Wiesław Gawlik

Zagadnienie symbolicznej interpretacji logiki tradycyjnej

Collectanea Theologica 23/1-2, 31-65

1952

WIESŁAW GAWLIK

ZAGADNIENIE SYMBOLICZNEJ INTERPRETACJI LOGIKI TRADYCYJNEJ.

§ 3.

Teoria klas

Zdania KL mają w sobie pewien element znaczeniowy, który może być traktowany jako ich aspekt klasowy. Zdania te mówią np. o wszystkich czy niektórych koniach, górach, ludziach, a więc o wszystkich czy pewnych elementach jakichś klas. Mówią o nich, że posiadają lub nie posiadają pewnej cechy, ogólniej, że spełniają lub nie spełniają pewnej funkcji — a posiadanie cechy, czy spełnianie funkcji można ujmować także jako przynależność do klasy bytów posiadających tę cechę czy spełniających daną funkcję.

Ten aspekt stwarza więc realną podstawę dla możliwości interpretacji logiki tradycyjnej na gruncie teorii klas.

Dojście do najprostszego ujęcia wygląda w ten sposób: wszystkie S są P — to oznacza, że każdy przedmiot posiadający cechę S, ma cechę P. Jeśli więc wszystkie przedmioty posiadające cechę S określimy jako klasę a, zaś wszystkie przedmioty posiadające cechę P, jako klasę b, to zdanie ogólno twierdzące przyjmie postać zawierania się klasy a w klasie b. Analogicznie zdanie ogólno przeczące przyjmie postać zawierania się klasy a w klasie — b. Budując zdania szczegółowe jako zaprzeczenie ogólnych otrzymamy odpowiedniości (rzekome):

$$
\begin{array}{ll}
SaP: & a \subset b \\
SeP: & a \subset - b \\
SiP: & \sim (a \subset - b) \\
SoP: & \sim (a \subset b)
\end{array}
$$

Ujęcie to, pozornie nowe, przestaje być takim, gdy wnikniemy w sens symboli. Pojęcia teorii klas nie są w logistyce pojęciami pierwotnymi, lecz są definiowane na gruncie teorii zmiennej pozornej. Zawieranie się klasy w klasie jest zdefiniowane następująco:

$$\alpha \subset \beta = x \varepsilon \alpha . \supset_x . x \varepsilon \beta \ Df$$ [72])

co przedstawione w używanych tu symbolach (przy zastąpieniu przynależności do klasy przez funkcję) wygląda:

EMab(x)Cfxgx[73])

Zdanie ogólne przeczące przybiera formę:

(x)CfxNgx

a zatem otrzymamy dwa odpowiedniki identyczne, jak w teorii zmiennej pozornej. Cała krytyka tam przytoczona odnosi się więc w pełni również do określenia zdań KL za pomocą inkluzji.

Może się jednak wydać, że odnosi się to tylko do inkluzji, podczas gdy są możliwe jeszcze inne ujęcia zdań KL w teorii klas. Dlatego krótko omówię inne możliwe ujęcia. Prócz ujęcia inkluzyjnego są możliwe na terenie teorii klas ujęcia zdań KL definiujące je w terminach równości zakresowej klas, w terminach stosunku sumy logicznej klas do klasy pustej i do klasy pełnej.

Ujęcie wychodzące z pojęcia równości zakresowej wygląda tak:

---

72) Princ. Math. I, 205, 207.

73) Wprowadzam symbol „M" na oznaczenie inkluzji. Zamiast równości definicyjnej użyłem tu równoważności.

$$\begin{aligned} SaP &: ab = a \\ SeP &: a—b = a \\ SiP &: a—b \neq a \\ SoP &: ab \neq a \end{aligned}$$

Takie ujęcie występuje już u Leibniza[74]) a następnie u Jevonsa[75]), przy czym w obu wypadkach są definiowane tylko zdania ogólne, zaś zdania szczegółowe można uzyskać przez negację ogólnych.

Odmianą takiego ujęcia dla SaP jest:

$$SaP : a = vb$$

gdzie v jest nieokreślone, tak iż oznacza to, że klasa a jest równa zakresowo z pewną (nieoznaczoną) częścią klasy b. Ujęcie to zbiega się z poprzednim, gdy zauważymy, że v = a.

Ujęcie w terminach stosunku klas do klasy pustej przedstawia się następująco:

$$\begin{aligned} SaP &: a—b = 0 \\ SeP &: ab = 0 \\ SiP &: ab \neq 0 \\ SoP &: a—b \neq 0 \end{aligned}$$

I to ujęcie znajduje się u Leibniza[76]), potem u Boole'a[77]) i u Couturata[78]).

---

[74]) Lewis C. I., A Survey of Symbolic Logic 15, odnośnik do: Gerhardt, Philosophischen Schriften von Leibniz, Berlin 1890, VII, 213—214.

[75]) tamże 75.

[76]) Lewis C. I., A Survey... 14, odnośnik do: Gerhardt o. c. VII, 212. Por. Leibniz, Opuscules et fragments inédits de Leibniz, ed. L. Couturat, Paris 1903, 309.

[77])Lewis C. I. o. c. 57, odnośnik do: G. Boole, Laws of Thought IV, oraz G. Bolle, The Mathematical Analysis of Logic... 21—22.

[78]) Couturat L., O błędności niektórych trybów klasycznego sylogizmu 168.

Ujęcie w formie stosunku klas do klasy pełnej stanowi właściwie odmianę ujęcia powyższego:

$$\begin{aligned} SaP &: -a+b = 1 \\ SeP &: -a+-b = 1 \\ SoP &: -a+b \neq 1 \\ SiP &: -a+-b \neq 1 \end{aligned}$$

Ujęcia te wydają się odbiegać od ujęcia inkluzyjnego, ale okazują się na gruncie teorii klas ujęciami równoważnymi. Równoważność tę można wykazać łatwo na gruncie algebry logiki, nie będę jednak powtarzał tu dowodów, jakie można znaleźć np. u Lewisa[79]), ale wskażę na znaczenie tych wzorów według ich znaczenia w teorii zmiennej pozornej, do której sprowadza się teoria klas. Ograniczam się do analizy odpowiedników zdania SaP, przy czym ze względów graficznych przynależność elementu do klasy przedstawiam w formie „fx".

Ujęcie za pomocą równości zakresowej oznacza, że zakres elementów należących do klasy a jest równy zakresowi elementów należących do klasy a i b równocześnie. To prowadzi do wyrażenia równoważności należenia do a z należeniem do a · b. Jeśli należenie do a wyrazić przez fx, a należenie do b przez gx, to mamy równoważność:

EfxKfxgx (jako odpowiednik SaP).

To zaś wyrażenie na gruncie teorii zmiennej pozornej w oparciu o teorię zdań jest równoważne wyrażeniu:[80])

Cfxgx

W ten sposób ujęcie za pomocą równości zakresowej sprowadza się podobnie jak ujęcie inkluzyjne do formy implikacyjnej.

W analogiczny sposób jak powyższy dochodzi się do uznania następnych dwóch ujęć za równoważne z ujęciem in-

---

[79]) Lewis C. I. o. c. 126, 189.

[80]) w oparciu o tezę: ECpqEpKpq — Princ. Math. 120, teza 4.71.

kluzyjnym. Przeprowądzenie dowodów pomijam, odsyłając do dowodów zawartych w „Principia Mathematica“ [81]).

Od innej strony podchodzi na terenie teorii klas do zagadnienia odpowiedników zdań KL Sleszyński. Zestawia on możliwe stosunki klas ze sobą. Są to: α — zamienność, β — podrzędność, γ — nadrzędność, δ — krzyżowanie, ε — wykluczanie — i określa, które z tych stosunków zakresowych zachodzą przy których zdaniach KL [82]):

SaP : SαP lub SβP
SeP : SεP
SiP : SαP lub SβP lub SγP lub SδP
SoP : SγP lub SδP lub SεP

Można to przedstawić w postaci schematu:

$$\begin{array}{ccccc} \multicolumn{2}{c}{\overbrace{}^{SaP}} & \multicolumn{3}{c}{\overbrace{}^{SoP}} \\ \alpha & \beta & \gamma & \delta & \varepsilon \\ \multicolumn{4}{c}{\underbrace{}_{SiP}} & \underbrace{}_{SeP} \end{array}$$

który unaocznia powyższe definicje, jak również schematycznie wykazuje zachodzenie głównych stosunków KL.

Takie stosunki zakresowe zachodzą, gdy żadna z dwóch klas nie jest pustą. Uwzględnienie jako możliwych stosunków klas niepustych z pustymi i pustych między sobą dołącza do 5 wymienionych trzy nowe stosunki pseudo-zakresowe (ponieważ klasa pusta nie ma właściwie zakresu): pusto-nadrzędność (zawieranie klasy niepustej w pustej), którą Sleszyński oznacza symbolem ξ, pusto-podrzędność — η i pusto zamieność ϑ [83])

[81]) Princ. Math. I, 219, tezy 24.3 i 24.31.

