Elżbieta Maksymiak

Warunek wystarczający oraz warunki konieczne do koincydencji zmiennej objaśniającej

Annales Universitatis Mariae Curie-Skłodowska. Sectio H, Oeconomia 26, 279-286

1992

ANNALES
UNIVERSITATIS MARIAE CURIE-SKŁODOWSKA
LUBLIN — POLONIA

VOL. XXVI, 20 SECTIO H 1992

Zakład Nauk Ekonomicznych Filii UMCS w Rzeszowie

Elżbieta MAKSYMIAK

Warunek wystarczający oraz warunki konieczne na koincydencji zmiennej

Sufficient Condition and Necessary Conditions for Explanatory Variable

W niniejszej pracy sformułujemy i udowodnimy jeden warunek wystarczający i dwa warunki konieczne na to, by zmienna objaśniająca miała własność koincydencji.

Wprowadźmy następujące oznaczenia:

$R(k) = [r_{ij}]_{i,j=1,2,\cdots,k}$ — macierz korelacji pomiędzy zmiennymi objaśniającymi,

$R_0(k) = [r_i]_{i=1,2,\cdots,k}$ — macierz korelacji pomiędzy zmiennymi objaśniającymi a zmienną objaśnianą,

$r^2(k)$ — kwadrat współczynnika korelacji wielowymiarowej dla modelu opisywanego przez parę korelacyjną $(R(k), R_0(k))$,

$R_i(k;-i)$ — i-ta kolumna macierzy $R(k)$ z usuniętym i-tym elementem,

$R(k;-i)$ — macierz $R(k)$ bez i-tego wiersza oraz i-tej kolumny,

$R_0(k;-i)$ — wektor $R_0(k)$ bez i-tej kolumny składowej,

$r^2(k;-i)$ — kwadrat współczynnika korelacji wielowymiarowej dla modelu określonego przez parę korelacyjną $(R(k;-i), R_0(k;-i))$

oraz niech

$$P(k) = \begin{bmatrix} R(k) & R_0(k) \\ [R_0(k)]^{\mathrm{T}} & 1 \end{bmatrix}, \tag{1}$$

$$P(k;-i) = \begin{bmatrix} R(k;-i) & R_0(k;-i) \\ [R_0(k;-i)]^{\mathrm{T}} & 1 \end{bmatrix}, \tag{2}$$

$$M^2(k) = r^2(k) \det R(k), \tag{3}$$

$$M^2(k;-1) = r^2(k;-i) \det R(k;-i), \tag{4}$$

Poniżej podamy jeszcze twierdzenia, z których będziemy korzystać w niniejszej pracy.

Twierdzenie 1 ([2])
Jeżeli macierz wewnętrzna A macierzy brzegowej A_1 zdefiniowanej następująco

$$A_1 = \begin{bmatrix} A & f \\ g & z \end{bmatrix}_{(k+1)\times(k+1)}, \tag{5}$$

gdzie
$A = [a_{ij}]_{i,j=1,2,\cdots,k}$,
$g = [g_1, g_2, \cdots, g_k]$,
$f^{\mathrm{T}} = [f_1, f_2, \cdots, f_k]$,
$z \in \mathrm{R}$ (R — zbiór liczb rzeczywistych),
jest nieosobliwa, to

$$\frac{\det A_1}{\det A} = z - gA^{-1}f. \tag{6}$$

Twierdzenie 2 ([1])
Jeżeli macierz A podwójnej macierzy brzegowej zdefiniowanej następująco

$$A_1 = \begin{bmatrix} A & f_1^{\mathrm{T}} & f_2^{\mathrm{T}} \\ g_1 & a & b \\ g_2 & c & d \end{bmatrix},$$

gdzie
$A = [a_{ij}]_{i,j=1,2,\cdots,k}$,
$f_1 = [f_{i1}]_{i=1,2,\cdots,k}$,
$f_2 = [f_{i2}]_{i=1,2,\cdots,k}$,
$g_1 = [g_{i1}]_{i=1,2,\cdots,k}$,
$g_2 = [g_{i2}]_{i=1,2,\cdots,k}$,
$a, b, c, d \in \mathrm{R}$
jest nieosobliwa, to

