Henryk Ponikowski

Struktura stochastyczna jednorównaniowego liniowego modelu ekonomometrycznego z dekompozycją składnika losowego

Annales Universitatis Mariae Curie-Skłodowska. Sectio H, Oeconomia 17, 241-252

1983

ANNALES
UNIVERSITATIS MARIAE CURIE-SKŁODOWSKA
LUBLIN—POLONIA
VOL. XVII, 13 SECTIO H 1983

Zakład Statystyki i Ekonometrii
Wydział Ekonomiczny UMCS

Henryk PONIKOWSKI

Struktura stochastyczna jednorównaniowego liniowego modelu ekonometrycznego z dekompozycją składnika losowego

Стохастическая структура линейной эконометрической модели из одного уравнения с декомпозицией случайной составляющей

The Stochastic Structure of a Single-Equation Linear Econometric Error Components Model

W licznych badaniach ekonomicznych do budowy modelu ekonometrycznego wykorzystuje się powszechnie dane przekrojowe (ang. cross-section data), lub szeregi czasowe (ang. time series). Dane przekrojowe dotyczą działalności gospodarczej określonych obiektów ekonomicznych w danym momencie czasu. Pod pojęciem obiektu ekonomicznego rozumieć będziemy dowolną osobę lub zbiór osób, gospodarstwo domowe, dowolną organizację, przedsiębiorstwo, region czy gospodarkę narodową.[1] Z kolei szeregi czasowe odzwierciedlają działalność gospodarczą określonego obiektu w różnych okresach czasu. Ukazują zatem dynamikę działalności gospodarczej badanego obiektu.

Przy estymacji parametrów modeli ekonometrycznych zbudowanych dla danych przekrojowych lub szeregów czasowych występuje najczęściej problem zbyt małej liczby obserwacji statystycznych. Ograniczenie to między innymi uzasadnia poszukiwanie innych źródeł informacji statystycznych.

Jeśli połączymy dane w postaci szeregów czasowych z danymi przekrojowymi, otrzymamy dane przekrojowo-czasowe (ang. cross-section

[1] Z. Czerwiński: *Matematyczne modelowanie procesów ekonomicznych*, PWN, Warszawa 1982.

and time series data). W zbiorze danych przekrojowo-czasowych i-ty obiekt ($i = 1, ..., N$), obserwowany jest w każdym t-tym okresie czasu ($t = 1, ..., T$), dla j-tej zmiennej objaśniającej ($j = 1, ..., p$).[2]

Dla danych przekrojowo-czasowych można zbudować kilka typów modeli ekonometrycznych różniących się strukturą stochastyczną.[3] Możemy bowiem przyjąć, że składnik losowy wpływa na zmienną objaśnianą poprzez postać strukturalną modelu, modyfikując dla kolejnych obiektów i okresów parametry strukturalne modelu. Założyć również możemy, że składnik losowy funkcjonuje poza postacią strukturalną modelu. Ponadto składnik losowy w modelu ekonometrycznym zbudowanym dla danych przekrojowo-czasowych składać się może z trzech niezależnych części. Pierwsza dotyczy i-tego obiektu, druga związana jest z t-tym okresem czasu, a trzecia wynika z interacji i-tego obiektu i i-tego okresu czasu. Wszystkie składowe zdekomponowanego składnika losowego mogą być traktowane jako zmienne losowe lub tylko niektóre z nich.

Dla danych przekrojowo-czasowych możemy zbudować ekonometryczny model z dekompozycją składnika losowego (ang. error components model), gdy zakładamy, że składnik losowy funkcjonuje poza postacią strukturalną modelu, a jego wszystkie składowe są zmiennymi losowymi.

Przyjęcie określonej koncepcji procesów stochastycznych w modelu zbudowanym dla danych przekrojowo-czasowych ma ważne znaczenie praktyczne. Decyduje bowiem o metodzie estymacji parametrów modelu. Dla zdekomponowanego składnika losowego nie zawsze spełnione są założenia o jednorodności wariancji i braku autokorelacji składowych błędu losowego.