[82]) Sleszyński J., Teoria dowodu (podług wykładów uniwersyteckich prof. dra J. S. opracował S. K. Zaremba) I, Kraków 1925, 67.

[83]) Sleszyński J., Teoria dowodu I, 125. Podobne 8 stosunków nieco inną drogą otrzymuje Ajdukiewicz (Główne zasady...., 212—213), lecz nie posługuje się nimi do zdefiniowania zdań KL. Do stosunków Sleszyńskiego i Ajdukiewicza nawiązuje w swym ujęciu J. Łoś w rozprawie cytowanej w uw. 84).

Schemat analogiczny do poprzedniego dla tak powstałych 8 stosunków przedstawia się:

$$\begin{gathered}\overbrace{\alpha\ \beta}^{SaP}\quad\overbrace{\gamma\ \delta\quad\varepsilon\ \xi}^{SoP}\quad\overbrace{\eta\ \vartheta}^{SaP}\\[-4pt]\underbrace{}_{SiP}\quad\underbrace{}_{Sep}\end{gathered}$$

To ujęcie pozostaje już w wyraźnej sprzeczności z logiką tradycyjną. Ze związków KL ważną zostaje jedynie sprzeczność, z wniosków przez przekształcenie upada „conversio per accidens".

Ujęcie to, wyglądające oryginalnie, jest jednak, jak słusznie wykazuje J. Łoś [84]), równoważne ujęciu:

SaP : Nexab'
SeP : Nexab
SiP : exab
SoP : exab'

(exab oznacza, że część wspólna zakresów a i b nie jest pusta[85])). Skoro zaś odpowiedniki zdań KL w tym ujęciu mają wyżej wskazane znaczenie, to sprowadzają się do ujęcia w terminach stosunku klas do klasy pustej, co jest równoważne ujęciu inkluzyjnemu i w dalszej konsekwencji ujęciu przy pomocy kwantyfikatorów — tak że i to ujęcie w swej istocie, bez względu na etapy drogi do ostatecznych wyników, nie wnosi nic nowego do naszej analizy i nie podaje nowego ujęcia znaczenia zdań KL.

Na terenie teorii klas napotkałem jeszcze na jedno ciekawe ujęcie zdań KL przez Smitha[86]), w postaci skomplikowa-

---

[84]) J. Łoś, Próba aksjomatyzacji logiki tradycyjnej, Annales Universitatis Mariae Curie-Skłodowska, Lublin, I (1946), Sectio F, 223.

[85]) tamże 213.

[86]) Nie mogłem sięgnąć do oryginalnych rozpraw Smitha, tak że referuję wg Kattsoff L., Concerning the Validity of Aristotelian Logic, Philosophy of Science I (1934), 149—162.

nych funkcji operujących inkluzją. Przytaczam je w stosowanej tu symbolice (w oryginale symbolika Schrödera-Peirce'a): [87])

SaP : KMabAMbaKNMab'NMb'a
SeP : KMab'AMb'aKNMabNMba
SiP : ANMab'KNMb'aAMabMba
SoP : ANMabKNMbaAMab'Mb'a

W ten interpretacji wszystkie związki KL, a w konsekwencji wszystkie prawa logiki tradycyjnej zostają zachowane także przy uwzględnieniu klas pustych. Kattsoff wyciąga stąd wniosek, że wobec tego zakres zmiennych nie musi podlegać żadnym ograniczeniom[88]).

To ujęcie jest nader ciekawe w sobie i nie jest bez znaczenia dla studiów nad logiką tradycyjną. Pragnę jednak zaznaczyć, że stawia sobie ono całkiem inny cel niż moja praca. Kattsoffowi chodzi o obronę ważności, a przede wszystkim niesprzeczności logiki tradycyjnej. O ile logika ta jest sprzeczna przy uwzględnieniu klas pustych, to nie da się znaleźć żadnej interpretacji jej zdań takiej, by wszystkie jej prawa zostały zachowane. Przeciwnie: jeżeli da się znaleźć choćby jedną interpretację zdań KL taką, przy której prawa KL zostaną zachowane, to logika tradycyjna jest niesprzeczna[89]). Podobne zagadnienie stawia sobie Słupecki: „czy istnieje taki sens zdań a — d (zdań KL), przy którym wszystkie tezy sylogistyczne pozostaną zdaniami prawdziwymi, gdy za ich zmienne podstawiać będziemy również nazwy puste“ [90]).

Powodzenie takich poszukiwań nie prowadzi jednak właściwie do obrony logiki tradycyjnej. Pozwala ono tylko stwierdzić, że istnieją funkcje, dla których zostają zachowane prawa KL również przy podstawieniach nazw pustych. Pozostaje jednak przez to niezbadana sprawa, w jakim stosunku stoją dane

---

[87]) L. Kattsoff, o. c. 157. Dla negacji przynazwowej używam znaku"'"

[88]) L. Kattsoff, o. c. 162: No restrictions are to be laid upon the generality of the variables.

[89]) tamże 156.

[90]) J. Słupacki, Uwagi o sylogistyce Arystotelesa 187.

funkcje do zdań KL. O ten stosunek krytycy najmniej pytają. Słupecki mówi np. o sensie zdań KL „mniej lub więcej zgodnym z potoczną intuicją“ [91]), zupełnie jakby te zdania nie posiadały własnego sensu, lecz sens ten zostawał im nadany dopiero przez interpretację, a można było tylko ustalić jego większą lub mniejszą zgodność z potoczną intuicją.

W rzeczywistości sprawa ma się wprost przeciwnie i jeżeli chcemy, by wyniki badania odnosiły się do logiki tradycyjnej, to zagadnienie odpowiedniości musi zostać wysunięte na pierwszy plan. Bez jej zbadania i ustalenia wszelkie dalsze wyniki, jakkolwiek interesujące same w sobie, nie mogą mieć żadnego zastosowania do logiki tradycyjnej.

Tak jest też z interpretacją Smitha. Jego funkcje są ciekawe — można powiedzieć, że o ile zachodzi dane zdanie KL, to będzie zachodziła jedna z alternatywnych możliwości uwzględnionych w odpowiedniku Smitha. Ale nie można powiedzieć, by treść zdań KL oznaczała to właśnie, co te funkcje, zwłaszcza by zawierała w sobie takie alternatywne możliwości.

— Mówiąc ogólnie o ujęciu logiki tradycyjnej na terenie teorii klas można by poruszyć problem klas pustych i problem interpretacji egzystencjalnej zdań KL. Oba te problemy wymagałyby obszernych studiów, które wykraczałyby poza ramy tej pracy. Nadto te uwagi nie przyniosłyby nic istotnie nowego dla zagadnienia tu omawianego, z tego względu, że wszystkie ujęcia klasowe sprowadzają się bez reszty do ujęcia w teorii zmiennej pozornej. Bez reszty — ponieważ symbole logistyki posiadają jedynie takie znaczenie, jakie zostało im nadane w definicjach i żadne przekształcenie nie wnosi nowych elementów treściowych.

Teoria zmiennej pozornej jest wcześniejsza od wszelkich rozważań o klasach pustych i niepustych i jej wzory odnoszą się do wszelkich podstawień, dopuszczalnych w niej. Klasy puste zostają przez nią uwzględnione dzięki tej właściwości implikacji, że jest ona prawdziwa przy błędnym poprzedniku

[91]) tamże 190.

a prawdziwym następniku (to prowadzi do możliwości uwzględnienia zawierania się klasy pustej w niepustej) oraz przy błędnych poprzedniku i następniku (klasa pusta w pustej), jest zaś błędna przy prawdziwym poprzedniku, a błędnym następniku (klasa niepusta w pustej).

W odniesieniu do interpretacji egzystencjalnej zdań KL odwołuję się do omówienia kwantyfikatora szczegółowego, które wystarczy zasadniczo dla wyjaśnienia, w jakim sensie zdania KL mogą być uważane za egzystencjalne.

— Z omówienia interpretacji klasowej zdań KL płynie szereg wniosków dotyczących warunków adekwatnej ich interpretacji.

1) Interpretacja winna uwzględnić formę pozytywną (przy zdaniach twierdzących) względnie negatywną (przy przeczących) zdań KL. Interpretacja Leibniza-Couturata odwraca tę formę przy wszystkich zdaniach i już z tej racji nie może wyrazić poprawnie ich treści. Choćby pewna forma negatywna była równoważna implikacyjnie innej formie twierdzącej, to jednak równoważność implikacyjna nie oznacza równoznaczności treściowej. Przecież wszystkie tezy rachunku zdań są implikacyjnie równoważne, bo wszystkie mają wartość logiczną dodatnią — a nie wyrażają tej samej treści.

