniowania sumy, iloczynu, dopełnienia indywiduów i indywiduum uniwersalnego korzystam z operacji **sklejania zbioru** (fusion of set), którą oznaczam symbolem '$\mathcal{F}u$' X'. Wyrażenie '$x = \mathcal{F}u' X$' czytamy: indywiduum x jest sklejeniem zbioru X.

$$\text{'}x = \mathcal{F}u' X\text{'} =: \text{'}\forall y(con(y,x) \equiv \exists z{\in}X\ con(y,z))\text{'} \qquad (D1')$$

Definicje **sumy** ('x+y'), **iloczynu** ('x·y'), **dopełnienia** indywiduum ('x'') i **indywiduum uniwersalnego** ('$\mathcal{U}$') są następujące:

$$\text{'}x{+}y\text{'} =: \text{'}\mathcal{F}u'\{\ z : \mathcal{K}(x,z) \vee \mathcal{K}(y,z)\}\text{'} \qquad (D'2)$$

$$\text{'}x{\cdot}y\text{'} =: \text{'}\mathcal{F}u'\{\ z : \mathcal{K}(x,z) \wedge \mathcal{K}(y,z)\}\text{'} \qquad (D'3)$$

$$\text{'}x'\text{'} =: \text{'}\mathcal{F}u'\{\ y : ncon(y,x)\}\text{'} \qquad (D'4)$$

$$\text{'}\mathcal{U}\text{'} =: \text{'}\mathcal{F}u'\{\ x : con(x,x)\}\text{'} \qquad (D'5)$$

Podobnie jak Leonard i Goodman odrzucam indywiduum zerowe, a więc aksjomat gwarantujący istnienie indywiduum będącego sklejeniem zbioru indywiduów musi mieć następującą, warunkową postać:

$$\forall X{\neq}\emptyset \exists x\ x{=}\mathcal{F}u' X \qquad (A'1)$$

Już Leonard i Goodman zauważyli, iż język teorii mnogości nie jest konieczny w rachunkach indywiduów i można go łatwo wyeliminować dołączając do języka predykatów pierwszego rzędu z identycznością operator deskrypcji określonej. Jednakże język teorii mnogości jest obecnie powszechnie stosowany i dlatego będę się nim posługiwał w dalszych wywodach.

Prostymi konsekwencjami powyższych aksjomatów i definicji są następujące tezy:

$$\forall X(X{\neq}\emptyset \equiv \exists x\ x{=}\mathcal{F}u' X) \qquad (T'1)$$

$$\forall X \forall x{\in}X\ \mathcal{K}(\mathcal{F}u' X, x) \qquad (T'2)$$

$$\forall X \forall Y(X{=}Y{\neq}\emptyset \rightarrow \mathcal{F}u' X{=}\mathcal{F}u' Y \qquad (T'3)$$

$$\forall x(x{=}\mathcal{F}u'\{x\} \wedge x{=}\mathcal{F}u'\{\ y : \mathcal{K}(x,y)\} \qquad (T'4)$$

$$\forall X{\neq}\emptyset \forall Y{\neq}\emptyset\ \mathcal{F}u' X{\cup}Y = \mathcal{F}u' X{+}\mathcal{F}u' Y \qquad (T'5)$$

$$\forall x\ x{+}x{=}x \qquad (T'6)$$

$$\forall x \forall y \exists z \; z=x+y \tag{T'7}$$

$$\forall x \forall y \; x+y=y+x \tag{T'8}$$

$$\forall x \forall y \forall z \; x+(y+z)=(x+y)+z \tag{T'9}$$

$$\forall x \forall y (x+y=x \equiv \mathcal{K}(x,y)) \tag{T'10}$$

$$\forall x \forall y (\mathit{sec}(x,y) \equiv \exists z \; z=x \cdot y) \tag{T'11}$$

$$\forall x \; x \cdot x=x \tag{T'12}$$

$$\forall x \forall y (\mathit{sec}(x,y) \rightarrow x \cdot y=y \cdot x) \tag{T'13}$$