Jednorównaniowy liniowy model ekonometryczny dla danych przekrojowo-czasowych możemy zapisać następująco:

$$y_{it} = \sum_{j=1}^{p} \beta_j X_{jit} + \epsilon_{it} \quad (i = 1, .., N;\ t = 1, .., T) \tag{1}$$

gdzie: y_{it} — zmienna objaśniana dla i-tego obiektu w t-tym okresie czasu, X_{jit} — zmienna objaśniająca dla i-tego obiektu oraz t-tego okresu, β_j ($j = 1, ..., p$) parametry modelu, ε_{it} — składnik losowy.

Dla struktury stochastycznej modelu (1) przyjmujemy następujące założenia.[4]

---

[2] B. Suchecki, A. Tomaszewicz: *Modele jednorównaniowe ze złożoną strukturą stochastyczną* [w:] *Ekonometryczne modele rynku*, red. nauk. W. Welfe, t. I, PWE, Warszawa 1977.

[3] M. Nerlove: *Further Evidence on the Estimation of Dynamic Economic Relations from a Time Series-of Cross Section*, „Econometrica, 1971, vol. 39.

[4] T. D. Wallace, A. Hussain: *The Use of Error Components Model in Combining Cross Section with Time Series Data*, „Econometrica", 1969, vol. 37.

1. Składnik losowy ε_{it} modelu (1) jest zdekomponowany w sposób

$$\varepsilon_{it} = u_i + v_t + w_{it}$$

gdzie: u_i — składnik losowy wynikający ze specyfiki i-tego obiektu, v_t — składnik losowy specyficzny dla t-tego okresu czasu, w_{it} — składnik losowy charakterystyczny dla i-tego obiektu oraz t-tego czasu.

2. Składniki u_i, v_t, w_{it} są zmiennymi losowymi o wartości oczekiwanej równej zero. Mamy zatem:

$$Eu_i = Ev_t = Ew_{it} = 0 \qquad \text{dla } i = 1, ..., N; \; t = 1, ..., T$$

3. Zmienne te są wzajemnie niezależne, tzn.

$$\begin{aligned} Eu_i w_{i't} &= 0 \qquad \text{dla każdego } i, i', t \\ Eu_i v_t &= 0 \qquad \text{dla każdego } i, t \\ Ev_t w_{it'} &= 0 \qquad \text{dla każdego } i, t, t' \end{aligned}$$

4. Składowe zmiennej losowej ε_{it} nie są skorelowane, tzn.

$$Eu_i u_{i'} = \begin{cases} 0 & \text{dla } i \neq i' \\ \sigma_u^2 & \text{dla } i = i' \end{cases}$$

$$Ev_t v_{t'} = \begin{cases} 0 & \text{dla } t \neq t' \\ \sigma_v^2 & \text{dla } t = t' \end{cases}$$

$$Ew_{it} w_{i't'} = \begin{cases} 0 & \text{dla } i \neq i', t \neq t' \\ \sigma_w^2 & \text{dla } i = i', t = t' \end{cases}$$

Z założeń 1—4 wynika, że zmienna losowa ε_{it} modelu (1) jest sumą trzech niezależnych zmiennych losowych o wartości oczekiwanej równej zero i stałych wariancjach danych odpowiednio σ_u^2, σ_v^2, σ_w^2. Wariancje te dają charakterystyki rozkładów zmiennych losowych modelu (1).

Wygodniej będzie zapisać model (1) zbudowany dla danych przekrojowo-czasowych w postaci macierzowej:

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}\beta + \varepsilon \tag{2}$$

gdzie: $\mathbf{y}$ — jest wektorem zmiennej objaśnianej y_{it} o wymiarach $NT \times 1$, $\mathbf{X}$ — jest macierzą zmiennych objaśniających X_{jit} o wymiarach $NT \times p$, β — jest wektorem parametrów modelu o wymiarach $p \times 1$, ε — jest wektorem składnika losowego ε_{it} o wymiarach $NT \times 1$.