$$\det A_1 \det A = \det A_a \det A_d - \det A_b \det A_c,$$

przy czym

$$A_a = \begin{bmatrix} A & f_1^{\mathrm{T}} \\ g_1 & a \end{bmatrix}, A_b = \begin{bmatrix} A & f_2^{\mathrm{T}} \\ g_1 & b \end{bmatrix}, A_c = \begin{bmatrix} A & f_1^{\mathrm{T}} \\ g_2 & c \end{bmatrix}, A_d = \begin{bmatrix} A & f_2^{\mathrm{T}} \\ g_2 & d \end{bmatrix}.$$

Twierdzenie 3 ([2])
Jeżeli $r^2(k)$ oznacza kwadrat współczynnika korelacji wielowymiarowej dla

modelu określonego przez parę korelacyjną $(R(k), R_0(k)$, to $r^2(k) = [R_0(k)]^T[R(k)]^{-1}R_0(k)$.

Twierdzenie 4 ([3])
Jeżeli $r^2(k) = r^2(k;-i)$, to i-ta zmienna objaśniająca modelu opisywanego przez parę korelacyjną $(R(k), R_0(k)$ nie jest koincydentna.

Twierdzenie 5 ([1])
I-ta zmienna objaśniająca modelu określonego przez regularną parę korelacyjną $(R(k), R_0(k)$ ma własność koincydencji wtedy i tylko wtedy, gdy

$$r_i - [R_i(k;-i)]^T[R(k;-i)]^{-1}R_0(k;-i) > 0.$$

Twierdzenie 6 ([4])
Dla wektorów $x, y \in \mathrm{R}^n$ prawdziwa jest następująca równoważność

$$x, y \text{ są liniowo zależne} \iff (x,y)^2 = (x,x)\cdot(y,y),$$

gdzie (x,y) — oznacza iloczyn skalarny wektorów x i y.

Twierdzenie 7 ([3])
Jeżeli x, y są wektorami z przestrzeni R^n, zaś A jest macierzą dodatnio określoną stopnia n, to $x^TAy = (x,y)$.
((x,y) — oznacza iloczyn skalarny wektorów x i y).
Z kolei sformulujemy i udowodnimy zapowiedziane wcześniej twierdzenia.

Twierdzenie 8
Jeżeli $M^2(k) < M^2(k;-i)$ i $\frac{M^2(k)-M^2(k;-i)}{\det R(k;-i)} + r_i^2 = 0$ oraz jeśli:

a) wektory $R_0(k;-i)$, $R_i(k;-i)$ są liniowo zależne to i-ta zmienna objaśniająca nie jest koincydentna,
b) wektory $R_0(k;-i)$, $R_i(k;-i)$ są liniowo niezależne to i-ta zmienna objaśniająca jest koincydentna.

Dowód

a)

Przesuńmy w macierzy $P(k)$ i-tą kolumnę w miejsce k-tej kolumny oraz i-ty wiersz w miejsce k-tego wiersza. Otrzymamy wtedy macierz postaci

$$P'(k) = \begin{bmatrix} R(k;-i) & R_i(k;-i) & R_0(k;-i) \\ [R_i(k;-i)]^T & 1 & r_i \\ [R_0(k;-i)]^T & r_i & 1 \end{bmatrix}$$

Z odpowiedniej własności wyznacznika wynika, że

$$\det P(k) = \det \begin{bmatrix} R(k;-i) & R_i(k;-i) & R_0(k;-i) \\ [R_i(k;-i)]^T & 1 & r_i \\ [R_0(k;-i)]^T & r_i & 1 \end{bmatrix} \tag{7}$$