$$\forall x \forall y \forall z (\mathit{sec}(x,y) \wedge \mathit{sec}(y,z) \wedge \mathit{sec}(x \cdot y,z) \rightarrow x \cdot (y \cdot z)=(x \cdot y) \cdot z) \tag{T'14}$$

$$\forall x \forall y \big(\mathit{sec}(x,y) \rightarrow (x \cdot y=y \equiv \mathcal{K}(x,y))\big) \tag{T'15}$$

$$\forall x \forall y \forall z \big((\mathit{sec}(x,y) \wedge y=z) \rightarrow x \cdot y=x \cdot z\big) \tag{T'16}$$

$$\forall x \forall y \Big[\mathit{sec}(x,y) \rightarrow \forall z \big(n\mathcal{K}^{+}(x \cdot y,z) \rightarrow (n\mathcal{K}^{+}(x,z) \wedge n\mathcal{K}^{+}(y \cdot z))\big)\Big] \tag{T'17}$$

$$\exists x \; x=\mathcal{U} \tag{T'18}$$

$$\forall x (\mathit{con}(x,\mathcal{U}) \wedge \mathit{sec}(x,\mathcal{U}) \wedge \mathcal{K}(\mathcal{U},x)) \tag{T'19}$$

$$\forall x \; \neg \mathit{econ}(x,\mathcal{U}) \tag{T'20}$$

$$\forall x \; x+\mathcal{U}=\mathcal{U} \tag{T'21}$$

$$\forall x \; x \cdot \mathcal{U}=x \tag{T'22}$$

$$\forall x \exists y (x \neq \mathcal{U} \equiv y=x') \tag{T'23}$$

$$\forall x \neq \mathcal{U} \; x=x'' \tag{T'24}$$

$$\forall x \neq \mathcal{U} \; \mathit{ncon}(x,x') \tag{T'25}$$

$$\forall x \neq \mathcal{U} \forall y (y=x \rightarrow y'=x') \tag{T'26}$$

$$\forall x \neq \mathcal{U} \; x+x'=\mathcal{U} \tag{T'27}$$

$$\forall x \neq \mathcal{U} \forall y \neq \mathcal{U} \; \mathcal{K}(x,y) \equiv \mathcal{K}(y',x') \tag{T'28}$$

Twierdzenia (T'1)-(T'28) z wyjątkiem tych, w których występują symbole '*con*', '*econ*', '$n\mathcal{K}^{+}$' są również tezami rachunku Leonarda i Goodmana oraz rachunków pokrewnych. Istotną nowością whiteheadowskiego rachunku indywiduów jest możliwość określenia w nim odpowiedników dla takich pojęć topologicznych jak wnętrze i domknięcie. Wynika to z faktu, że w terminach ekstensywnego połączenia daje się odróżnić relację $n\mathcal{K}^{+}$ od $\mathcal{K}$ oraz, że w tym rachunku nie zachodzi twierdzenie mówiące, że $\forall x \forall y \big(x=y \equiv \forall z(\mathit{sec}(z,x) \equiv \mathit{sec}(z,y))\big)$.

Dla indywiduów wnętrze ('$\mathit{int}(x)$') i domknięcia ('$\mathit{cl}(x)$') definiuję następująco:

$$\text{'}\mathit{int}(x)\text{'} =: \text{'}\mathcal{F}u\text{'}\{y : n\mathcal{K}^{+}(x,y)\}\text{'} \qquad \text{(D'6)}$$

$$\text{'}\mathit{cl}(x)\text{'} =: \text{'}\mathcal{F}u\text{'}\{y : \mathit{sec}^{+}(y,x)\}\text{'} \qquad \text{(D'7)}$$

gdzie '$\mathit{sec}^{+}(y,x)$' zdefiniowane jest w następujący sposób:

$$\text{'}\mathit{sec}^{+}(y,x)\text{'} =: \text{'}\mathit{sec}(y,x) \wedge \forall z(\mathcal{K}(y,z) \rightarrow \mathit{sec}(z,x))\text{'}$$

Ponadto, przyjmuję «standardowe» określenia:

Indywiduum x nazywamy '**otwartym**' wtw $x=\mathit{int}(x)$ (D'8)