2) Związanym z ostatnio przytoczonym postulatem jest postulat inny, oparty na stwierdzeniu, że zdania KL odnoszą się bezpośrednio do tych tylko klas, jakie są przedstawione przez przedmioty o cesze S i przez przedmioty o cesze P, a nie do innych klas, w szczególności nie do negacji tych klas. Wprawdzie w logistyce spotykamy równoważność:

$$x \varepsilon -\alpha . \equiv . x \sim \varepsilon \alpha$$ [92])

ale ta równoważność odnosi się właśnie do stosunków logistycznych, gdzie wzory mają tylko te cechy, jakie są określone przez definicje, dlatego zaprzeczenie własności czy klasy daje własność czy klasę ściśle sprzeczną. W języku potocznym stosunki

[92]) Princ. Math. 207 (teza 22.35).

nie są tak ścisłe. Negacja jakiejś własności oznacza często nie tylko jej brak, ale nadto pewne cechy pozytywne, właściwe danemu pojęciu. Można temu zarzucić brak ścisłości, ale nie można zaprzeczyć, że pojęcia tworzące się w ciągu wieków drogą naturalnego, przednaukowego myślenia i mowy, nawarstwiły na sobie treść nieraz nieściśle się wiążącą z etymologicznym i gramatycznym pochodzeniem słowa. Stąd też w logice operującej właśnie słowami języka potocznego nie można automatycznie przyjmować równoważności analogicznej do powyższej logistycznej, jako równoznaczności treściowej, — jakkolwiek w praktyce najczęściej będzie ona zachodziła. Fakt jednak istnienia wyjątków nakazuje ostrożność i odrzucenie automatycznych przejść mogących wypaczyć znaczenie zdań KL.

3) Pewna jeszcze strona ujęcia klasowego nasuwa zastrzeżenia. Jedną z możliwych równoważnych form jest forma stosunku klas do klasy pustej — co oznacza istnienie lub nieistnienie pewnych klas. Niesposób natomiast w zdaniach KL dojrzeć podstawę do takiego ujęcia. Pewną dalszą konsekwencją z prawdziwości zdań KL będą wnioski dotyczące istnienia klas, ale będzie to tylko konsekwencja i ta konsekwencja dopiero będzie zależna od dodatkowego uwzględnienia pustości czy niepustości klas. Same zdania KL mówią tylko o pewnych stosunkach zakresowych czy treściowych — i adekwatna interpretacja musi zdać sprawę z takich właśnie stosunków, a nie opisywać zdania za pomocą ich niekoniecznie prawdziwych konsekwencji.

4) Z powyższą uwagą łączy się znowu inny aspekt. Zdania KL nie tylko nie mówią o istnieniu czy nieistnieniu klas, ale nawet wprost i bezpośrednio nie mówią one o klasach, o stosunkach zachodzących między klasami. „Wszystkie S" to nie jest to samo, co klasa wszystkich S-ów. Logistyka wprowadziła konsekwentne i ważne odróżnienie zbioru od jego elementów i to nawet przy zbiorach jednostkowych [93]). Znowu — jest wprawdzie prawdą, że przejście od zdania o wszystkich

[93]) A. Mostowski, Logika matematyczna 84.

elementach zbioru do zdania o dawnym zbiorze jest w pewien sposób możliwe, ale jest to już przejście, przy którym, jak przy każdym przejściu, należy zachować warunki poprawności operacji. Te warunki są zaś w języku potocznym bardziej skomplikowane niż w logistyce. W logistyce można uważać za „równoznaczne" [94]) wyrażenia „przedmiot x ma własność X" i „przedmiot x należy do zbioru X" [95]), ale w języku potocznym należy taką równoważność w każdym wypadku stwierdzić. Automatyczne stosowanie zasad logistyki do języka potocznego zapoznaje zupełnie odrębność tych dwóch języków.

Warunkiem poprawnej i adekwatnej interpretacji zdań KL będzie oddanie w odpowiednikach faktu, że podmiotem tych zdań są elementy a nie klasy. To dyskwalifikuje teorię klas jako możliwy teren adekwatnej interpretacji niezależnie od tego, że terminy klasowe otrzymują znaczenie przez definicje w terminach teorii zmiennej pozornej. Nawet gdyby ująć klasy w inny sposób, nie pozwoliłoby to przedstawić pełnego i właściwego sensu zdań KL w tak powstałej teorii. Z drugiej zaś strony, nawet znalezienie takich funkcji klasowych, jak funkcja Smitha, które zachowują związki KL, nie może jednak być odtworzeniem właściwej treści zdań KL.

§ 4.

Teoria orzeczników

Jest to teoria, która u Czeżowskiego [96]) zajmuje miejsce teorii klas. Omawia więc podobne zagadnienia, ale z nieco innego punktu widzenia i dlatego zasługuje na osobne omówienie, zwłaszcza że na jej terenie przedstawia autor logikę tradycyjną (którą nazywa „logiką klasyczną").

---

[94]) Właściwsze byłoby użyć w tym wypadku słowa „równoważne", zachowuję jednak słowo użyte przez Mostowskiego.

[95]) A. Mostowski, o.c. 83.

[96]) T. Czeżowski, Logika, Warszawa 1948, Część 4, str. 96—130.

Czeżowski stwierdza, że funkcje zdaniowe mają często postać funkcji orzecznikowej: „x jest P". Od tego stwierdzenia posuwa się dalej, zakładając, że „każdą funkcję propozycjonalną fx można przedstawić równoważnie w postaci funkcji orzecznikowej Px czyli „x jest P" [97]). Założenie to wyraża w formie symbolicznej:

(f) (EP)EfxPx [98])

Teoria orzeczników jest dogodna o tyle, że obejmuje teorię klas oraz teorię opisu — a przez to stwarza możliwość dwojakiej interpretacji funkcji orzecznikowych. Mogą one być „interpretowane bądź jako stwierdzenie, że x posiada własność P-owości, bądź że należy do klasy (zakresu) P-ów" [99]). Te dwa sposoby interpretacji odpowiadają podchodzeniu do zagadnień od strony treściowej i zakresowej. Ujmując te dwa aspekty w jedną teorię autor zakłada milcząco ich równoważność zgodnie z ogólnym podejściem logistyki [100]).

Ta równoważność nie jest jednak oczywista. Bliżej wchodzi w tę kwestię Mostowski, zajmując się stosunkiem równości (w sensie: zbiory są równe, jeśli mają wszystkie własności wspólne), którą można by nazwać równością treściową, do równości zakresowej. Wskazuje on, że na terenie logiki klas i stosunków można dowieść, że równość treściowa implikuje równość zakresową, natomiast nie można dowieść implikacji odwrotnej, orzekającej, że zbiory o równych zakresach mają wszystkie własności wspólne [101]).

Co więcej — pytanie o prawdziwości takiej implikacji wydaje się Mostowskiemu problemem pozornym, gdyż pojęcie własności nie jest dane z góry. W zależności od sensu nadanego temu pojęciu można implikację taką odrzucić — można ją też przyjąć, ale wejdzie ona wtedy do systemu nie jako te-

---

97) 98) tamże 96.

99) tamże 97.

100) A. Mostowski, Logika matematyczna 83.

101) A. Mostowski, Logika matematyczna 112.

za dająca się dowieść lecz jako nowy aksjomat. Logika matematyczna ma służyć potrzebom matematyki, w tej zaś własności zbiorów zależą tylko od ich elementów — dlatego dla niej Mostowski przyjmują taką implikację, nazywając ją aksjomatem ekstensjonalności [102]).

Już więc przy tym pierwszym kroku okazuje się, że równoważność dwóch interpretacji funkcji orzecznikowych jest raczej nowym założeniem niż tezą wynikłą z charakteru samych funkcji.

Dla przedstawienia ujęcia logiki tradycyjnej w teorii orzeczników ważne jest jeszcze ujęcie szczególnie jednego z orzeczników złożonych, mianowicie subsumpcji: „ „CPSx" czytamy „x, które jest P, jest S" " — a zostaje ta subsumcja zdefiniowana: " "CPSx" = CPxSx" — czyli "x które jest P, jest S to tyle, co „jeżeli x jest P, to x jest X". [103]). Prawą stronę definicji (będącą wyrażeniem teorii zmiennej pozornej) można przekształcić na ANPxSx lub jeszcze na NKPxNSx.

Jak w tej teorii wygląda ujęcie logiki tradycyjnej? Na samym czele stawia się znowu zastrzeżenie, że ani zakres uniwersalny ani zerowy nie może być terminem w zdaniu, wyrażając to w aksjómacie:

(S)(Ex)Sx

„tzn. dla każdego orzecznika S istnieje takie x, że x jest S" [104]).

Aksjomat ten pełni według Czeżowskiego rolę istotną, gdyż bez niego „zdania ogólne staną się dwuznaczne, a niektóre twierdzenia logiki klasycznej — fałszywe" [105]).

Odpowiedniki symboliczne zdań KL zostają wprowadzone w 3 postaciach: implikacyjnej, subsumcyjnej i egzystencjalnej.

---

[102]) tamże 113.
[103]) T. Czeżowski, Logika 98.
[104]) T. Czeżowski, Logika 106.
[105]) tamże 107.