Korzystając z twierdzenia 2 oraz równania (7) otrzymujemy następującą zależność

$$\begin{aligned}&\det P(k)\det R(k;-i) = \\ &= \det\begin{bmatrix} R(k;-i) & R_i(k;-i) \\ [R_i(k;-i)]^{\mathrm{T}} & 1 \end{bmatrix}\cdot\det\begin{bmatrix} R(k;-i) & R_0(k;-i) \\ [R_0(k;-i)]^{\mathrm{T}} & 1 \end{bmatrix} - \\ &- \det\begin{bmatrix} R(k;-i) & R_0(k;-i) \\ [R_i(k;-i)]^{\mathrm{T}} & r_i \end{bmatrix}\cdot\det\begin{bmatrix} R(k;-i) & R_i(k;-i) \\ [R_0(k;-i)]^{\mathrm{T}} & r_i \end{bmatrix}\end{aligned} \tag{8}$$

Ale zauważmy, że

$$\det\begin{bmatrix} R(k;-i) & R_i(k;-i) \\ [R_i(k;-i)]^{\mathrm{T}} & 1 \end{bmatrix} = \det R(k) \tag{9}$$

zaś na mocy twierdzenia 1 mamy następujący związek

$$\begin{aligned}&\det\begin{bmatrix} R(k;-i) & R_0(k;-i) \\ [R_i(k;-i)]^{\mathrm{T}} & r_i \end{bmatrix} = \\ &= \det R(k;-i)(r_i - [R_i(k;-i)]^{\mathrm{T}}[R(k;-i)]^{-1}R_0(k;-i)).\end{aligned} \tag{10}$$

Z kolei na podstawie twierdzenia 1 oraz twierdzenia 3 mamy równość

$$\det\begin{bmatrix} R(k;-i) & R_0(k;-i) \\ [R_0(k;-i)]^{\mathrm{T}} & 1 \end{bmatrix} = \det R(k;-i)(1 - r^2(k;-i)) \tag{11}$$

a korzystając z równości (1), twierdzenia 1 i 3 otrzymujemy zależność

$$\det P(k) = \det R(k)(1 - r^2(k)). \tag{12}$$

Po zastosowaniu wzorów (9), (10), (11) i (12) równanie (8) przyjmuje postać

$$\begin{aligned}&(\det R(k) - \det R(k)r^2(k))\det R(k;-i) = \\ &= \det R(k)\det R(k;-i)(1 - r^2(k;-i)) - \\ &-(\det R(k;-i))^2(r_i - [R_i(k;-i)]^{\mathrm{T}}[R(k;-i)]^{-1}R_0(k;-i))^2.\end{aligned} \tag{13}$$

Stąd

$$\begin{aligned}&[r_i - [R_i(k;-i)]^{\mathrm{T}}[R(k;-i)]^{-1}R_0(k;-i)]^2\det R(k;-i) = \\ &= \det R(k)r^2(k) - \det R(k)r^2(k;-i).\end{aligned} \tag{14}$$

Przekształćmy równość (14) w następujący sposób

$$
\begin{aligned}
2r_i(r_i - [R_i(k;-i)]^{\mathrm{T}}[R(k;-i)]^{-1}R_0(k;-i) = \\
= r_i^2 - ([R_i(k;-i)]^{\mathrm{T}}[R(k;-i)]^{-1}R_0(k;-i))^2 + \\
+\frac{r^2(k)\det R(k) - r^2(k;-i)\det R(k)}{\det R(k;-i)}.
\end{aligned}
\tag{15}
$$

Z kolei dodajmy i odejmijmy do prawej strony równości (15) wyrażenie

$$
\frac{r^2(k;-i)\det R(k;-i)}{\det R(k;-i)}.
$$

Wtedy

$$
\begin{aligned}
2r_i(r_i - [R_i(k;-i)]^{\mathrm{T}}[R(k;-i)]^{-1}R_0(k;-i)) = \\
= r_i^2 - ([R_i(k;-i)]^{\mathrm{T}}[R(k;-i)]^{-1}R_0(k;-i))^2 + \\
+\frac{r^2(k)\det R(k) - r^2(k;-i)\det R(k;-i)}{\det R(k;-i)} + \\
+\frac{r^2(k;-1)(\det R(k;-i) - \det R(k))}{\det R(k;-i)}.
\end{aligned}
\tag{16}
$$