Indywiduum x nazywamy '**domkniętym**' wtw $x=\mathit{cl}(x)$ (D'9)

Podstawę «topologicznego» fragmentu whiteheadowskiego rachunku indywiduów tworzą następujące aksjomaty: (A4)[4] oraz

$$\forall x \forall y \forall z\big((n\mathcal{K}^{+}(x,z) \wedge n\mathcal{K}^{+}(y,z)) \rightarrow n\mathcal{K}^{+}(x\cdot y,z)\big) \qquad \text{(AI)}$$

$$\forall x \forall y \forall z\Big[(\mathit{econ}(z,x) \wedge \mathcal{K}(x,y)) \rightarrow \exists u\big(\mathcal{K}(x,u) \wedge \mathit{econ}(z,u) \wedge (\mathit{sec}^{+}(u,y) \vee n\mathit{sec}(u,y))\big)\Big] \qquad \text{(AII)}$$

Aksjomat (A4) zabezpiecza istnienie wnętrza dla dowolnego indywiduum oraz wyklucza istnienie atomów, przez co nadaje temu rachunkowi whiteheadowski charakter. Aksjomat (AI) pozwala dowieść, że iloczyn dwóch otwartych indywiduów również jest otwartym indywiduum, dzięki zaś aksjomatowi (AII) suma dwóch domkniętych indywiduów równa się domknięciu ich sumy.

Zachodzą następujące twierdzenia:

$$\forall x \exists y \; y = \mathit{int}(x) \qquad \text{(T'29)}$$

Dowód. W myśl aksjomatu (A4) zachodzi $\{y : n\mathcal{K}^{+}(x,y)\} \neq \emptyset$, a stąd zgodnie z (D'6) i w oparciu o (A'1) otrzymujemy tezę. ∎

$$\forall x \; \mathcal{K}(x,\mathit{int}(x)) \qquad \text{(T'30)}$$

Dowód. Z (T21)[5] wynika, że $\{y : n\mathcal{K}^{+}(x,y)\} \subseteq \{y : \mathcal{K}(x,y)\}$. Łatwo sprawdzić, że $\forall X \neq \emptyset \forall Y(X \subseteq Y \rightarrow \mathcal{K}(\mathcal{F}u'Y, \mathcal{F}u'X))$, a stąd na mocy (T'4) otrzymujemy tezę. ■

$$\forall x \forall y (x=y \rightarrow int(x)=int(y)) \tag{T'31}$$

Dowód. Z równości x=y wynika $\{z : n\mathcal{K}^{+}(x,z)\}=\{z : n\mathcal{K}^{+}(y,z)\}$. ■

$$\forall x\ int(x)+x=x \tag{T'32}$$

Dowód. Wystarczy skorzystać z (T'30) a następnie z (T'10). ■

$$\forall x\ int(x)\cdot x=int(x) \tag{T'33}$$

Dowód. Znowu należy skorzystać z (T'30) a potem z (T'15). ■

$$\forall x \forall y (sec(x,y) \equiv sec(int(x),int(y))) \tag{T'34}$$

Dowód. Jeżeli $sec(x,y)$, to istnieje z takie, że $\mathcal{K}(x,z) \wedge \mathcal{K}(y,z)$. Na mocy aksjomatu (A4) istnieje u takie, że $n\mathcal{K}^{+}(z,u)$, a stąd zgodnie z (T13)[6] otrzymujemy tezę. ■

$$\forall x \forall y\ \neg econ(x,int(y)) \tag{T'35}$$

Dowód. Gdyby dla pewnego x oraz y zachodziło $econ(x,int(y))$, to w myśl (D'6) musiałoby istnieć indywiduum z takie, że $econ(x,z) \wedge n\mathcal{K}^{+}(y,z)$, co byłoby sprzeczne z definicją niestycznego zawierania się. ■

