

# Jan Pavlovkin, Daniel Novak

---

## Harmonické napätia a prúdy v sériových RLC obvodoch

---

Edukacja - Technika - Informatyka 1/2, 213-219

---

2010

Artykuł został opracowany do udostępnienia w internecie przez Muzeum Historii Polski w ramach prac podejmowanych na rzecz zapewnienia otwartego, powszechnego i trwałego dostępu do polskiego dorobku naukowego i kulturalnego. Artykuł jest umieszczony w kolekcji cyfrowej [bazhum.muzhp.pl](http://bazhum.muzhp.pl), gromadzącej zawartość polskich czasopism humanistycznych i społecznych.

Tekst jest udostępniony do wykorzystania w ramach dozwolonego użytku.

## JÁN PAVLOVKIN, DANIEL NOVÁK

Univerzita Mateja Bela v Banskej Bystrici, Fakulta prírodných vied, Katedra techniky a technológií, Slovenská Republika

# Harmonické napätia a prúdy v sériových RLC obvodoch

## Úvod

Problematika časových priebehov napätí a prúdov, ako pomocných integrálnych veličín, charakterizujúcich pomery v elektrických obvodoch napájaných zo zdrojov harmonického prúdu, je veľmi široká. Predložený príspevok v návaznosti na teoretický rozbor – predkladá možnosti zaznamenania a zmerania uvedených časových priebehov na osciloskope alebo prostredníctvom počítačovej simulácie, napr. použitím simulačného programu MultiSIM. Obidva spôsoby experimentálneho overenia nachádzajú široké uplatnenie v priemyselnej praxi i v školskej výučbe učiva elektrotechniky príslušných študijných programov stredných odborných a vysokých škôl.

## 1. Harmonické napätia na prvkoch RLC obvodu

Otáčaním cievky v statickom magnetickom poli v dôsledku pôsobenia zákona elektromagnetickej indukcie vznikajú harmonické napätia a prúdy. Zaujímavé sú prúdy tečúce v *RLC* obvode v dôsledku periodického vybíjania a nabíjania kondenzátora pre kritický prípad nulového odporu obvodu  $R \rightarrow 0$ . V článku budeme analyzovať javy spojené so striedavými prúdmi.

Harmonické napätia a prúdy sa vyjadrujú časovými závislosťami

$$u(t) = U_0 \cos(\omega t \pm \varphi_u) \quad (1)$$

$$i(t) = I_0 \cos(\omega t \pm \varphi_i) \quad (2)$$

kde  $u(t)$  a  $i(t)$  sú okamžité hodnoty napätia a prúdu,  $U_0$  a  $I_0$  sú ich amplitúdy,  $\varphi_u$  a  $\varphi_i$  sú fázové posuny napätia a prúdu voči referenčným napäťovým alebo prúdovým priebehom s tou istou frekvenciou a s nulovým fázovým posunom. Ak je takýmto referenčným priebehom napríklad napätie

$$u_0(t) = U_0 \cos \omega t \quad (3)$$

potom napätie  $u(t)$  fázovo predbieha napätie  $u_0(t)$ , ak jeho fázový posun je  $+\varphi_u$  a fázovo zaostáva za  $u_0(t)$ , ak jeho fázový posun je  $-\varphi_u$ . To isté možno povedať o prúde  $i(t)$  a jeho fázovom vzťahu k  $u_0(t)$ . Na vyjadrenie harmonických

priebehov možno rovnako využiť aj funkciu sínus, čím sa do vzťahov (1, 2) zavedie iba konštantný fázový posun  $\pm\pi/2$ , pretože napr.

$$\sin(\omega t + \varphi \pm \pi/2) = \pm \cos(\omega t + \varphi) \quad (4)$$

a naopak

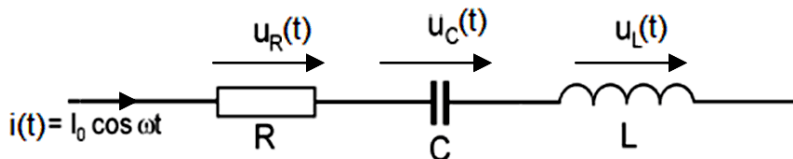
$$\cos(\omega t + \varphi \pm \pi/2) = \pm \sin(\omega t + \varphi) \quad (5)$$

