Iwona Iskierka, Sławomir Iskierka

Zastosowanie technik symulacji w dydaktyce metod numerycznych

Dydaktyka Informatyki 5, 127-135

2010

Iwona Iskierka, Sławomir Iskierka

ZASTOSOWANIE TECHNIK SYMULACJI W DYDAKTYCE METOD NUMERYCZNYCH

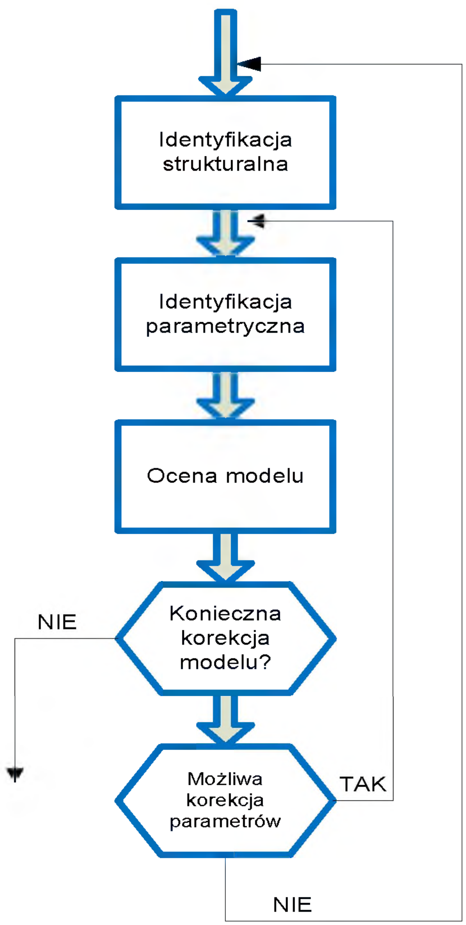
Wstęp

Komputery stanowią podstawową infrastrukturę rozwoju techniki. Najważniejszymi obszarami zastosowania komputerów w pracy inżyniera są: wspomaganie projektowania, wspomaganie czynności pomiarowo-diagnostycznych, wspomaganie decyzji oraz wspomaganie projektowania obiektów technicznych. Proces realizacji wspomnianych wyżej funkcji bardzo ściśle związany jest z wykorzystaniem metod numerycznych, tzn. metod przybliżonego rozwiązywania problemów matematycznych z dziedziny algebry, analizy, probabilistyki, geometrii, za pomocą narzędzi obliczeniowych (głównie komputerów) umożliwiających wykonywanie jedynie operacji logicznych i algebraicznych [Krupka 1997]. Istotną sprawą jest zwrócenie uwagi na to, iż podstawą obliczeń naukowo-technicznych jest modelowanie matematyczne. Modelowanie matematyczne służy do opisania projektowanego obiektu z wykorzystaniem formuł matematycznych. Wspomniany opis matematyczny może stać się podstawą symulacji zachowania tego obiektu z wykorzystaniem komputera.

1. Modelowanie matematyczne w obliczeniach naukowo-technicznych

Modelowanie matematyczne umożliwia przeniesienie wniosków wynikających z symulacji na projekt obiektu fizycznego i proces jego wytwarzania. Istotne jest to, iż do symulacji komputerowej wykorzystywane są wyłącznie modele matematyczne. Model matematyczny jest zbiorem reguł i zależności, na podstawie których można przewidzieć (w drodze obliczeń) przebieg modelowanego procesu. Modelem matematycznym badanego układu materialnego nazywa się taki układ równań, którego rozwiązania są podobne do przebiegów wielkości modelowanej [Tarnowski, 2003]. Wyróżnia się dwa rodzaje modeli matematycznych, ze względu na sposób pozyskiwania informacji do utworzenia modelu matematycznego: modele zjawiskowe i modele aproksymujące. W modelach zjawiskowych korzysta się głównie ze wzorów, które wynikają z praw fizyki i chemii. W modelach matematycznych aproksymujących korzysta się z wyników pomiarów obiektu – oryginału, a postać modelu matematycznego dobierana jest arbitralnie.

Na rysunku 1 przedstawiono schemat tworzenia modelu matematycznego [Krupka 1997].