Wektory i macierze występujące w modelu (2) mają następującą postać:

$$y=\begin{bmatrix} y_{11} \\ y_{12} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y_{1T} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y_{N1} \\ y_{N2} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y_{NT} \end{bmatrix}; \quad X=\begin{bmatrix} X_{111} & X_{211} & \dots & X_{p11} \\ X_{112} & X_{212} & \dots & X_{p12} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ X_{11T} & X_{21T} & \dots & X_{p1T} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ X_{1N1} & X_{2N1} & \dots & X_{pN1} \\ X_{1N2} & X_{2N2} & \dots & X_{pN2} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ X_{1NT} & X_{2NT} & \dots & X_{pNT} \end{bmatrix}; \quad \varepsilon=\begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{12} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \varepsilon_{1T} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \varepsilon_{N1} \\ \varepsilon_{N2} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \varepsilon_{NT} \end{bmatrix}; \quad \beta=\begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \beta_p \end{bmatrix} \tag{3}$$

Wektor składnika losowego ε modelu (2), zgodnie z założeniem 1, obejmuje łączny efekt nakładających się w sposób addytywny składowych u_i, v_t oraz w_{it}. Wektor ten możemy zapisać w postaci:

$$\varepsilon=\begin{bmatrix} u_1+v_1+w_{11} \\ u_1+v_2+w_{12} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ u_1+v_T+w_{1T} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ u_N+v_1+w_{N1} \\ u_N+v_2+w_{N2} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ u_N+v_T+w_{NT} \end{bmatrix} \tag{4}$$

Ostateczną postać zdekomponowanego składnika losowego ε modelu (2) możemy zapisać:

$$\varepsilon=\mathbf{u}+\mathbf{v}+\mathbf{w} \tag{5}$$

gdzie: $\mathbf{u}$ — jest wektorem blokowym zmiennej losowej u_i o wymiarach $N\times 1$, którego składowe są wektorami $T\times 1$ zapisane jako

$$\mathbf{u}=\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ . \\ . \\ . \\ u_N \end{bmatrix}; \text{ przy czym } u_i=1^T u_i \text{ dla } \begin{array}{l} i=1, ..., N \\ t=1, ..., T \end{array} \tag{6}$$

Z kolei $\mathbf{v}$ — jest wektorem blokowym zmiennej losowej v_t o wymiarach $N\times1$ zawierającym jako składowe wektory $T\times1$ zapisane w postaci:

$$\mathbf{v}=\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ . \\ . \\ . \\ v_N \end{bmatrix}; \text{ przy czym } v_i=\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ . \\ . \\ . \\ v_T \end{bmatrix}; \text{ dla } \begin{array}{l} i=1, ..., N \\ t=1, ..., T \end{array} \tag{7}$$

Podobnie $\mathbf{w}$ — jest wektorem blokowym zmiennej losowej w_{it} o wymiarach $N\times1$, gdzie poszczególne bloki są wektorami $T\times1$, co zapisujemy:

$$\mathbf{w}=\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ . \\ . \\ . \\ w_N \end{bmatrix}; \text{ przy czym } w_i=\begin{bmatrix} w_{i1} \\ w_{i2} \\ . \\ . \\ . \\ w_{iT} \end{bmatrix}; \text{ dla } \begin{array}{l} i=1, ..., N \\ t=1, ..., T \end{array} \tag{8}$$

Ostatecznie jednorównaniowy, liniowy model ekonometryczny z dekompozycją składnika losowego w notacji macierzowej zapisujemy następująco:

$$\mathbf{y}=\mathbf{X}\beta+\mathbf{u}+\mathbf{v}+\mathbf{w} \tag{9}$$

Estymacja parametrów modelu (9) polega na wyznaczeniu p ocen parametrów strukturalnych, oraz trzech wariancji zdekomponowanego składnika losowego.[5]

Założenia 1—4 umożliwiają wyznaczenie macierzy wariancji i kowariancji zmiennej losowej ε.