W postaci implikacyjnej odpowiedniości wyglądają:

SaP : (x)CSxPx
SeP : (x)CSxNPx
SiP : N(x)CSxNPx
SoP : N(x)CSxPx

Z tej postaci na podstawie definicji subsumcji można przejść do postaci subsumcyjnej:

SaP : (x)**C**SPx
SeP : (x)**CSN**Px
SiP : N(x)**CSN**Px
SoP : N(x)**C**SPx

Wreszcie można od interpretacji implikacyjnej przejść do jeszcze innej formy. Implikacja „dla każdego x, jeżeli x jest S, to x jest P“ jest równoważna wyrażeniu „nie istnieje x, które jest S i nie-P“ — stąd zaś przez odpowiednie przekształcenia otrzymać można równoważność wyrażń (x) **C**SPx i N(Ex) **K**SNPx. Na podstawie tego można definicje ostatnie zastąpić definicjami zwanymi przez Czeżowskiego egzystencjalnymi:

SaP : N(Ex)**K**SNPx
SeP : N(Ex)**K**SPx
SiP : (Ex)**K**SPx
SoP : (Ex)**K**SNPx [106]

Nadto Czeżowski zajmuje się znaczeniem słabym i mocnym zdań ogólnych. W logice klasycznej zdania ogólne występują wg niego tylko jako mocne, tj. zakładające eksjomat wykluczający terminy zerowe [107]. To wykluczenie można umie-

---

[106]) T. Czeżowski, Logika 107—109. Znaczenie funktorów tłustym drukiem tłumaczą następujące definicje (Logika 98):

NPx = NPx
KPSx = KPxSx

[107]) O znaczeniu słabym i mocnym mówi Kotarbiński (Elementy 223), ale sądzi, że „w logice tradycyjnej znaczenie zdania ogólnego nie było dostatecznie ustalone. Używało się go raz w słabym, kiedy indziej w mocnym znaczeniu“ (tamże 223).

ścić w samych odpowiednikach, które wtedy przybiorą postać (podaję trzy możliwe u Czeżowskiego odpowiedniki zdania SaP):

SaP : K(Ex)Sx(x)CSxPx
SaP : K(Ex)Sx(x)CSPx
SaP : K(Ex)Sx(Ex) KSNPx

Analogicznie przedstawiają się odpowiedniki zdania SeP. Zdania szczegółowe zawierają kwantyfikatory szczegółowe, które wg Czeżowskiego stwierdzają istnienie desygnatów orzecznika niezależnie od aksjomatu to zakładającego[108]). Dla zdań ogólnych w znaczeniu słabym pozostaną ważne definicje poprzednie, lecz bez uprzedniego przyjmowania aksjomatu niepustości zakresu S.

— Ujęcie zdań KL w ten sposób wydaje się na pierwszy rzut oka wnosić coś nowego i oryginalnego, wydaje się bardzo odpowiadać istocie i treści zdań KL. Zwłaszcza postać subsumpcyjna jest niezwykle sugestywna. Ujęcie np. zdania SaP w formie: „każde x, które jest S, jest P“, wydaje się wprost oznaczać to samo, co „każde S jest P“, gdyż „każde x, które jest S“ oznacza tyle, co „każde S“. Przeciwko takiemu ujęciu trudno byłoby wysuwać jakiekolwiek zastrzeżenia.

Ale to sugestywne wrażenie jest tylko pozorne — a to dlatego, że ujęcie subsumcyjne nie ma treści określonej przez jego odczytanie słowne, lecz przez definicję logistyczną. Ta zaś definicja sprowadza treść subsumcji bez reszty na teren teorii zmiennej pozornej, której niewystarczalność już omówiłem.

Pozostałe dwie interpretacje są równoważne pierwszej, a nawet więcej, są równoznaczne z nią w sensie równoznaczności definicyjnej.

Teoria orzeczników utożsamia się więc w treści swych wypowiedzi z teorią zmiennej pozornej i teorią klas, a zatem nie może wnieść nic nowego do zagadnienia interpretacji logiki tradycyjnej.

[108]) T. Czeżowski, o.c. 109.

§ 5.

Teoria stosunków

Ujęcie zdań KL jako stosunków jest nie tylko możliwe, ale konnaturalne ich budowie i narzuca się z wielką siłą.

Stosunek jest pojmowany przez logistykę wg Czeżowskiego jako funkcja zdaniowa dwóch (i analogicznie więcej) argumentów w oderwaniu od jej poszczególnych wartości [109]. Mostowski wyraża się ściślej, ustalając nie tożsamość lecz związek między pojęciem funkcji zdaniowej a pojęciem zbioru i relacji: „Funkcje zdaniowe służą mianowicie do zapisywania własności jednego lub wielu przedmiotów, w związku z czym możemy powiedzieć, że każda funkcja zdaniowa o n zmiennych wolnych wyznacza pewną relację n-członową (lub zbiór, o ile n = 1)“ [110].

Ponieważ zaś na terenie logiki symbolicznej „pojęcie zbioru utożsamiamy z pojęciem własności w tym sensie, że wyrażenie: „przedmiot x ma własność X“ uważamy za równoznaczne z wyrażeniem : „przedmiot x należy do zbioru X“ “[111], to ujęcia zdań KL w terminach teorii klas, orzeczników i relacji są na gruncie logistyki równoważne, czy nawet wg. Mostowskiego równoznaczne, gdyż wyrażenia działów następnych otrzymują to jedynie znaczenie, jakie jest im przypisane przez definicje wyrażone w terminach działów logicznie wcześniejszych. Ta konkluzja prowadzi mnie do potwórzenia spostrzeżenia, że o ile u podstaw ujęcia zdań KL w logistyce tkwi zasadniczy brak, to brak ten nie ustąpi w żadnym następnym jej dziale.

Mimo to występują w ujęciu stosunkowym pewne elementy, które uzasadniają bliższe zajęcie się nim.

---

[109] T. Czeżowski, Logika 131.

[110] A. Mostowski, Logika matematyczna 89—90.

[111] tamże 93.

Zdania KL są niewątpliwie funkcjami o dwóch argumentach. W ujęciu na terenie teorii zmiennej pozornej jeden z argumentów jest związany przez kwantyfikator, tak iż funkcje stają się funkcjami jednej zmiennej wolnej, a zatem wyznaczają nie stosunki ale zbiory. Są jednak możliwe inne ujęcia, w których określenia zawarte w słowach kwantyfikacyjnych zdań KL są przeniesione do samej treści relacji.

Przykład najogólniejszego ujęcia tego typu zachodzi u Łukasiewicza [112]). Autor ten przyjmuje dwa pierwotne funktory zdaniotwórcze o dwóch argumentach nazwowych: „U" i „I", tworząc przy ich pomocy zdania odpowiadające zdaniom KL ogólno twierdzącemu i szczegółowo twierdzącemu Funktory te przedstawiają zdania KL w postaci stosunkowej. Stosunki zawarte w wyrażeniach „Uab" i „Iab" otrzymują swe znaczenie nie przez definicje w terminach wcześniejszych działów logiki, ale przez definicje słowne: „wyrażenie postaci „Uab" czytamy „każde a jest b" " [113]). i „wyrażenie postaci „Iab" czytamy „pewne a jest b" [114]). Uzupełnieniem tych określeń jest zastrzeżenie, że „możliwymi wartościami argumentów naszych zmiennych nazwowych nie mogą być nazwy puste" [115]).

Przy pomocy funktorów „U" i „I" definiuje Łukasiewicz funktory „O" i „Y", które oznaczają stosunki równoznaczne zdaniom Sep i Sop:

Oab = NUab
Yab = NIab [116])

Na gruncie tych funktorów, w oparciu o 4 aksjomaty i teorię zdań wyprowadza Łukasiewicz aksjomatycznie tezy sylogistyki. To nie wchodzi w zakres mojego badania, tak że ograniczę się do zagadnienia, o ile takie ujęcie wnosi coś nowego do problemu symbolicznej interpretacji logiki tradycyj-

---

[112]) J. Łukasiewicz, Elementy logiki matematycznej 170—190.
[113]) [114]) [115]) tamże 171.
[116]) tamże 174.

nej czy to jako rozwiązanie, czy jako okazja do sprecyzowania nowych warunków interpretacji.

Mam jednak wrażenie, że takiego nowego wkładu tu nie widać. Po pierwsze Łukasiewicz właściwie rezygnuje całkowicie z interpretacji symbolicznej zdań KL. Jego funktory są tylko skrótami zdań nie różniącymi się znaczeniowo od skrótów „SaP" itd. Zakładają one całe znaczenie zawarte w zdaniach słownych, nie analizując tego znaczenia. Nie chcę tu negować osiągnięcia Łukasiewicza w zakresie uporządkowania tez sylogistyki w system aksjomatyczny, lecz w odniesieniu do zagadnień niniejszej pracy muszę zaznaczyć, że wyniki Łukasiewicza sprowadzają się do takiego uporządkowania, nie dodając nic do ujęcia zdań KL.