$$\forall x \forall y (con(x,int(y)) \equiv sec(x,y)) \tag{T'36}$$

Dowód. Należy skorzystać z (T8)[7] a następnie z (T'35). ■

$$\forall x\ int(x)=int(int(x)) \tag{T'37}$$

Dowód. Niech dla pewnego y zachodzi $con(y,int(x))$. Stąd, na mocy (T'36), otrzymujemy $sec(y,int(x))$. Zatem $\exists z(\mathcal{K}(y,z) \wedge \mathcal{K}(int(x),z))$. Z aksjomatu (A4) wynika, że $\exists u\ n\mathcal{K}^{+}(z,u)$. Z przechodności relacji $n\mathcal{K}^{+}$ mamy $\mathcal{K}(int(int(x)),u)$. Zatem $sec(y,int(int(x)))$. Implikacja w odwrotną stronę jest oczywista. ■

$$int(\mathcal{U})=\mathcal{U} \tag{T'38}$$

Dowód. Załóżmy, że dla pewnego y zachodzi $con(y,\mathcal{U})$. Aksjomat (A4) gwarantuje, że $\exists x\ n\mathcal{K}^{+}(y,x)$. Ponieważ $\mathcal{K}(int(\mathcal{U}),x)$, więc $con(y,int(\mathcal{U}))$. ■

$$\forall x \forall y (sec(x,y) \rightarrow int(x\cdot y)=int(x)\cdot int(y)) \tag{T'39}$$

Dowód. Twierdzenie jest prostą konsekwencją aksjomatu (AI) i tezy (T'17). ∎

Twierdzenia (T'30), (T'37), (T'38) i (T'39) pokazują, że wnętrze indywiduów ma własności analogiczne do wnętrza w sensie topologicznym. O różnicy między nimi stanowi nieistnienie indywiduum zerowego co sprawia, że (T'39) musi mieć postać implikacji.

Domknięcie indywiduum ma następujące własności:

$$\forall x \exists y\ y=\mathit{cl}(x) \tag{T'40}$$

Dowód. Wystarczy zauważyć, że $\forall x\ \mathit{sec}^{+}(x,x)$. ∎

$$\forall x\ \mathcal{K}(\mathit{cl}(x),x) \tag{T'41}$$

Dowód. Podobnie jak powyżej. ∎

$$\forall x \forall y (x=y \rightarrow \mathit{cl}(x)=\mathit{cl}(y)) \tag{T'42}$$

Dowód. Z równości $x=y$ wynika $\{z : \mathit{sec}^{+}(x,z)\}=\{z : \mathit{sec}^{+}(y,z)\}$. Stąd zgodnie z (T'3) otrzymujemy tezę. ∎

$$\forall x\ \mathit{cl}(\mathit{int}(x))=\mathit{cl}(x) \tag{T'43}$$

Dowód. Niech dla pewnego y zachodzi $\mathit{con}(y,\mathit{cl}(x))$, tj. $\exists z(\mathit{con}(y,z) \wedge \mathit{sec}^{+}(z,x))$. Z definicji relacji sec^{+} wynika, że $\forall u(\mathcal{K}(z,u) \rightarrow \mathit{sec}(x,u)$. Z określenia przecięcia oraz aksjomatu (A4) otrzymujemy $\exists v(n\mathcal{K}^{+}(x,v) \wedge n\mathcal{K}^{+}(u,v))$. Zatem $\mathit{sec}^{+}(z,\mathit{int}(x))$, a więc $\mathit{con}(y,\mathit{cl}(\mathit{int}(x)))$. Z (T'30) i (T'41) wynika implikacja w odwrotną stronę. ∎

$$\forall x\ \mathit{cl}(x)=\mathit{cl}(\mathit{cl}(x)) \tag{T'44}$$

Dowód. Niech dla pewnego y zachodzi $\mathit{con}(y,\mathit{cl}(\mathit{cl}(x)))$, tj. $\exists z(\mathit{con}(y,z) \wedge \mathit{sec}^{+}(z,x))$. Z drugiego argumentu tej koniunkcji otrzymujemy $\exists u(\mathit{sec}^{+}(z,u) \wedge \mathit{sec}^{+}(u,x))$. Łatwo sprawdzić, że daje to nam $\mathit{sec}^{+}(z,x)$, tj. $\mathit{con}(y,\mathit{cl}(x))$. Implikacja w odwrotną stronę jest bezpośrednią konsekwencją (T'41). ∎

$$\forall x \forall y (\mathit{sec}(x,y) \rightarrow \mathit{cl}(x\cdot y)=\mathit{cl}(x)\cdot \mathit{cl}(y)) \tag{T'45}$$