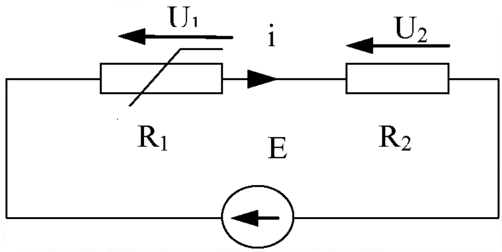
Rys. 1. Schemat tworzenia modelu matematycznego

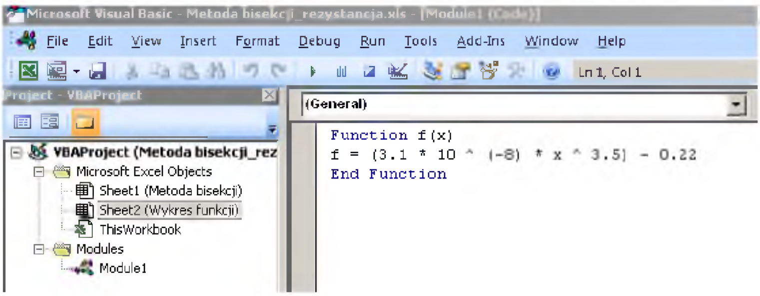
Według Tarnowskiego [2003] modelowanie jest próbą przedstawienia jakiegoś zjawiska lub właściwości, którą staramy się zrozumieć lub zbadać, w kategoriach innych zjawisk lub właściwości, które już rozumiemy. Tworzenie modelu poprzedza zdefiniowanie zmiennych, za pomocą których jest formułowany model obiektu i jego otoczenia. Dla celów symulacji komputerowej model powinien obejmować: konfigurację modelu, reguły działania, postać wymuszeń, warunki początkowe zmiennych stanu, parametry układu.

2. Techniki symulacji w dydaktyce metod numerycznych

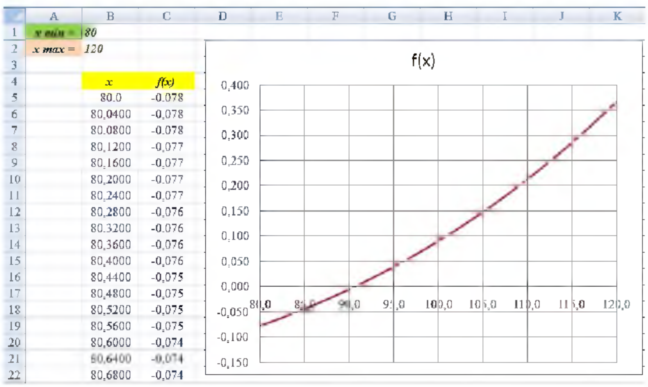
Modele matematyczne mogą być badane następującymi metodami: metody analityczne, metody wykreślne i metody symulacyjne. Stosując metody analityczne, korzysta się z obliczeń numerycznych tylko w celu uzyskania ostatecznych wyników liczbowych [Tarnowski, 2003]. Metody analityczne to możliwości poszukiwania rozwiązań jakościowych lub ilościowych, ścisłych lub przybliżonych, które dają się zapisać w postaci analitycznej. Z metodami wykreślnymi wiąże się proces poszukiwania rozwiązań przybliżonych na drodze operacji wykreślnych. Metody wykreślne mogą prowadzić do niezbyt dokładnych wyników liczbowych, lecz są stosunkowo łatwe i szybkie. Metody symulacyjne natomiast pozwalają uzyskać wyniki przybliżone poprzez przeprowadzanie jednokrotnych lub wielokrotnych eksperymentów numerycznych, które symulują doświadczalne badania obiektu rzeczywistego. Symulacja komputerowa jest procesem, której celem jest odtworzenie przebiegu badanego procesu na podstawie jego modelu matematycznego za pomocą komputera i zbadanie wpływu otoczenia (sygnały wejściowe) i wewnętrznych właściwości obiektu (parametry procesu) na charakterystyki obiektu. Przeprowadzone badania sondażowe [Mielczarek, 2003] pozwalają stwierdzić, iż w trakcie zajęć dotyczących symulacji statycznej najczęściej wykorzystywany jest arkusz kalkulacyjny Excel, natomiast symulację dyskretną prowadzi się za pomocą narzędzi dedykowanych tej metodzie, takich jak GPSS (najczęściej), AweSim, Arena, Extend. W niektórych przypadkach (rzadko) wykorzystuje się ogólne języki programowania np. Pascal, C++. W przypadku pojęć z zakresu metod numerycznych często wykorzystuje się szerokie możliwości zastosowania arkuszy kalkulacyjnych Excel do budowy różnych typów modeli symulacyjnych. W takiej sytuacji wykorzystanie arkusza kalkulacyjnego nie wymaga wprowadzenia studentów do nowego narzędzia. W budowanych modelach można wykorzystać możliwości Visual Basic for Applications. Należy jednak pamiętać o ograniczeniach dotyczących budowy modeli symulacyjnych w arkuszu: modelowanie w arkuszu bardzo złożonych struktur danych wymaga zaawansowanego VBA, powolność działania arkusza, w niektórych przypadkach wydłużenie czasu symulacji. Nie umniejsza to jednak ogromnej wartości dydaktycznej tkwiącej w arkuszach programu Excel. Poniżej przedstawiono możliwości arkusza Excel w implementacji metody bisekcji w rozwiązywaniu obwodów z elementami nieliniowymi. Metoda bisekcji jest najprostszą i jednocześnie najwolniej zbieżną metodą rozwiązywania równań nieliniowych (poszukiwania miejsc zerowych funkcji). Rozwiązanie poszukiwane jest poprzez podział pierwotnego przedziału $[x_p,x_k]$ na dwie równe części i wybranie tej części, na końcach której funkcja ma różne znaki. Jeśli funkcja jest ciągła, to w wybranym przedziale musi istnieć punkt, dla którego $f(x) = 0$. Otrzymany przedział ponownie dzielimy na równe części i postępujemy w ten sam sposób jak powyżej.