Uwzględniając założenia 1 i 3, macierz wariancji i kowariancji składnika losowego ε możemy zapisać:

$$E\varepsilon\varepsilon^T=E[(\mathbf{u}+\mathbf{v}+\mathbf{w})(\mathbf{u}+\mathbf{v}+\mathbf{w})^T]=E\mathbf{u}\mathbf{u}^T+E\mathbf{v}\mathbf{v}^T+E\mathbf{w}\mathbf{w}^T \tag{10}$$

[5] M. Gruszczyński, S. Kasiewicz: *Szacowanie pewnego modelu ekonometrycznego z dekompozycją składnika losowego*, „Zeszyty Naukowe SGPiS", 1972, z. 86.

Z kolei zgodnie z (6) macierz Euu^T w macierzy (10) ma postać:

$$Euu^T = E\begin{bmatrix} u_1u_1^T & u_2u_1^T & \dots & u_Nu_1^T \\ u_1u_2^T & u_2u_2^T & \dots & u_Nu_2^T \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ u_1u_N^T & u_2u_N^T & \dots & u_Nu_N^T \end{bmatrix} \tag{11}$$

Z założenia 4 dotyczącego zmiennej losowej u_i wynika, że składnik losowy u_i ma stałą wariancję oraz zerowe kowariancje. Oznacza to, iż na głównej przekątnej macierzy Euu^T znajdują się wariancje σ_u^2, a poza nią zera. W tym przypadku chodzi o przekątną macierzy obserwacji na obiektach, tzn. macierzy o wymiarach $N \times N$. Każdy element tej przekątnej jest z kolei macierzą $T \times T$ zbudowany z wariancji σ_u^2. Wyraża to następujący zapis:

$$Euu^T = \sigma_u^2(I_N \otimes J_T) = \sigma^2 u A_{NT} \tag{12}$$

gdzie: σ_u^2 — oznacza wariancję składnika losowego u_i, I_N — jest macierzą jednostkową o wymiarach $N \times N$, J_T — jest macierzą złożoną z samych jedynek o wymiarach $T \times T$, A_{NT} — jest iloczynem Kroneckera macierzy I_N i J_T o wymiarach $NT \times NT$, przy czym:

$$A_{NT} = \begin{bmatrix} J_T & O & \dots & O \\ O & J_T & \dots & O \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ O & O & \dots & J_T \end{bmatrix} \tag{13}$$

Drugi składnik macierzy (10) czyli macierz Evv^T uwzględniając (7) możemy zapisać następująco:

$$Evv^T = E\begin{bmatrix} v_1v_1^T & v_2v_1^T & \dots & v_Nv_1^T \\ v_1v_2^T & v_2v_2^T & \dots & v_Nv_2^T \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ v_1v_N^T & v_2v_N^T & \dots & v_Nv_N^T \end{bmatrix} \tag{14}$$

Jest to macierz blokowo-kwadratowa o wymiarach $N \times N$, gdzie poszczególne bloki są jednakowymi kwadratowymi macierzami $T \times T$. Założenie 4 odnośnie do zmiennej losowej v_t przesądza o stałej wariancji i zerowych kowariancjach składnika losowego v_t. Stąd dla każdego bloku o wymiarach $T \times T$ na głównej przekątnej otrzymujemy wariancje σ_v^2, a zera poza przekątną. Możemy to zapisać w postaci:

$$Evv^T = \sigma_v^2(J_N \otimes I_T) = \sigma^2{}_v B_{NT} \tag{15}$$

gdzie: σ_v^2 — oznacza wariancję składnika losowego v_t, J_N — jest macierzą stopnia $N \times N$, złożoną z samych jedynek, I_T — jest macierzą jednostkową o wymiarach $T \times T$, B_{NT} — jest iloczynem Kroneckera macierzy J_N i I_T o wymiarach $NT \times NT$, przy czym:

$$B_{NT} = \begin{bmatrix} I_T & \dots & I_T \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ I_T & \dots & I_T \end{bmatrix} \tag{16}$$