Po drugie: Łukasiewicz nie uzasadnia bliżej zastrzeżonego ograniczenia wartości zmiennych nazwowych do nazw niepustych, zaznaczając krótko, że „gdybyśmy nie pamiętali o tym ograniczeniu, to musielibyśmy uznać za fałszywe pewne tezy teorii, którą wyłożymy" [117]). Ta jednak uwaga nie jest bynajmniej usprawiedliwiona przez dalszy bieg wywodów. Tezy sylogistyki wynikają z przyjętych aksjomatów bez względu na wszelkie ograniczenia wartości zmiennych.

Zastrzeżeniu Łukasiewicza musimy więc przypisać inne znaczenie. Najwidoczniej chodzi tu o jego sąd, iż przy pustych wartościach zmiennych nazwowych nie można by przyjąć jego czwartego aksjomatu sylogistyki o postaci:

CKUmbImaIab [118])

Z aksjomatu tego wynika twierdzenie o subalternacji:

CUabIab [119])

a twierdzenie to na gruncie klas pustych jest przez wielu uwa-

---

117) J. Łukasiewicz, Elementy logiki matematycznej 171.

118) tamże 172.

119) zob. tamże 181 (S 13).

żane za błędne, jakkolwiek można wykazać, że jest ono oparte na teorii klas [120]).

Skoro zatem teza subalternacji jest niezależna od pustości czy niepustości klas, to ujęcie Łukasiewicza potwierdza sąd, że logika tradycyjna tworzy niesprzeczną teorię logiczną, przez wykazanie, że da się zbudować system aksjomatyczny obejmujący wszystkie jej tezy. Niemniej przeto nie otrzymujemy odpowiedzi na pytanie, jak wyrazić treść zdań KL w symbolach logistycznych na terenie teorii stosunków.

Nawet więcej: ujęcie Łukasiewicza jest niezależne w swej istocie od teorii stosunków. Jakkolwiek by się ujęło i wyraziło zdania KL, nawet jeśliby się pozostawiło je w ich formie słownej, to przy przyjęciu aksjomatów i reguł wnioskowania Łukasiewicza oraz teorii zdań, da się w całej pełni utrzymać wszystkie tezy i sposób dojścia do nich, stosowany przez Łukasiewicza. Fakt, że to ujęcie jest tak szerokie, jest o tyle dogodny, że w razie wprowadzenia nowej interpretacji można się czuć zwolnionym od obowiązku wyprowadzania wszystkich tez, jeżeli tylko będzie się miało możność uzasadnienia na gruncie danej interpretacji tez przyjętych przez Łukasiewicza za aksjomaty.

Odpowiedź na pytanie, jak wyrazić treść zdań KL w symbolach logistycznych na terenie teorii stosunków, stara się dać ujęcie Mostowskiego [121]). Buduje on relację ogólniejszą od relacji zachodzących w zdaniach KL, relację „a", obejmującą sylogistykę jako przypadek szczególny.

Relacja „a" jest zdefiniowana jako relacja spełniająca wzory:

$$a \,;\, \subset a$$
$$a \,.\, \breve{a} = 1'$$ [122])

[120]) por. wyżej...

[121]) A. Mostowski, Logika matematyczna 124—129.

[122]) A. Mostowski, Logika matematyczna 124.

Za pomocą tej relacji określone są relacje i, e, o:

$i = a; \breve{a} \quad e = i' \quad o = a'$ [123]).

Zapoznajmy się bliżej ze znaczeniem relacji „a". Warunek pierwszy oznacza [124]):

(x, y, z)CKaxyayzaxz [125])

co znaczy po prostu tyle, że stosunek ten jest przechodni.

Warunek drugi oznacza [126]):

EKaxyayxRxy [127])

co wyraża, że stosunek a zachodzi równocześnie z przeciwstosunkiem tylko między przedmiotem a nim samym.

— Stosunek „a" tak pojęty nie ma bezpośredniego odniesienia do zdań KL, otrzymuje je dopiero przez pewną interpretację, która nie jest jedyną, ale jedną z możliwych interpretacji tego stosunku [128]).

Interpretację relacji „a" odnoszącą się do logiki tradycyjnej wprowadza Mostowski następująco: „Niech zbiór pełny K składa się ze wszystkich niepustych podzbiorów dowolnie danego zbioru X_0 i niech a będzie relacją inkluzji między zbiorami należącymi do 1" [129]).

Ta relacja inkluzji spełnia oba warunki, jest zatem przykładem relacji „a". W tej interpretacji „i" ma znaczenie: wzór XiY zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją przedmioty należące zarówno do zbioru X jak i do zbioru Y. Relacje „e" i „o" ujęte są jako zaprzeczenia relacji „a" oraz „i".

---

[123]) tamże 124.

[124]) na podstawie wzoru: $R; S \subset T \equiv \Pi_{xyz}[xRy \,.\, ySz \rightarrow xTz]$ zob. Mostowski c. c. 123 wzór 13.

[125]) w oryginalnej symbolice: $\Pi_{xyz}(xaz \,.\, yaz \rightarrow xaz)$

[126]) na podstawie wzorów: $x\breve{R}y \equiv yRx$ o. c. 119 i $x1'y \equiv x = y$ o. c. 109

[127]) „R" przyjąłem w tym wzorze jako symbol stosunku równości.

[128]) A. Mostowski podaje (o. c. 125) dla przykładu inną interpretację stosunku „a": (x, y) (x jest dzielnikiem y).

[129]) A. Mostowski, o. c. 125.

Ta interpretacja sprowadza ujęcie logiki tradycyjnej do teorii klas — bo pojmuje zdania KL jako inkluzje między zbiorami niepustymi, schodzi więc przez to samo z terenu właściwej teorii stosunków. Mostowski wyraźnie sądzi, że logika tradycyjna zajmuje się wyrażeniami typu: „każdy element zbioru X jest elementem zbioru Y" [130]) itp., należącymi bezpośrednio do dziedziny teorii klas.

Ujęcie stosunku „a" w sylogistyce jako stosunku inkluzji między zbiorami niepustymi jest zrozumiałe na tle treściowego aspektu klas: gdy bowiem pojmujemy klasy jako zbiory elementów o pewnej cesze, trudno mówić o inkluzji przy klasach pustych. Natomiast trudno pojąć, dlaczego zastrzeżenie to wprowadza Mostowski przy logistycznym ujęciu inkluzji, gdzie oznacza ona:

$$X \subset Y \equiv \Pi x\,(x \varepsilon X \rightarrow x \varepsilon Y)$$ [131])

co jest w logistyce prawdziwe i sensowne również przy zbiorach pustych.

— Okazuje się więc w sumie, że ujęcie w teorii stosunków nie wnosi żadnego nowego elementu pozytywnego, co jest zrozumiałe: albo bowiem zatrzymujemy się na ogólnym przyjęciu stosunków danych w słownym wyrażeniu zdań KL. albo, gdy próbujemy określać te stosunki bliżej, to przechodzimy w określeniach na teren innych teorii logistycznych.

— Spróbuję w kilku słowach ująć łączne wyniki krytyczne tego rozdziału (o wynikach pozytywnych będzie mowa w paragrafie następnym).

Obszerna, jakkolwiek przedstawiona tylko w najogólniejszych zarysach, krytyka zasadniczych typów ujęcia zdań KL na terenie logistyki doprowadziła do wyniku, że żaden dział logistyki nie daje dostatecznych podstaw do adekwatnej interpretacji. Starałem się w wynikach podkreślić fakt, że analizy wykazujące braki odnoszą się nie tylko do ujęć poszczególnych autorów, ale do całego danego typu ujęcia.

---

[130]) A. Mostowski, Logika matematyczna 128.

[131]) tamże 93.

Zresztą pozorna rozmaitość typów znika właściwie, skoro się zważy, że terminy dalszych logicznych działów są definiowane przez stosunki zachodzące między terminami działów wcześniejszych. Najwcześniejszą częścią logistyki jest teoria zdań, ale nie rozporządza ona tworami pojęciowymi, które by mogły w jakikolwiek sposób odtworzyć treść zdań KL. W pewnym stopniu może ją odtworzyć teoria zmiennej pozornej, a do niej też sprowadzają się wszelkie interpretacje logiki tradycyjnej w dalszych teoriach logistycznych.

Interpretacja na terenie tej teorii ma główny brak wynikający stąd, że kwantyfikatory występujące w tej teorii n.e są w stanie oddać stosunków zachodzących w zdaniach KL. Ażeby te związki między zmiennymi w jakiś przybliżony sposób opisać, musi teoria zmiennej pozornej uciekać się do interpretacji zdań KL za pomocą implikacji formalnej, co rozszerza zakres sensowności tychże zdań.

Krytyczne wyniki analizy dają pewne wskazówki odnoszące się od szukania drogi wyjścia. Skoro główny brak ujęcia na terenie teorii zmiennej pozornej (do którego sprowadzają się pozostałe ujęcia), leżą w nieodpowiedniości kwantyfikatorów, to narzuca się myśl, by temu brakowi zaradzić wprost, przez stworzenie kwantyfikacji odpowiedniejszej. Nie sądzę, by przy pomocy metody logistycznej było to niemożliwe — i tą właśnie drogą poszedłem w szukaniu pozytwnego wyjścia.