Rezystancję nieliniową o charakterystyce napięciowo-prądowej $i = 3.1 \cdot 10^{-8} u^{3.5}$ połączono szeregowo z rezystancją R_2. Napięcie źródła E jest równe 120 V. Dobrać tak wartość rezystancji R_2, aby prąd w obwodzie wynosił I=0.22 A. Obliczyć moce tracone w obu elementach.





Rys. 2. Przykład obwodu z elementem nieliniowym i wykorzystywana funkcja w edytorze VBA



	A	B	C
1	x min =	80	
2	x max =	120	
3			
4		x	f(x)
5		80.0	-0.078
6		80,0400	-0,078
7		80.0800	-0.078
8		80,1200	-0,077
9		80,1600	-0,077
10		80,2000	-0.077
11		80,2400	-0,077
12		80,2800	-0,076
13		80.3200	-0.076
14		80,3600	-0,076
15		80,4000	-0,076
16		80,4400	-0,075
17		80,4800	-0,075
18		80,5200	-0,075
19		80,5600	-0,075
20		80,6000	-0,074
21		80,6400	-0,074
22		80,6800	-0,074

Rys. 3. Wykres funkcji jako funkcji użytkownika w arkuszu Excel, z możliwością ustalania wartości x_{min} i x_{mzx}

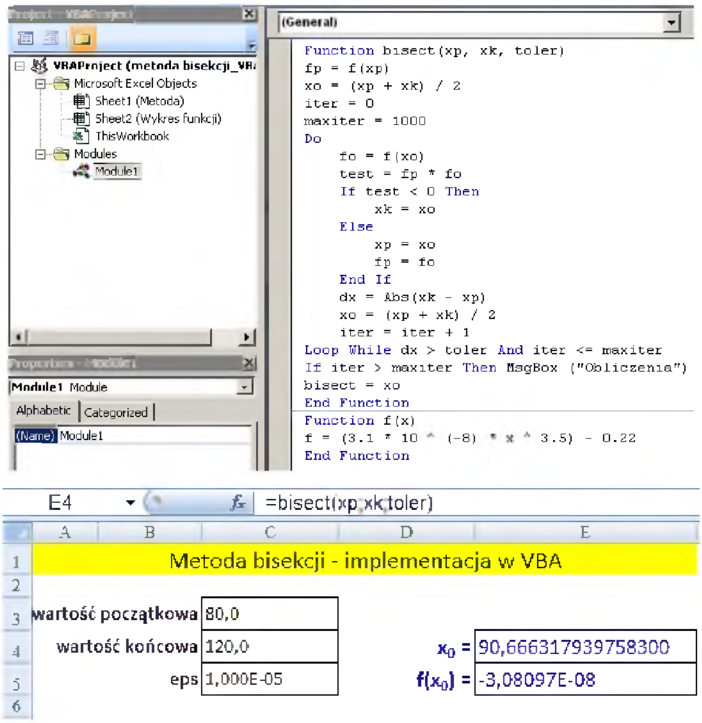
W sytuacji wykorzystania funkcji jako funkcji użytkownika, można ustalać wartości x_{min} i x_{mzx} obserwać zmiany na wykresie funkcji. Na rysunku 4 przedstawiono propozycję implementacji metody bisekcji w arkuszu Excel, w przypadku powyższego zadania. W arkuszu wykorzystywana jest wcześniej utworzona funkcja. Użytkownik ma możliwość wpisywania wartości początkowej (x_p) oraz wartości końcowej (x_k) i obserwacji na bieżąco zmieniających się wyników. Jest także możliwość wykorzystania nazwy zakresu (eps).