Natomiast (8) i założenie 4 odnośnie do zmiennej losowej w_{it} przesądzają o postaci macierzy Eww^T podanej w (10). Jest to macierz diagonalna o wymiarach $NT \times NT$ zawierająca na głównej przekątnej wariancje σ^2_w. Mamy więc:

$$Eww^T = \sigma_w^2 I_{NT} \tag{17}$$

gdzie: σ_w^2 — oznacza wariancje składnika losowego w_{it}, I_{NT} — jest macierzą jednostkową o wymiarach $NT \times NT$.

Ostatecznie wykorzystując (12), (15) i (17) macierz wariancji i kowariancji zdekomponowanego składnika losowego ε modelu (2) możemy zapisać w postaci:

$$\begin{aligned} E\varepsilon\varepsilon^T &= \sigma_u^2(I_N \otimes J_T) + \sigma_v^2(J_N \otimes I_T) + \sigma_w^2 I_{NT} = \\ &= \sigma_u^2 A_{NT} + \sigma_v^2 B_{NT} + \sigma_w^2 I_{NT} = \Sigma_{NT} \end{aligned} \tag{18}$$

Macierz Σ_{NT} jest niediagonalną macierzą blokowo-kwadratową stopnia NT. Stąd model (2) jest modelem z niesferycznym składnikiem losowym. Właściwą metodą estymacji parametrów tego modelu jest uogólniona metoda najmniejszych kwadratów (ang. generalized least squares method). Jeśli zmienna losowa ε_{it} oraz jej składowe mają rozkład normalny, to uzasadnione staje się stosowanie metody największej wiarygodności.[6]

Z dotychczas przyjmowanych założeń składnika losowego ε_{it} wynika jednorodność wariancji i brak autokorelacji składowych zmiennej losowej ε_{it}. Jednak w praktyce takie założenia trudne są do spełnienia.

Zjawisko autokorelacji składników losowych (ang. autocorrelation of the disturbance term) występuje najczęściej w modelach zbudowanych dla szeregów czasowych.[7] Jednak w zbiorze danych przekrojowo-czasowych dla analizowanych obiektów dysponujemy obserwacjami czasowymi. W modelach z dekompozycją składnika losowego, w których zakładamy, że składniki losowe są wzajemnie niezależne, autokorelacja może

---

[6] M. Nerlove: *A Note on Error Components Models*, „Econometrica", 1971, vol. 39.

[7] Z. Pawłowski: *Ekonometria*, PWN, Warszawa 1980 oraz A. Zeliaś: *O pewnych metodach estymacji parametrów liniowego modelu ekonometrycznego w warunkach autokorelacji składników losowych*, „Przegląd Statystyczny", 1977, z. 3.

dotyczyć tylko składnika losowego odnoszącego się do czasu, czyli zmiennej losowej v_t.

Badając autokorelację składników losowych v_t w modelu (2), przyjmujemy, że w dalszym ciągu spełnione są założenia 1—4 dotyczące składnika losowego ε, z wyjątkiem

$$Ev_t v_{t'} = 0 \qquad \text{dla } t \neq t' \qquad (t, t' = 1, ..., T) \tag{19}$$

Dla zmiennej losowej v_t przyjmujemy, że ciąg $\{v_t\}$ stanowi stacjonarny proces stochastyczny. Jako ważny przypadek stacjonarnego procesu stochastycznego rozważać będziemy proces autoregresyjny pierwszego rzędu.[8] Mamy zatem:

$$v_t = \varrho_1 v_{t-1} + \xi_t \tag{20}$$

gdzie: ϱ_1 — współczynnik autokorelacji rzędu pierwszego, spełniający warunek $|\varrho| < 1$, ξ_t — składnik czysto losowy z parametrami $E\xi_t = 0$, $E\xi_t\xi_{t'} = 0$ dla $t \neq t'$, $E\xi_t\xi_{t'} = \sigma\xi^2$ dla $t = t'$, $(t, t' = 1, ..., T)$.