§ 6.

Sumaryczne ujęcie warunków interpre-cji zdań KL

Przechodząc poszczególne działy logiki starałem się wydobyć przy analizie krytycznej ujęć logiki tradycyjnej ogólne warunki adekwatnej jej interpretacji symbolicznej. Na końcu rozdziału poświęconego tej analizie chcę uporządkować uzyskane wyniki i zestawić warunki w pewne grupy.

Przyjmuję trzy zasadnicze grupy.

I grupa zawiera tylko jedną, ale podstawową zasadę (jak to określiłem na str. 156—157): zasadę odpowiedniości zakresu sensowności i zakresu ważności.

W zastosowaniu szczegółowym do zdań KL ta ogólna zasada przybiera postać warunku odpowiedniości kwantyfikacji.' W wyniku analiz ta zasada wysuwa się na czoło i to uzasadnia także obraną przeze mnie drogę w następnym rozdziale, mianowicie drogę szukania interpretacji adekwatnej za pomocą przystosowania kwantyfikacji do związków wyrażanych przez zdania KL w ich formie słownej.

II grupa obejmuje warunki odnoszące się do wewnętrznej struktury zdań KL. Są one następujące:

1) Odpowiedniki symboliczne winny uwzględnić prosty charakter zdań KL;
2) Winny uwzględnić formę pozytywną lub negatywną tych zdań;
3) Winny uwzględnić ich charakter kwantytatywny;
4) Winny uwzględnić odniesienie zdań KL do zakresów (względnie treści) S i P, a nie do ich negacji;
5) Winny uwzględnić odniesienie zdań KL do stosunków treściowych (względnie zakresowych), a nie do istnie-bezpośrednio do klas.
6) Winny uwzględnić odniesienie do elementów, a nie bezpośrednio do klas.

III grupa zajmuje się stosunkami strukturalnymi zachodzącymi między zdaniami KL:

1) Za podstawowe zostają uznane zdania ogólne, od nich więc musi wyjść interpretacja symboliczna;
2) Zdania szczegółowe uzyskane są z ogólnych drogą ograniczenia (niekoniecznego) ich zakresu;
3) Ten związek genetyczny zdań szczegółowych z ogólnymi musi być wyrażony w odpowiednikach symbolicznych;
4) Podstawowymi stosunkami w KL są: stosunek sprzeczności i stosunek podporządkowania.

Rozdział V

PRÓBA INTERPRETACJI SYMBOLICZNEJ ZDAŃ KWADRATU LOGICZNEGO

Moja próba stworzenia możliwie adekwatnej interpretacji zdań KL opiera się zasadniczo na teorii zmiennej pozornej, nie pozostaje jednak w jej ramach, ale chce usunąć w pewien sposób braki ujęcia w tej teorii, jakie zostały wykazane przez analizę. Brakiem zasadniczym, jak to omówiłem na str. 156—157, jest samo znaczenie kwantyfikatorów logistycznych, które prowadzi do konieczności opisywania treści zdań KL przy pomocy implikacji formalnych. Te bowiem kwantyfikatory nie są w stanie same przez się oddać istotnych cech kwantyfikacji występującej w zdaniach KL.

Czy jest możliwe znalezienie kwantyfikacji oddającej stosunki występujące w tych zdaniach? Trzeba w odpowiedzi wyjść od stwierdzenia, że dwa stosowane w logistyce rodzaje kwantyfikatorów nie wyczerpują możliwości wyrażenia zakresu ważności zdania. Są to jedynie pewne z wielu możliwych określeń kwantyfikacyjnych. Określenia takie można uporządkować w pewien szereg według zakresu ważności, szereg, w którym można wprowadzić dowolnie wiele ogniw i odmian. Tabela, jaką przedstawiam, jest tylko pewnym wyborem możliwych określeń kwantyfikacyjnych.

Zdanie może odnosić się do:

1a) wszystkich bytów jakiegokolwiek typu,
1b) wszystkich bytów pewnego typu (czy typów),
2a) pewnych bytów jakiegokolwiek typu, niekoniecznie wszystkich, choć może być wszystkich,
2b) pewnych bytów pewnego typu, niekoniecznie wszystkich, choć może być wszystkich,
3a) pewnych bytów jakiegokolwiek typu, ale nie wszystkich,
3b) pewnych bytów pewnego typu, ale nie wszystkich,

4a) określonej części bytów jakiegokolwiek typu,
4b) określonej części bytów pewnego typu,
5) jednego lub kilku wyszczególnionych bytów,
6a) żadnego bytu jakiegokolwiek typu,
7a) żadnego bytu pewnego typu.

Kwantyfikacje w tym szeregu idą równolegle do zdań odnoszących się do jakiegokolwiek typu i zdań mówiących o bytach pewnego typu (z wyjątkiem wypadku 5, gdzie równoległość znika, bo skoro przedmioty są określone szczegółowo, jednostkowo, to staje się nieważną ich przynależność do typu). Kwantyfikatory logistyki obejmują wypadki 1a) i2a). Zaprzeczenie kwantyfikatora szczegółowego daje wypadek 6a), zaprzeczenie kwantyfikatora ogólnego daje wypadek 2a) w formie negatywnej. Nadto teoria opisu daje możność uwzględnienia wypadku 5).

Kwantyfikatory logistyki ustalają więc zakres ważności funkcji na wszystkie lub niektóre byty jakiegolwiek typu. Trzeba zauważyć, że w tezach wszystkich nauk poza matematycznymi (logika, matematyka, fizyka matematyczna...) mamy do czynienia niemal wyłącznie ze zdaniami czy funkcjami odnoszącymi się do pewnego typu bytów. Klasa wszystkich bytów, czyli zakres uniwersalny, ma dla nauk realnych bardzo małe znaczenie, gdyż nie można o niej orzec nic z wyjątkiem najogólniejszych transcendentalnych orzeczeń.

Jak więc wytłumaczyć fakt używania w logice i matematyce funkcji o kwantyfikacji ogólnej, które nie tylko występują, ale według wielu logików istotną dla nich jest możność nieograniczonego podstawiania?

Wyjaśnienie tego wymaga dwóch zasad:

1) kwantyfikator ogólny zachodzi w tezach tylko przy stosunkach złożonych (szczególnie przy funktorach implikacji, alternatywy i zaprzeczeniu koniunkcji); 2) znaczenie kwantyfikacji ogólnej zostaje tak określone, by objęła ona również wypadki, przy których w wyniku podstawień otrzymamy zdania składowe nieważne.

Dlatego też kwantyfikacja ogólna (i oczywiście związana z nią ściśle kwantyfikacja szczegółowa) może być wprowadzana jedynie przy ograniczeniu się do badania związku między zdaniami ze względu na ich wartość logiczną, a nie na budowę wewnętrzną.

Tak uwarunkowana kwantyfikacja logistyczna nie pozwala na posługiwanie się nią przy interpretacji symbolicznej myślenia potocznego — a taki właśnie wypadek zachodzi przy interpretacji logiki tradycyjnej. Logika ta operuje zdaniami orzekającymi coś o wszystkich względnie niektórych desygnatach pewnego typu. Innymi słowy zdania jej należą najczęściej do wypadków 1b) i 2b), choć nie wykluczają i innych postaci, z których często występuje postać 5). W każdym razie zdania KL obejmują wyłącznie postaci oznaczone przez b). Kwantyfikacja obejmująca tylko postaci a) jest zasadniczo niezdolna do wyrażania treści zdań występujących w logice tradycyjnej.

— Dla dojścia do możliwie adekwatnej interpretacji zdań KL obrałem drogę stworzenia kwantyfikatora, który by wyraził stosunki zachodzące w wypadkach 1b) i 2b) tabeli ze str. 54. Kwantyfikator taki w dwóch swoich formach oznaczałby pojęcia: „dla wszystkich desygnatów oznaczonego typu" i „dla niektórych desygnatów oznaczonego typu", przy czym sens słowa „niektóre" pozostałby taki sam, jak przy kwantyfikatorze logistycznym, tj. oznaczałby „przynajmniej niektóre".

Jako symbole dla takich kwantyfikatorów przyjąłem w używanej tu symbolice znaki:

(x.fx)
i (Ex.fx)

co oznacza słownie: „dla wszystkich x, dla których zachodzi fx" i „dla niektórych x, dla których zachodzi fx". Oczywiście są możliwe także inne przedstawienia symboliczne.

Jako nazwę dla tego rodzaju funktorów proponuję: „k w a n t y f i k a t o r y o g r a n i c z a j ą c e", bo ograniczają zakres sensowności i ważności (a nie samej tylko ważności) do pewnego typu. Można by także przyjąć nazwę „kwantyfikatorów klasowych", bo zakres sensowności i ważności jest ograniczony do wszystkich lub niektórych desygnatów pewnej klasy — ale biorąc pod uwagę, że ta nazwa zaciera odrębność nowych kwantyfikatorów wolę tutaj stosować nazwę pierwszą.