Metoda bisekcji

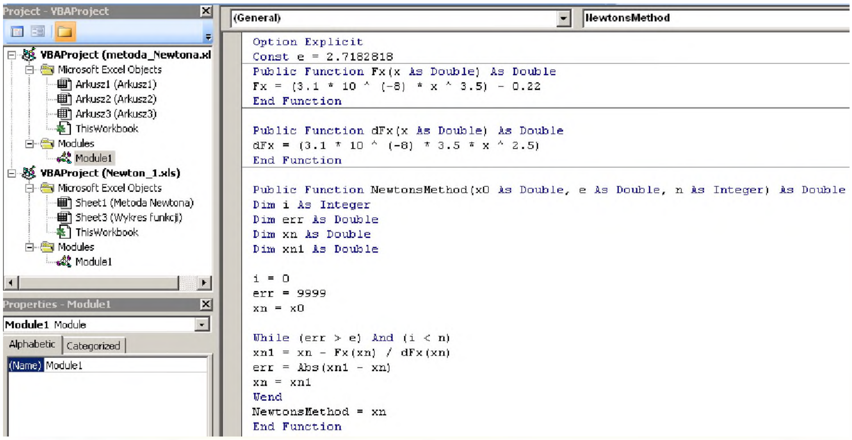
wartość początkowa	*80,0*
wartość końcowa:	*120,0*
eps	*1,000E-05*

iteracje	x_p	x_k	x_0	$f(x_p)$	$f(x_0)$	$f(x_p)*f(x_0)$	Zbieżność?	$\lvert f(x_0)\rvert$<eps
0	80,000000	120,000000	100,000000	-7,8037E-02	0,090000	-7,0233E-03	FAŁSZ	FAŁSZ
1	80,000000	100,000000	90,000000	-7,8037E-02	-0,005607	4,3756E-04	FAŁSZ	FAŁSZ
2	90,000000	100,000000	95,000000	-5,6071E-03	0,039056	-2,1899E-04	FAŁSZ	FAŁSZ
3	90,000000	95,000000	92,500000	-5,6071E-03	0,015971	-8,9548E-05	FAŁSZ	FAŁSZ
4	90,000000	92,500000	91,250000	-5,6071E-03	0,004997	-2,8019E-05	FAŁSZ	FAŁSZ
5	90,000000	91,250000	90,625000	-5,6071E-03	-0,000351	1,9666E-06	FAŁSZ	FAŁSZ
6	90,625000	91,250000	90,937500	-3,5073E-04	0,002312	-8,1077E-07	FAŁSZ	FAŁSZ
7	90,625000	90,937500	90,781250	-3,5073E-04	0,000978	-3,4287E-07	FAŁSZ	FAŁSZ
8	90,625000	90,781250	90,703125	-3,5073E-04	0,000313	-1,0968E-07	FAŁSZ	FAŁSZ
9	90,625000	90,703125	90,664063	-3,5073E-04	-0,000019	6,7288E-09	FAŁSZ	FAŁSZ
10	90,664063	90,703125	90,683594	-4,9185E-05	0,000147	-2,8149E-09	FAŁSZ	FAŁSZ
11	90,664063	90,683594	90,673828	-4,9185E-05	0,000064	-1,2232E-09	FAŁSZ	FAŁSZ
12	90,664063	90,673828	90,668945	-4,9185E-05	2,2283E-05	-4,2751E-10	FAŁSZ	FAŁSZ
13	90,664063	90,668945	90,666504	-4,9185E-05	1,5485E-06	-2,9709E-11	FAŁSZ	PRAWDA
14	90,664063	90,666504	90,665283	-1,9185E-05	-8,8184E-06	1,6918E-10	FAŁSZ	PRAWDA
15	90,665283	90,666504	90,665894	-8,8184E-06	-3,6350E-06	3,2054E-11	FAŁSZ	PRAWDA
16	90,665894	90,666504	90,666199	-3,6350E-06	-1,0432E-06	3,7920E-12	FAŁSZ	PRAWDA
17	90,666199	90,666504	90,666351	-1,0432E-06	2,5266E-07	-2,6358E-13	FAŁSZ	PRAWDA
18	90,666199	90,666351	90,666275	-1,0432E-06	-3,9528E-07	4,1236E-13	FAŁSZ	PRAWDA
19	90,666275	90,666351	90,666313	-3,9528E-07	-7,1306E-08	2,8186E-14	FAŁSZ	PRAWDA