Można udowodnić, że dla zmiennej losowej v_t odpowiednie parametry są równe[9]:

$$Ev_t = 0; \qquad Ev_t^2 = \sigma_v^2; \qquad Ev_t v_{t-s} = \sigma_v^2 \varrho^{|s|}. \tag{21}$$

Autokorelacja zmiennej losowej v_t w modelu z dekompozycją składnika losowego ma wpływ na macierze (10) i (18) wariancji i kowariancji składnika losowego ε_{it}. W macierzach tych jednak ulega zmianie jedynie macierzy Evv^T zapisana w postaci (14) i (15). Zatem dalsze rozważania skoncentrujemy na tej właśnie macierzy. Poszczególne bloki macierzy (14) są jednakowymi macierzami o wymiarach $T \times T$ i zgodnie z (7) mają postać:

$$Ev_i v_i^T = E \begin{bmatrix} v_1^2 & v_2 v_1 & \dots & v_T v_1 \\ v_1 v_2 & v_2^2 & \dots & v_T v_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ v_1 v_T & v_2 v_T & \dots & v_T^2 \end{bmatrix} \tag{22}$$

Uwzględniając (21), macierz $Ev_i v_i^T$ zapisujemy następująco[10]:

$$Ev_i v_i^T = \sigma_v^2 \begin{bmatrix} 1 & \varrho & \varrho^2 & \dots & \varrho^{T-1} \\ \varrho & 1 & \varrho & \dots & \varrho^{T-2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \varrho^{T-1} & \varrho^{T-2} & \varrho^{T-3} & \dots & 1 \end{bmatrix} = \sigma_v^2 C_T \tag{23}$$

[8] A. S. Goldberger: *Teoria ekonometrii*, PWE, Warszawa 1972.
[9] J. Johnston: *Econometric Methods*, McGraw Hill, New York 1963.
[10] H. Theil: *Zasady ekonometrii*, PWN, Warszawa 1979.

Obecnie macierz Evv^T wariancji i kowariancji składnika losowego v_t jest macierzą blokowo-kwadratową o wymiarach $N \times N$ z elementami (23). Zatem zapisujemy tę macierz jako iloczyn Kroneckera macierzy I_N i C_T. Mamy więc:

$$Evv^T = \sigma_v^2(I_N \otimes C_T) = \sigma_v^2 C_{NT} \tag{24}$$

gdzie

$$C_{NT} = \begin{bmatrix} C_T & \dots & C_T \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ C_T & \dots & C_T \end{bmatrix} \tag{25}$$

Ostatecznie macierz wariancji i kowariancji składnika losowego ε_{it} modelu (2) z autokorelacją zmiennej losowej v_t ma postać:

$$E\varepsilon\varepsilon^T = \sigma_u^2 A_{NT} + \sigma_v^2 C_{NT} + \sigma_w^2 I_{NT} = \Sigma_1 \tag{26}$$

Innym ważnym przypadkiem macierzy (10) i (18) jest niejednorodność wariancji (ang. heteroscedasticity) składnika losowego.[11] Można podać szereg przyczyn, że w modelu (2) wariancje składników losowych u_i dla różnych badanych obiektów mogą charakteryzować się znacznym zróżnicowaniem.