Wprowadzając takie kwantyfikatory trzeba od razu zaznaczyć, że są one utworzone jako pojęcia pierwotne, nie dające się określić przy pomocy innych symboli logistycznych. Ich związki z kwantyfikatorami logistycznymi musiałyby być ustalone przez specjalny dział logiczny. Jasne jest, że takie związki istnieją, np. jest oczywiste, że zachodzić muszą implikacje C(x)gx(x.fx)gx lub C(Ex.fx)gx(Ex)gx, ale te i inne tego rodzaju związki wykraczają poza teorię zmiennej pozornej.

Zastrzeżenie to jest potrzebne z tego względu, że na terenie logistyki występują też kwantyfikatory podobne do wprowadzonych tutaj, ale o znaczeniu pozostającym całkowicie w ramach logistyki. Mianowicie Mostowski [132]) wprowadza „tzw. kwantyfikator o ograniczonym zakresie". Uważa on, że „jest przyjęte pisać":

$$\Pi_{\varphi(x)}\,\psi(x) \quad \text{zamiast} \quad \Pi_x\,[\varphi(x) \rightarrow \psi(x)]$$
$$\Sigma_{\varphi(x)}\,\psi(x) \quad \text{zamiast} \quad \Sigma_x\,[\varphi(x) \rightarrow \psi(x)]$$

W tym wypadku nowe symbole zostały wprowadzone przez określenia definicyjne i zastępują jedynie wyrażenia zawierające kwantyfikatory logistyczne (nawiasem mówiąc, wyrażenia składające się właśnie z kwantyfikatorów logistycznych i implikacji formalnych). Nie wnoszą więc one nic nowego do zwykłego ujęcia na terenie teorii zmiennej pozornej i są jedynie skrótem technicznym. Ich pozornie prosty wygląd mógłby prowadzić do wniosku, że nadają się do interpretacji zdań KL (podobnie jak subsumpcja u Czeżowskiego), ale zapoznanie się z ich definicjami rozwiewa złudzenia.

Natomiast kwantyfikatory ograniczające jako symbole o nowym znaczeniu, niesprowadzalnym do znaczeń kwantyfi-

---

[132]) A. Mostowski, Logika matematyczna 49.

katorów logistycznych, prowadzą do możliwości interpretacji zdań KL w sposób bardzo prosty i, o ile zdołałem stwierdzić, adekwatny.

Kwantyfikatory te oznaczają właśnie tego rodzaju kwantyfikacje, jakie występują w zdaniach KL. Treść wewnętrzną tych zdań, tj. przypisywanie pewnej cechy lub zaprzeczenie jej ujmujemy symbolicznie w postaci funkcyjnej, co jest uogólnieniem nie pozbawionym znaczenia. O ile bowiem pojawiają się zastrzeżenia przeciw pożyteczności formy „A jest B", to ujęcie funkcyjne obejmuje wszystkie możliwe formy zdań. Nadto takie ujęcie odpowiada bardziej ujęciu Arystotelesa, który chciał stworzyć formę obejmującą wszystkie zdania — i używany przez niego wyraz „ὑπάρχει" ma szersze znaczenie niż forma „A jest B".

W takim ujęciu odpowiedniki symboliczne zdań KL będą wyglądały:

SaP : (x.fx)gx
SeP : (x.fx)Ngx
SiP : (Ex.fx)gx
SoP : (Ex.fx)Ngx

Należy zbadać te odpowiedniki, o ile stosują się do uzyskanych w tej pracy warunków adekwatnej interpretacji.

Najpierw samo odczytanie słowne symbolicznych wyrażeń. (x.fx)gx — oznacza: dla każdego x dla którego zachodzi fx, zachodzi gx — czyli: każde x o cesze f posiada cechę g. Gdy weźmiemy pod uwagę, że „x o cesze f" możemy przedstawić jako S, a posiadanie cechy g jako należenie do klasy P, to symbol przedstawi się wprost w postaci normalnej zdania SaP, jako „każde S jest P". Analogicznie rzecz się ma z pozostałymi trzema wyrażeniami symbolicznymi.

Nie można jednak poprzestać na analizie wzorów poprzez ich znaczenie słowne. Konieczne jest zbadanie wprost stosunku tych odpowiedników do warunków interpretacji.

Za podstawowy warunek został uznany postulat odpowiedniości zakresu sensowności i ważności. Zdania KL orzekają tylko o desygnatach pewnej klasy, nie zaś o dowolnych desygnatach. Przyjęte odpowiedniki spełniają ten postulat dzięki kwantyfikatorom ograniczającym. Te kwantyfikatory „ograniczają“ orzekanie funkcji do jednej tylko klasy, określonej przez spełnianie funkcji. Nie zachodzi żadna rozbieżność między zakresami zdań KL a zakresami przyjętych odpowiedników, gdyż kwantyfikatory ograniczające mają właśnie takie znaczenie, jakie posiadają słowa „wszystkie S“ i „niektóre S“ w języku potocznym.

W grupie II — spełniony jest warunek 1, znów dzięki kwantyfikatorom ograniczającym, które umożliwiły wyeliminowanie implikacji z odpowiedników symbolicznych. Zdania KL stwierdzają prosty fakt o desygnatach pewnej grupy — to jest uwydatnione w strukturze i znaczeniu wyrażeń symbolicznych.

2. warunek jest również spełniony: charakterowi pozytywnemu lub negatywnemu zdań KL odpowiada ten sam charakter odpowiedników. Nie zachodzi zmiana formy zdań twierdzących na przeczącą.

Dalej — widoczne jest zachodzenie warunku 3. Kwantyfikacja zachodzi już w ujęciu na terenie teorii zmiennej pozornej, tam jednak kwantyfikacja nie odpowiada rodzajowi kwantyfikacji zachodzącej w zdaniach KL, podczas gdy w przyjętych odpowiednikach kwantyfikacja jest specjalnie dostosowana do tych właśnie zdań.

Zachodzi również warunek 4. Przy zdaniach pozytywnych jest widoczne od razu odniesienie do zakresu ważności fx i gx. Przy negatywnych warunek ten jest także spełniony, gdyż występujące negacje są negacjami przyzdaniowymi, oznaczającymi zaprzeczenie funkcji, zaprzecza się jednak właśnie daną funkcję, o jaką chodzi w zdaniu KL — nie ma więc rozbieżności znaczeniowej.

Warunek 5 mówi o odniesieniu do stosunków treściowych względnie zakresowych, a nie do istnienia czy nieistnienia klas. Przyjęte odpowiedniki nie mają postąci egzystencjalnej, przy czym ze względu na analogię kwantyfikatora szczegółowego logistycznego i ograniczającego wystarczy powołać się na poprzednie rozważania o charakterze kwantyfikatora szczegółowego (zob. wyżej 153—155), by dojrzeć, że kwantyfikator szczegółowy ograniczający, podobnie jak logistyczny, nie ma charakteru egzystencjalnego, przynajmniej nie ma w innym sensie niż kwantyfikator ogólny.

Natomiast odpowiedniki orzekają o stosunkach treściowych (czy zakresowych) i to w specjalnej formie, nie zdania złożonego lecz prostego, tak jak to występuje w samych zdaniach KL.

W II grupie jest szczególnie ważny ostatni, 6 warunek, orzekający, że zdania KL odnoszą się nie wprost do klasy, lecz do elementu. Chociaż treść zdań KL daje możność orzekania o klasach, to jednak będzie to dopiero dalsza konsekwencja zdań KL, przy czym w przejściu do niej mogą zaznaczyć się nowe problemy znaczeniowe. Przyjęte odpowiedniki symboliczne oddają i tę cechę zdań KL. Odnoszą się bezpośrednio do elementów, ale dają możność pewnego pośredniego przejścia do klas przedmiotów spełniających dane funkcje.

Następują postulaty grupy III.

Interpretacja tu wprowadzona spełnia warunek 1 tej grupy: wychodzi od zdań ogólnych. Spełniony jest zarazem warunek 2: uzyskanie zdań szczegółowych przez ograniczenie zdań ogólnych. To przejście jest uwidocznione w strukturze wyrażeń przez to, że odpowiedniki zdań ogólnych różnią się od odpowiedników zdań szczegółowych tylko zakresem kwantyfikacji — a właśnie taki związek strukturalny jest postulowany przez warunek 3.

Warunek 4 mówi o podstawowych stosunkach w KL. Dla zbadania ich zachodzenia, w odpowiednikach symbolicznych należy najpierw zbudować ogólną teorię kwantyfikatora ograniczającego, która będzie zaszkicowana w dalszym ciągu. Teoria taka okaże się analogiczną do teorii zmiennej pozornej i uprzedząjąc jej przedstawienie można powiedzieć, że analogicznie do tez teorii zmiennej pozornej:

EN(x)fx(Ex)Nfx
i EN(Ex)fx(x)Nfx

istnieć będą w teorii kwantyfikatora ograniczającego tezy:

EN(x.fx)gx(Ex.fx)Ngx
oraz EN(Ex.fx)gx(x.fx)Ngx

które wyrażają właśnie sprzeczność między przyjętymi odpowiednikami zdania SaP i SoP, oraz SeP i SiP.