Rys. 4. Propozycja implementacji metody bisekcji w arkuszu Excel



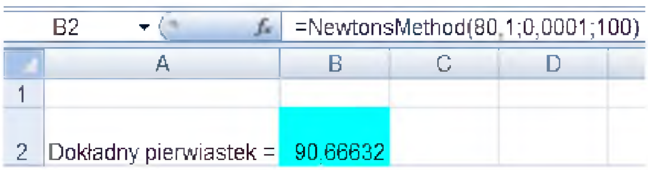
Rys. 5. Funkcja bisect [Źródło: Opracowanie własne]



Metoda Newtona

punkt startowy	80
tolerance:	1,000E-05

iteracje	x_{stary}	$f(x_{stary})$	$f'(x_{stary})$	x_{nowy}	$\lvert x_{nowy}-x_{stary}\rvert$	$\lvert x_{nowy}-x_{stary}\rvert$<toler
0	8,00000E+01	-7,80365E-02	6,21090E-03	9,25644E+01	1,256E+01	FAŁSZ
1	9,25644E+01	1,65464E-02	8,94417E-03	9,07145E+01	1,850E+00	FAŁSZ
2	9,07145E+01	4,09243E-04	8,50396E-03	9,06664E+01	4,812E-02	FAŁSZ
3	9,06664E+01	2,71307E-07	8,49269E-03	9,06663E+01	3,195E-05	FAŁSZ
4	9,06663E+01	1,19488E-13	8,49268E-03	9,06663E+01	1,407E-11	PRAWDA
5	9,06663E+01	0,00000E+00	8,49268E-03	9,06663E+01	0,000E+00	PRAWDA
6	9,06663E+01	0,00000E+00	8,49268E-03	9,06663E+01	0,000E+00	PRAWDA
7	9,06663E+01	0,00000E+00	8,49268E-03	9,06663E+01	0,000E+00	PRAWDA
8	9,06663E+01	0,00000E+00	8,49268E-03	9,06663E+01	0,000E+00	PRAWDA
9	9,06663E+01	0,00000E+00	8,49268E-03	9,06663E+01	0,000E+00	PRAWDA
10	9,06663E+01	0,00000E+00	8,49268E-03	9,06663E+01	0,000E+00	PRAWDA
11	9,06663E+01	0,00000E+00	8,49268E-03	9,06663E+01	0,000E+00	PRAWDA