Striedavé harmonické prúdy tečú v obvodoch, ktoré pozostávajú z odporov  $R$ , kapacít  $C$ , indukčností  $L$  a tie môžu byť viazané vzájomnými indukčnosťami  $M$  do zložitých striedavých elektrických sietí, ich správanie bude ovplyvnené tiež geometrickým usporiadaním jednotlivých indukčností, charakterizovaný činiteľom väzby  $\lambda$ , kde  $0 \leq \lambda \leq 1$ . Na jednotlivých prvkoch siete vznikajú striedavé napätia s istými amplitúdami a fázovými vzťahmi k iným napätiam alebo prúdom siete. Ako jednoduchý príklad určíme napätia na prvkoch  $R$ ,  $L$  a  $C$  (obrázok 1), ktoré sú zapojené sériovo v jednej vetvi, ktorou tečie harmonický prúd

$$i(t) = I_0 \cos \omega t. \quad (6)$$

Na odpore  $R$  podľa Ohmovho zákona vznikne napätie

$$u_R(t) = Ri(t) = RI_0 \cos \omega t = U_{0R} \cos \omega t \quad (7)$$



Obrázok 1. Sériové zapojenie obvodu RLC

Harmonický prúd a napätie na odpore nie sú fázovo posunuté, inak povedané, napätie a prúd v odpore  $R$  sú vo fáze ( $\varphi_R = 0$ ) a amplitúda napätia  $U_{0R} = RI_0$ . V úplne inom fázovom vzťahu sú však prúdy a napätia na reaktančných prvkoch, teda kondenzátore  $C$  a cievke  $L$ . Ak sa striedavým prúdom (6) nabíja kondenzátor  $C$  (pôvodne nenabíty), potom napätie na ňom je dané výrazom

$$u_C(t) = \frac{q(t)}{C} = \frac{1}{C} \int i(t) dt = \frac{I_0}{\omega C} \sin \omega t = U_{0C} \cos \left( \omega t - \frac{\pi}{2} \right) \quad (8)$$

t.j. **napätie na kondenzátore zaostáva za prúdom vo fáze o  $\varphi_C = -\pi/2$**  a amplitúda napätia  $U_{0C} = I_0/\omega C$ . Vo výraze (8) bol využitý vzťah (5). Veličina

$$X_C = \frac{U_{0C}}{I_0} = \frac{1}{\omega C}, \quad (9)$$

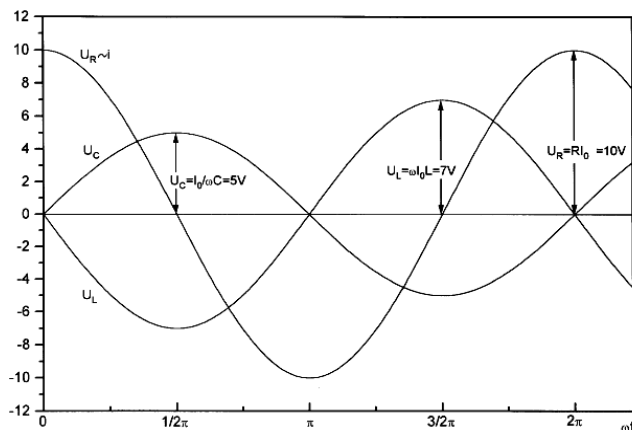
daná pomerom amplitúd napätia a prúdu, ktorá má rozmer odporu sa nazýva **kapacitná reaktancia**. Ak prúd (6) tečie indukčnosťou  $L$ , samoindukciou na nej vznikne napätie