Ale z równości (9), twierdzenia 1 i 3

$$
\begin{aligned}
\frac{r^2(k;-i)(\det R(k;-i) - \det R(k))}{\det R(k;-i)} = \\
= ([R_i(k;-i)]^{\mathrm{T}}[R(k;-i)]^{-1}R_i(k;-i)) \cdot \\
\cdot([R_0(k;-i)]^{\mathrm{T}}[R(k;-i)]^{-1}R_0(k;-i)).
\end{aligned}
\tag{17}
$$

Ostatecznie na podstawie wzorów (3), (4) i (17) równość (16) przyjmuje postać

$$
\begin{aligned}
2r_i(r_i - [R_i(k;-i)]^{\mathrm{T}}[R(k;-i)]^{-1}R_0(k;-i)) = \\
= r_i^2 + \frac{M^2(k) - M^2(k;-i)}{\det R(k;-i)} + ([R_i(k;-i)]^{\mathrm{T}}[R(k;-i)]^{-1}R_i(k;-i)) \cdot \\
\cdot([R_0(k;-i)]^{\mathrm{T}}[R(k;-i)]^{-1}R_0(k;-i)) - \\
-([R_i(k;-i)]^{\mathrm{T}}[R(k;-i)]^{-1}R_0(k;-i))^2.
\end{aligned}
\tag{18}
$$

Ponieważ macierz $[R(k;-1)]^{-1}$ jest dodatnio określona, więc na podstawie twierdzenia 6 i 7 oraz liniowej zależności wektorów $R_0(k;-i)$ i $R_i(k;-i)$

wynika, że

$$([R_i(k;-i)]^{\mathrm{T}}[R(k;-i)]^{-1}R_i(k;-i))\cdot \\ \cdot([R_0(k;-i)]^{\mathrm{T}}[R(k;-i)]^{-1}R_0(k;-i)) = \\ = ([R_i(k;-i)]^{\mathrm{T}}[R(k;-i)]^{-1}R_0(k;-i))^2. \tag{19}$$

Z kolei korzystając z równania $\frac{M^2(k)-M^2(k;-i)}{\det R(k;-i)} + r_i^2 = 0$ oraz wzoru (19) widzimy, że prawa strona zależności (18) jest równa zero czyli

$$2r_i(r_i - [R_i(k;-i)]^{\mathrm{T}}[R(k;-i)]^{-1}R_0(k;-i)) = 0$$

co oznacza w myśl twierdzenia 5, że i-ta zmienna objaśniająca nie jest koincydentna.

b)

Z nierówności postaci

$$([R_i(k;-i)]^{\mathrm{T}}[R(k;-i)]^{-1}R_i(k;-i))\cdot \\ \cdot([R_0(k;-i)]^{\mathrm{T}}[R(k;-i)]^{-1}R_0(k;-i)) \geq \\ \geq ([R_i(k;-i)]^{\mathrm{T}}[R(k;-i)]^{-1}R_0(k;-i))^2$$

wykazanej w pracy [1], liniowej niezależności wektorów $R_0(k;-i)$ i $R(k;-i)$ oraz twierdzenia 6 i 7 wynika, że

$$([R_i(k;-i)]^{\mathrm{T}}[R(k;-i)]^{-1}R_i(k;-i))\cdot \\ ([R_0(k;-i)]^{\mathrm{T}}[R(k;-i)]^{-1}R_0(k;-i)) > \\ > ([R_i(k;-i)]^{\mathrm{T}}[R(k;-i)]^{-1}R_0(k;-i))^2. \tag{20}$$

Ale ponieważ $\frac{M^2(k)-M^2(k;-i)}{\det R(k;-i)} + r_i^2 = 0$ i zachodzi nierówność (20), więc prawa strona równania (18) jest większa od zera.

Stąd również

$$2r_i(r_i - [R_i(k;-i)]^{\mathrm{T}}[R(k;-i)]^{-1}R_0(k;-i)) > 0$$

a więc w myśl twierdzenia 5 i-ta zmienna objaśniająca jest koincydentna.

c.n.d.