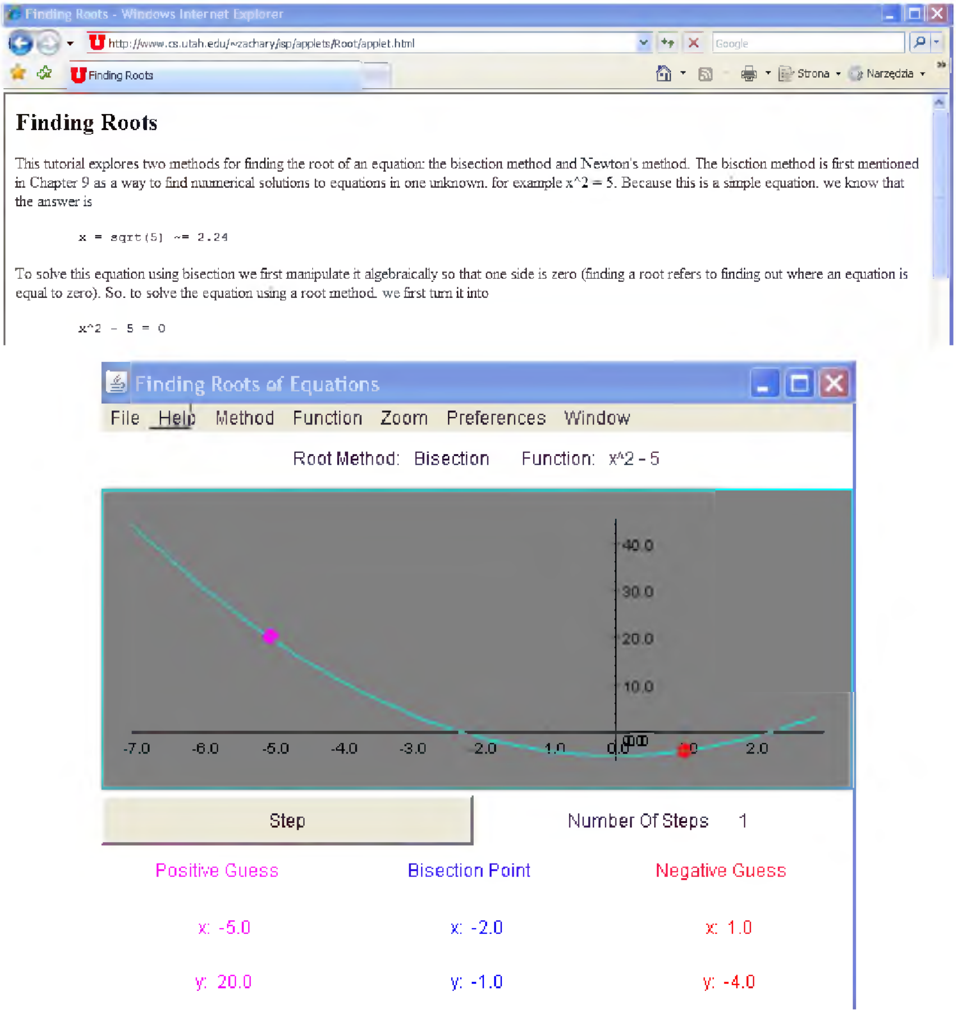


Rys. 6. Propozycja implementacji metody Newtona w arkuszu Excel

Istnieje również możliwość utworzenia funkcji *bisect* w edytorze VBA, obliczającej wartość x_0. Również w tej sytuacji użytkownik ma możliwość wpisywania wartości początkowej(x_p) oraz wartości końcowej(x_k) i obserwacji na bieżąco zmieniających się wyników.