$$u_L = -L \frac{di(t)}{dt} = -\omega LI_0 \sin \omega t = U_{0L} \cos \left( \omega t + \frac{\pi}{2} \right), \quad (10)$$

teda **napätie na indukčnosti predbieha prúd vo fáze o  $\varphi_L = \pi/2$**  a amplitúda napätia  $U_L = \omega LI_0$ . Veličina

$$X_L = \frac{U_{0L}}{I_0} = \omega L \quad (11)$$

sa nazýva **induktívna reaktancia** a má rozmer odporu. Na obrázku 2 sú zobrazené časové priebehy všetkých napätí  $u_R(t)$ ,  $u_C(t)$  a  $u_L(t)$  vo svojom vzájomnom fázovom vzťahu pre konkrétne numerické hodnoty  $RLC$  prvkov, frekvencie a amplitúdy prúdu.



Obrázok 2. Časové priebehy napätí  $u_R(t)$ ,  $u_C(t)$  a  $u_L(t)$

## 2. Harmonický prúd v RLC obvodoch

Sériové zapojenie  $RLC$  prvkov podľa obrázku 1 predstavuje jednoduchý sériový obvod  $RLC$ . Ak takýto obvod pripojíme na zdroj striedavého napätia

$$u(t) = U_0 \cos \omega t \quad (12)$$

môžeme skúmať aký prúd tečie takýmto obvodom? Pre obvod musí platiť v súlade s druhým Kirchhoffovým zákonom obvodová rovnica, podľa ktorej algebrický súčet všetkých napätí, teda napätí zdrojov  $u(t)$ , indukovaných napätí na indukčnostiach  $L di(t)/dt$ , odporových ohmických spádov  $Ri(t)$  a napätí nabitých kondenzátorov  $q(t)/C$  v uzavretom obvode sa musí rovnať nule. Musí teda platiť

$$u(t) - L \frac{di(t)}{dt} = Ri(t) + \frac{q(t)}{C}. \quad (13)$$

Po úprave rovnice (13) a jej derivácii, s uvážením, že  $\frac{dq(t)}{dt} = i(t)$  dostaneme diferenciálnu rovnicu pre prúd  $i(t)$  v tvare

$$L \frac{d^2 i(t)}{dt^2} + R \frac{di(t)}{dt} + \frac{i(t)}{C} = -\omega U_0 \sin \omega t. \quad (14)$$

Z matematického hľadiska rovnica (14) predstavuje obyčajnú nehomogénnu diferenciálnu rovnicu druhého rádu s konštantnými koeficientmi. Riešenie rovnice (14) pozostáva z dvoch častí, prvá je superpozícia všeobecného riešenia homogénnej rovnice a druhá je jedno partikulárne riešenie nehomogénnej rovnice. Fyzikálny pohľad na problém je oveľa zaujímavejší. Riešením je nestacionárny prechodový prúd, ktorý s časom (a pomerne rýchle) vymizne. Potom zostane nenulová iba druhá, kvázistacionárna časť riešenia, ktorá je obvyčajne predmetom záujmu. V elektrotechnike poznáme charakter tohto riešenia a vieme navrhnúť aj tvar prúdu bez toho, aby sme diferenciálnu rovnicu riešili. Možno očakávať, že riešenie, teda prúd, bude tiež harmonickou funkciou, napríklad tvaru

$$i(t) = I_0 \cos(\omega t - \varphi) \quad (15)$$

Takto navrhnuté riešenie sa dosadí do rovnice (14) a z tej sa určia neznáma amplitúda prúdu  $I_0$  a fázový posun  $\varphi$  prúdu oproti napätiu. Po dosadení riešenia (15) do rovnice (14) dostaneme

$$-\omega^2 L I_0 \cos(\omega t - \varphi) - \omega R I_0 \sin(\omega t - \varphi) + \frac{I_0}{C} \cos(\omega t - \varphi) = -\omega U_0 \sin \omega t. \quad (16)$$