Dowód. Wystarczy skorzystać z definicji domknięcia oraz definicji iloczynu. ∎

$$\forall x \forall y\ cl(x+y)=cl(x)+cl(y) \tag{T'46}$$

Dowód. Niech dla pewnego z zachodzi $con(z,cl(x+y))$, tj. $\exists u(con(z,u) \wedge sec^{+}(u,x+y))$. W myśl (T16)[8] mogą zajść następujące przypadki: (i) $econ(z,u) \wedge sec^{+}(u,x+y)$, (ii) $sec(z,u) \wedge sec^{+}(u,x+y)$. W drugim przypadku z warunku $sec(z,u)$ oraz definicji relacji sec^{+} wynika, że $sec(z,x+y)$, a stąd $sec(z,x) \vee sec(z,y)$. Ponieważ dowolne indywiduum jest częścią swego domknięcia (por. (T'41)), więc $sec(z,cl(x)) \vee sec(z,cl(y))$. Zatem $con(z,cl(x)+cl(y))$. W przypadku (i) należy rozpatrzyć następującą sytuację (pozostałe są oczywiste): $sec(u,x) \wedge sec(u,y) \wedge \forall v\big(K(u,v) \rightarrow (sec(x,v) \vee sec(y,v))\big)$. Z warunku $sec(u,x)$ wynika istnienie $u \cdot x$, w myśl zaś aksjomatu (AII) zachodzi $\exists w\big(K(u,w) \wedge econ(z,w) \wedge (sec^{+}(w,u\cdot x) \vee nsec(w,u\cdot x))\big)$. Gdy zachodzi $sec^{+}(w,u\cdot x)$, to $sec^{+}(w,x)$, a stąd $econ(z,cl((x))$. Jeśli natomiast $nsec(w,u\cdot x)$, to $sec^{+}(w,y)$, a więc $econ(z,cl(y))$. Implikacja w odwrotną stronę jest oczywista. ∎

$$\forall x \neq U (x=cl(x) \rightarrow x'=int(x')) \tag{T'47}$$

Dowód nie wprost. Załóżmy, że $\exists y K^{+}(x',y)$. Istnieje zatem indywiduum z takie, że $econ(x',z) \wedge econ(y,z)$. Niech u będzie dowolną częścią z, tj. $K(z,u)$. Na mocy aksjomatu (A4) zachodzi $\exists v\ nK^{+}(u,v)$. Łatwo sprawdzić, że $ncon(v,x')$. Zatem $sec(x,v)$, a ponieważ u było dowolną częścią z, więc $sec^{+}(z,x)$, tj. $K(cl(x),z)$. Jest to sprzeczne z założeniem, że $econ(x',z)$. ∎

$$U=cl(U) \tag{T'48}$$

Dowód. Podobnie jak dla (T'38). ∎

$$\forall x \neq U\ cl(x')=int(x) \tag{T'49}$$

Dowód. Podobny do dowodu (T'47). ∎

Jak to widać z tez (T'41), (T'43), (T'44) i (T'46) również domknięcie indywiduów zachowuje się identycznie jak domknięcie topologiczne.

Sądzę, że powyższy rachunek indywiduów jest kolejnym krokiem w kierunku realizacji zainicjowanego przez Whiteheada programu ugruntowania *geometrii* na bazie rozciągłych i konkretnych przedmiotów.

PRZYPISY

[1] *Por. pracę tych autorów pt. The Calculus of Inividuals and Its Uses*, The Journal of Symbolic Logic, vol. 5 (1940), nr 2, s. 45-55.

[2] Por. niniejszy zeszyt s. 74-92.

[3] Ibid., s. 82-83.

[4] Ibid., s. 83.

[5] Ibid., s. 83.

[6] Ibid., s. 82.

[7] Ibid., s. 82.

[8] Ibid., s. 83.