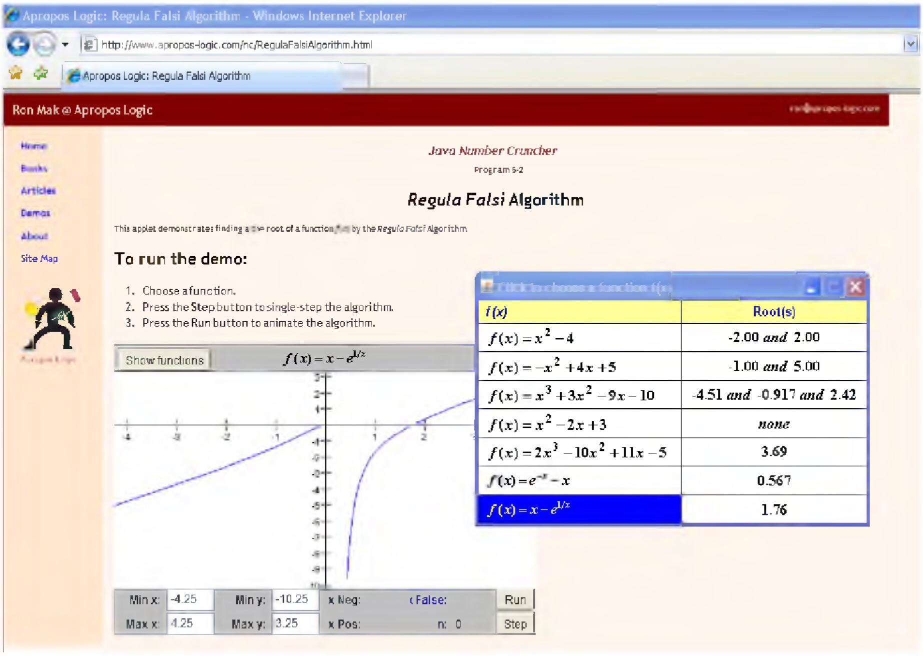
Do rozwiązania analizowanego zadania można wykorzystać również metodę Newtona rozwiązywania równania nieliniowego jednej zmiennej. Użytkownik może i w tym przypadku stworzyć funkcję *f* jako funkcję użytkownika w edytorze VBA, przeanalizować utworzony wykres i w arkuszu Excel obserwować zmieniające się dynamicznie wyniki. Kolejne kroki algorytmu są następujące: po założeniu zerowego rozwiązania (punktu startowego) oblicza się pierwsze rozwiązanie. W sytuacji kiedy pierwsze rozwiązanie nie jest właściwym rozwiązaniem, to rozwiązanie to traktuje się jako nowy punkt startowy. Następnie obliczamy drugie rozwiązanie, itd. aż do osiągnięcia rozwiązania z odpowiednio małym błędem.

3. Przykładowe zasoby sieci Internet wykorzystywane w procesie wizualizacji pojęć z dziedziny metod numerycznych



Rys. 7. Przykład wizualizacji pojęć z zakresu metod numerycznych
[Źródło: http://www.cs.utah.edu/~zachary/isp/applets/Root/applet.html]

W zasobach światowej sieci można znaleźć wiele propozycji związanych z możliwościami wizualizacji pojęć z dziedziny metod numerycznych. Oprócz wprowadzenia teoretycznego dotyczącego poszczególnych zagadnień umieszczane są np. przykładowe applety, pozwalające obserwować proces szukania rozwiązania. Jednym z takich źródeł jest strona http://www.cs.utah.edu/~zachary/isp/applets/Root/applet.html z omówieniem teoretycznym i wieloma przykładami appletów. Inną ciekawą propozycją są strony internetowe:
http://www.apropos-logic.com/nc/RegulaFalsiAlgorithm.html
http://mathforum.org/mathtools/cell/c,15.9.17,ALL,ALL/



Rys. 8. Przykład wizualizacji pojęć z zakresu metod numerycznych
Źródło: http://www.apropos-logic.com/nc/RegulaFalsiAlgorithm.html

W przedstawieniu zagadnień z zakresu metod numerycznych i w procesie wizualizacji pojęć z tej dziedziny stosuje się z powodzeniem techniki symulacji. Do budowy modeli symulacyjnych można wykorzystać ogromne możliwości arkuszy kalkulacyjnych Excel. Zaletą takiego rozwiązania jest praca studentów z narzędziem doskonale im znanym. Praca z edytorem Visual Basic for Applications i możliwości programowania w VBA rozszerzają stosowanie tego programu nawet do zaawansowanych zagadnień. Użytkownik może także wykorzystać applety Javy, umieszczone na wielu stronach internetowych opisujących przebiegu procesu szukania rozwiązania funkcji jednej zmiennej.

Bibliografia

Krupka J., Morawski R., Opalski L. (1997), *Metody numeryczne*, Warszawa.
Tarnowski W., Bartkiewicz S. (2003), *Modelowanie matematyczne i symulacja komputerowa dynamicznych procesów ciągłych*, Koszalin
Mielczarek B.(2003), *Rozważania na temat nauczania symulacji w szkołach wyższych*, Wrocław
http://people.rit.edu/jdweme/emem440.htm
http://www.apropos-logic.com/nc/RegulaFalsiAlgorithm.html
http://www.cs.utah.edu/~zachary/isp/applets/Root/applet.html