Twierdzenie 9

Jeżeli $r^2(k;-i) = 1$, to i-ta zmienna objaśniająca modelu opisywanego przez parę korelacyjną $((R(k), R_0(k))$ nie ma własności koincydencji.

Dowód

Zauważmy, że lewa strona równania (14) jest zawsze większa lub równa zero więc prawdziwa jest nierówność

$$\det R(k)(r^2(k) - r^2(k;-i)) \geq 0$$

a stąd mamy, że

$$r^2(k) \geq r^2(k; -i). \tag{21}$$

Ponieważ $r^2(k; -i) = 1$, więc z zależności (21) oraz z faktu, że $r^2(k) \in < 0, 1 >$ otrzymujemy następującą równość

$$r^2(k) = 1,$$

czyli na mocy twierdzenia 4 i-ta zmienna objaśniająca nie jest koincydentna.

c.n.d.

W twierdzeniu 8 istotną rolę odgrywa miernik $M^2(k)$, który jest iloczynem kwadratu współczynnika korelacji wielowymiarowej modelu o k zmiennych objaśniających i wyznacznika macierzy korelacji zmiennych objaśniających. Jeżeli miernik $M^2(k)$ jest mniejszy od takiego samego miernika ale obliczonego dla modelu bez i-tej zmiennej objaśniającej (miernik ten oznaczono symbolem $M^2(k; -i)$) oraz jeśli różnica $M^2(k; -i) - M^2(k)$ jest równa iloczynowi kwadratu współczynnika korelacji i-tej zmiennej objaśniającej i zmiennej objaśnianej oraz wyznacznika macierzy korelacji zmiennych objaśniających bez i-tej zmiennej, to twierdzenia 8 rozstrzyga problem koincydencji i-tej zmiennej objaśniającej w zależności od liniowej zależności (niezależności) takich dwóch wektorów, z których jeden ma współrzędne równe współczynnikom korelacji między zmiennymi objaśniającymi (bez i-tej) a zmienną objaśnianą, natomiast współrzędne drugiego wektora są równe współczynnikom korelacji i-tej zmiennej objaśniającej z pozostałymi zmiennymi objaśniającymi.

Z kolei jeśli kwadrat współczynnika korelacji wielowymiarowej dla modelu bez i-tej zmiennej objaśniającej jest równy 1, to na mocy twierdzenia 9 wnioskujemy, że i-ta zmienna nie ma własności koincydencji. Inaczej mówiąc, jeśli i-ta zmienna objaśniająca jest koincydentna, to kwadrat współczynnika korelacji wielowymiarowej obliczonego dla modelu bez i-tej zmiennej nie może być równy 1.

Twierdzenia 8 i 9 służą do badania koincydencji dowolnej zmiennej objaśniającej bez korzystania z definicji koincydencji, która orzeka, że i-ta zmienna objaśniająca ma własność koincydencji, jeżeli $\operatorname{sign} r_i = sign a_i$, gdzie a_i jest oceną i-tego parametru strukturalnego otrzymaną w wyniku estymacji metodą najmniejszych kwadratów. Koincydencja zmiennych objaśniających jest jednym z głównych postulatów dotyczących cech „dobrego” modelu. W przypadku gdy model nie jest koincydentny, to nie istnieje sensowna interpretacja oszacowania parametrów strukturalnych tego modelu.

LITERATURA

[1] Borowiecki A.: Metody doboru zmiennych i zagadnienie koincydencji, Praca doktorska, SGPiS Warszawa 1983.
[2] Kolupa M.: Macierze brzegowe w badaniach ekonometrycznych, PWE, Warszawa 1982.
[3] Maksymiak E.: O badaniu koincydencji dowolnej zmiennej objaśniającej, Zeszyty Naukowe Akademii Ekonomicznej w Krakowie, 1987, 243.
[4] Mostowski A., Stark M.: Algebra liniowa, PWN, Warszawa 1958.

SUMMARY

The present paper is devoted to the study of coincidence if a discretionary variable interpreting the econometric model. The work formulates and proves one sufficient condition and two necessary conditions for the interpretative variable to have the property of coincidence.