W dalszym ciągu nie tracą na ważności założenia 1—4 struktury stochastycznej modelu (2), z tym że uchylamy założenie o stałości wariancji składnika losowego u_i, tzn.:

$$Eu_i^2 = \sigma_u^2 \qquad \text{dla } i = 1, \dots, N \tag{27}$$

i przyjmujemy, że wariancje zmiennej losowej u_i odpowiadające poszczególnym obiektom są różne, czyli:

$$Eu_i^2 = \sigma_u^2 k_i \qquad \text{dla } i = 1, \dots, N \tag{28}$$

W takim przypadku w macierzach (10) i (18) wariancji i kowariancji składnika losowego ε_{it} ulega zmianie jedynie macierz zapisana w postaci (11) i (12). Dalsze rozważania ograniczamy do tej właśnie macierzy.

Bloki głównej przekątnej macierzy Euu^T są kwadratowymi macierzami o wymiarach $T \times T$, czyli:

$$Eu_iu_i^T = E\begin{bmatrix} u_i^2 & \dots & u_i^2 \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ u_i^2 & \dots & u_i^2 \end{bmatrix} = D_{Ti} \tag{29}$$

[11] C. F. Christ: *Econometric Models and Methods*, J. Wiley and Sons Inc., New York oraz A. Zeliaś: *Kilka uwag na temat estymacji parametrów pewnego liniowego modelu ekonometrycznego z niejednorodnym składnikiem losowym*, „Przegląd Statystyczny", 1977, z. 3.

Uwzględniając (28) macierz $Eu_iu_i^T$ zapisujemy następująco:

$$Eu_iu_i^T = D_{Ti} = \sigma_u^2 k_i J_T \tag{30}$$

W przypadku niejednorodności wariancji składnika losowego u_i, diagonalne bloki macierzy Euu^T są jednakowymi macierzami o wymiarach $T \times T$ z elementami $\sigma^2_u k_i$ (k_i — współczynnik proporcjonalności). Natomiast niediagonalne bloki tej macierzy są macierzami zerowymi, ponieważ $Eu_iu_i = 0$ dla $i \neq i'$. Zatem macierz wariancji i kowariancji składnika losowego u_i wyraża następujący zapis:

$$Euu^T = \sigma_u^2 k_i (I_N \otimes J_T) = \sigma_u^2 D_{NT} \tag{31}$$

przy czym:

$$D_{NT} = \begin{bmatrix} k_1J_T & O & \dots & O \\ O & k_2J_T & \dots & O \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ O & O & \dots & k_NJ_T \end{bmatrix}$$

Ostatecznie macierz wariancji i kowariancji zmiennej losowej ε_{it} uwzględniająca niejednorodność wariancji składnika losowego u_i, bez autokorelacji składowej v_t ma postać:

$$E\varepsilon\varepsilon^T = \sigma_u^2 D_{NT} + \sigma_v^2 B_{NT} + \sigma_w^2 I_{NT} = \Sigma_2 \tag{32}$$

Możliwe jest także wystąpienie bardziej skomplikowanych przypadków niesferyczności w rozkładzie zmiennej losowej ε_{it}, jak np. jednoczesna autokorelacja i niejednorodność wariancji składnika losowego ε_{it}. Macierz wariancji i kowariancji składnika losowego ε_{it} dla takiego przypadku wyznaczamy uwzględniając (10), (17), (24) i (31). Mamy więc:

$$\begin{aligned} E\varepsilon\varepsilon^T &= Euu^T + Evv^T + Eww^T \\ &= \sigma_u^2 k_i (I_N \otimes J_T) + \sigma_v^2 (J_N \otimes C_T) + \sigma_w^2 I_{NT} = \\ &= \sigma_u^2 D_{NT} + \sigma_v^2 C_{NT} + \sigma_w^2 I_{NT} \end{aligned} \tag{33}$$

Składnik losowy ε_{it} możemy oczywiście dekomponować w różny sposób. W literaturze przedmiotu można spotkać postacie zdekomponowanego składnika losowego ε_{it}, w których brak jest zmiennej losowej u_i, bądź zmiennej losowej v_t [12]. W takich przypadkach otrzymamy inną strukturę stochastyczną modelu ekonometrycznego zbudowanego dla danych przekrojowo-czasowych, która nie jest przedmiotem naszej analizy.