Zachodzenie stosunku podporządkowania jest widoczne z tez analogicznych do:

C(x)fx(Ex)fx

mianowicie:

C(x.fx)gx(Ex.fx)gx

i uzyskanej drogą podstawienia za gx — Ngx (lub z równym wynikiem drogą kontrapozycji pierwszej tezy i zastosowania praw sprzeczności) tezy:

C(x.fx)Ngx(Ex.fx)Ngx

— Tak więc okazuje się, że wszystkie warunki adekwatnej interpretacji zdań KL, jakie zdołałem wydobyć w analizie, są spełniane przez przyjęte odpowiedniki, posługujące się kwantyfikatorami ograniczającymi.

— Następnym krokiem winno być stworzenie teorii kwantyfikatora ograniczającego. Nie jest to już zadaniem niniejszej pracy. Pragnę tylko jako jej zakończenie wskazać na pewien uproszczony sposób otrzymania wielu tez wyjściowych teorii kwantyfikatora ograniczającego.

Sposób ten buduje teorię kwantyfikatora ograniczającego w oparciu o teorię zmiennej pozornej, przyjmując wszystkie jej tezy za przesłanki swoich tez. Z tych tez można otrzymać tezy teorii kwantyfikatora ograniczającego przy pomocy reguły postępowania:

Mając uznaną tezę zmiennej pozornej, w której wszystkie funkcje składowe są opatrzone kwantyfikatorami, wolno uznać wyrażenie powstałe przez zastąpienie wszystkich kwantyfikatorów logistycznych odpowiednimi analogicznymi kwantyfikatorami ograniczającymi.

Dwa przykłady takiego przejścia są podane powyżej na stronie poprzedniej.

Pozostaje uzasadnić tę regułę. W teorii zmiennej pozornej tezy zaopatrzone w kwantyfikatory przy każdej funkcji składowej wyrażają związki między funkcjami ze względu na ich ważność ogólną lub częściową.

Zmieniając teraz kwantyfikatory z logistycznych na ograniczające otrzymujemy związki między funkcjami ze względu na ich ważność ogólną lub częściową w pewnym zakresie — tym samym oczywiście dla wszystkich funkcji składowych. Jest to jak gdyby wyjęcie pewnego wycinka z nieograniczonego pola zmienności desygnatów kwantyfikatorów logistycznych, ograniczenie tego pola zmienności do zakresu węższego. Jeśli dzieje się to równocześnie dla wszystkich funkcji składowych w ten sam sposób, stosunek wyrażony przez tezę nie ulegnie zmianie, dlatego wyrażenie uzyskane przez taką operację może zostać przyjęte jako teza w teorii kwantyfikatora ograniczającego.

Można to uzasadnić jeszcze inaczej. Każda teza teorii zmiennej pozornej jest jako teza funkcją ogólnie ważną, można więc na jej początku umieścić kwantyfikator ogólny:

$$(x)Tx$$

Jeżeli teza Tx jest ważna dla każdego dowolnego x, to jest ważna także dla pewnej grupy x, dla każdego x należącego do tej grupy, bo ta grupa jest tylko częścią wszystkich możliwych x. Innymi słowy, jeśli zachodzi związek wyrażony w powyżej przytoczonym wyrażeniu symbolicznym, to zachodzi także związek:

$$(x.fx)Tx$$

Skoro teza Tx zachodzi dla wszystkich x należących do pewnej grupy, to znaczy, że zmienne występujące w funkcjach składowych tezy przebiegają zakres x-ów należących do tej grupy, nie zaś zakres uniwersalny. Dlatego można wszystkie kwantyfikatory logistyczne zamienić na analogiczne ograniczające. O ile wewnątrz tezy znajdują się funkcje składowe opatrzone kwantyfikatorem szczegółowym, to zostanie on zastąpiony kwantyfikatorem ograniczającym szczegółowym — bo w możliwych zastąpieniach mają we wszystkich funkcjach składowych występować te same wartości — o ile więc zakres zmienności kwantyfikatora ogólnego zostaje ograniczony do pewnej grupy, to i zakres kwantyfikatora szczegółowego zostaje w ten sam sposób sprecyzowany, tak iż wartości funkcji nim objętej mogą być dobierane tylko z desygnatów danej grupy.

Zarysowuje się zarazem na gruncie tego uzasadnienia racja, dla której reguła może pozwalać na zamianę kwantyfikatorów tylko wtedy, gdy specyfikują one każdą funkcję składową tezy. Otóż ograniczenie dołączonego kwantyfikatora, obejmującego całą tezę, tylko w tym wypadku ograniczy równomiernie zakres zmienności argumetnów we wszystkich funkcjach składowych, o ile te argumenty były już przedtem związane kwantyfikatorami. W innym razie ograniczeniu funkcji o zmiennej związanej nie towarzyszyłoby ograniczenie funkcji o zmiennych wolnych, wobec czego zmiana kwantyfikatorów na ograniczające zmieniłaby sens, a nieraz i wartość logiczną tezy. Oto prosty przykład. Teoria zmiennej pozornej podaje tezę:

C(x)fxfy [133])

Kwantyfikatorem jest tu objęty tylko poprzednik. Zmieniając kwantyfikator na ograniczający otrzymujemy funkcję:

C(x.fx)gxgy

Funkcja ta jest błędna, gdyż następnik tej implikacji będzie prawdziwy tylko dla wartości zmiennej y leżących w zakresie

[133]) Princ. Math. 133 (teza 9.2).

(x.fx), tj. x-ów spełniających fx, podczas gdy zmienna y jest zmienną wolną, a zatem może przybrać wartości leżące poza tym zakresem.

— Teorię kwantyfikatora ograniczającego można budować też w inny sposób, nie opierając się na teorii zmiennej pozornej, lecz przyjmując własnę aksjomaty i reguły postępowania. Tutaj ograniczyłem się do wskazania drogi wychodzącej z przyjęcia teorii zmiennej pozornej jako oparcia dla teorii kwantyfikatora ograniczającego, a uczyniłem to dla uproszczenia, nie zamierzając budować teorii lecz wskazując na marginesie na jedną z możliwych dróg do niej. Być może, że wskazana tu reguła jest niewystarczająca i że należy dodać inne reguły, by móc poprawnie przejść od teorii zmiennej pozornej do teorii kwantyfikatora ograniczającego. To jednak wymaga osobnych studiów.

— Na gruncie tak czy inaczej zbudowanej teorii kwantyfikatora ograniczającego jest już rzeczą prostą zbudowanie systemu aksjomatycznego logiki tradycyjnej. Wystarczy po prostu obrać aksjomaty i z nich przy pomocy teorii zdań i teorii kwantyfikatora ograniczającego wyprowadzić pozostałe tezy logiki tradycyjnej. Postępowanie takie jest widoczne u Łukasiewicza. Dla mojego celu wystarczy przytoczyć aksjomaty Łukasiewicza w interpretacji tu wprowadzonej. Ich prawdziwość w tej interpretacji jest jeszcze bardziej oczywista niż u Łukasiewciza. Nie chcę tu zajmować się problemem, czy w ogólnej teorii kwantyfikatora ograniczającego te aksjomaty musiałyby występować też jako aksjomaty, czy jako tezy dowodzone.

Oto te aksjomaty:

1. (x.fx)fx
2. (Ex.fx)fx
3. CK(x.hx)gx(x.fx)hx(x.fx)gx
4. CK(x.hx)gx(Ex.hx)fx(Ex.fx)gx

Samo wyprowadzenie wzorów jest operacją mechaniczną. Ważną rzeczą jest tylko, że otrzymane przez takie operacje wzory są istotnie (o tyle, o ile analiza sięga dostatecznie głęboko) adekwantnymi odpowiednikami logiki tradycyjnej, tzn. posiadają możliwie dokładnie tę samą treść logiczną, co tezy logiki tradycyjnej.

— Resumuję. Analiza wykazała:

1) że żadna z dotychczasowych interpretacji symbolicznych logiki tradycyjnej nie dała adekwantnych zdań KL;
2) że na gruncie teorii logistycznych nie można uzyskać adekwantnej interpretacji, gdyż
a) logistyczne pojęcie implikacji wprowadza element znaczeniowy obcy treści zdań KL,
b) kwantyfikacja logistyczna nie wystarcza do uchwycenia stosunków zachodzących między elementami zdań KL.

Tym brakom może zaradzić interpretacja symboliczna wprowadzająca pojęcie kwantyfikatora ograniczającego, który daje możność symbolicznego ujęcia kwantyfikacji właściwej zdaniom KL, a zarazem pozwala uniknąć konieczności wprowadzania implikacji do symbolicznych odpowiedników zdań KL.

Dla kwantyfikatora ograniczającego można zbudować symboliczną teorię, na gruncie której da się wyprowadzić wszystkie tezy logiki tradycyjnej.