Możemy również przyjąć, że składowe u_i oraz v_t są stałymi parametrami. Zmienną losową jest w tym przypadku tylko składnik w_{it}. Otrzy-

[12] G. S. Madala: *The Use Variance Components Models in Pooling Cross Section and Time Series Data*, „Econometrica", 1971, vol. 39.

mujemy wówczas model ze sferycznym składnikiem losowym. Modele takie w ekonometrii określa się jako modele analizy kowariancji.[13]

Wspomnieć należy również o przypadku najbardziej skrajnym. W modelu ekonometrycznym wykorzystującym dane przekrojowo-czasowe, możemy pominąć składniki losowe u_i oraz v_t. Struktura stochastyczna takiego modelu jest identyczna jak w modelach zbudowanych dla danych przekrojowych lub szeregów czasowych.

Każdy rodzaj przyjętych założeń struktury stochastycznej modelu zbudowanego dla danych przekrojowo-czasowych zmienia liczbę nieznanych a priori parametrów tej struktury i przesądza o metodzie estymacji parametrów modelu z dekompozycją składnika losowego.[14]

Metody estymacji parametrów modelu (1) będą przedmiotem następnej publikacji.

РЕЗЮМЕ

В многочисленных исследованиях для постройки экономометрической модели повсеместно используются обзорные данные или временные ряды. Если же объединить данные в виде временных рядов с обзорными данными, то получим обзорно-временные данные. В сборе обзорно-временных данных наблюдений i-ый объект есть в каждом t-ом отрезке времени для j-ой объяснимой переменной.

Случайная составляющая ε_{it} в модели, построенной для таких данных, декомпонирована следующим образом: $\varepsilon_{it}=u_i+v_t+w_{it}$. Чаще всего мы предполагаем, что составляющие переменной ε_{it} являются взаимонезависимыми и некоррелированными случайными переменными с ожидаемым значением, равным нулю, и дисперсиях, равных соответственно σ^2_u, σ^2_v, σ^2_w. Эти дисперсии дают характеристики распределения случайных переменных экономометрической модели.

В настоящей работе мы рассматриваем матрицу дисперсии и ковариации случайной составляющей ε_{it}, в случае автокорреляции и неоднородности ковариации случайной переменной ε_{it}. В экономометрической модели с декомпозицией случайной составляющей автокорреляция касается случайной составляющей v_t а неоднородность дисперсии — случайной составляющей u_i.

---

[13] Ch. R. Henderson: *Comment on "The Use of Error Components Models in Combining Cross Section with Time Series Data"*, „Econometrica", 1969, vol. 37.

[14] J. Kmenta, R. F. Gilbert: *Estimation of Seemingly Unrelated Regressions with Autocorrelated Regressions Disturbances*, „Journal of the American Statistical Association", 1970.

SUMMARY

Many economic studies commonly employ cross-section data or time series for the construction of econometric models. The combination of data in the form of time series with cross-section data gives cross-section and time series data. In such data the i-th object is observed in the t-th interval for the j-th explanatory variable.

In a model constructed of such data the random element ε_{it} is broken up in the following way: $\varepsilon_{it}=u_i+v_t+w_{it}$. Most frequently we assume that the components of variable ε_{it} are mutually independent and uncorrelated errors whose expected value equals zero and whose variances are σ^2_u, σ^2_v, σ^2_w respectively. These variances provide distribution characteristics of the errors in the econometric model.

The present paper considers the variance and covariance matrix of the random element ε_{it} in cases of autocorrelation and of variance heteroscedasticity of the error ε_{it}. In the econometric error components model of the random element autocorrelation concerns v_t while variance heteroscedasticity — concerns u_i.