Ďalší postup je nasledovný: kosínusové a sínusové funkcie rozdielového uhla  $\omega t - \varphi$  na ľavej strane rovnice sa vyjadria pomocou príslušných trigonometrických vzťahov. Rovnosť sa upraví na tvar  $A \cos \omega t + B \sin \omega t = 0$ . Rovnica bude platiť pre všetky  $t$  vtedy, ak  $A = 0$ ,  $B = 0$ . Po vykonaní uvedenej procedúry dostaneme dve podmienky

$$A = \left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \cos \varphi - R \sin \varphi = 0, \quad (17)$$

$$B = \left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right) I_0 \sin \varphi - R I_0 \cos \varphi - U_0 = 0. \quad (18)$$

Riešením týchto rovníc dostaneme amplitúdu prúdu v obvode  $I_0$  a jeho fázový posun  $\varphi$  v tvare

$$I_0 = \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + \left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2}} = \frac{U_0}{Z}, \quad (19)$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}. \quad (20)$$

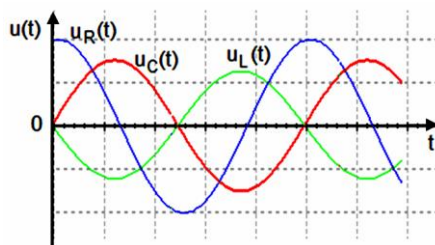
Výrazy (19 a 20) sú odpoveďou na našu otázku o prúde v sériovom  $RLC$  obvode. Vidíme, že ako amplitúda prúdu, tak aj jeho fázový posun oproti napätiu sú funkciami frekvencie a vykazujú od frekvencie dosť zvláštnu závislosť. Prúd môže podľa hodnoty frekvencie napätie vo fáze predbiehať alebo za ním zaostávať. Pri istej frekvencii je amplitúda prúdu maximálna a súčasne je pri tejto frekvencii fázový posun nulový. V elektrickom obvode došlo k rezonancii, pri ktorej napájaci zdroj kryje iba straty. Významnou veličinou striedavých elektrických obvodov je **impedancia**. Vo všeobecnosti je impedancia komplexným číslom, ktoré voltampérovou charakterizuje jednotlivé pasívne prvky v striedavých sieťach. Platí

$$Z = \frac{U_0}{I_0} = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}, \quad (21)$$

kde  $R$  je reálna zložka impedancie a nazýva sa **rezistancia**,  $X$  je imaginárna (jalová) zložka impedancie a nazýva sa **reaktancia**, výraz  $\sqrt{R^2 + X^2}$  sa nazýva **modul impedancie** a uhol  $\varphi$  je **uhol impedancie**. Pojem impedancie je kľúčovým pojmom teórie striedavých elektrických obvodov a sietí a má podobný, ale všeobecnejší význam, ako pojem odporu v jednosmerných elektrických sieťach. Spolu s fázovým posunom  $\varphi$  úplne určuje elektrické vlastnosti danej vetvy obvodu. V elektrotechnických zapojeniach predstavuje impedancia **dvojpól**.

### 3. Experimentálne overenie

Pripojíme sériový obvod  $RLC$  podľa obr. 1 na zdroj striedavého harmonického napätia  $U = 1 \text{ V}$ , s frekvenciou  $f = 1000 \text{ Hz}$ . Hodnoty prvkov  $R = 1 \text{ k}\Omega$ ,  $L = 1 \text{ mH}$ ,  $C = 1 \text{ }\mu\text{F}$ . Pomocou osciloskopu zmeriame priebehy jednotlivých napätí  $u_R(t)$ ,  $u_C(t)$  a  $u_L(t)$ . Namerané priebehy harmonických napätí na jednotlivých prvkoch  $RLC$  sú zobrazené na obrázku 3.



$t = 200 \text{ }\mu\text{s/dielik}$ ,  $u_R(t) = 500 \text{ mV/dielik}$ ,  $u_C(t)$  a  $u_L(t) = 100 \text{ mV/dielik}$

**Obrázok 3.** Namerané priebehy harmonických napätí  $u_R(t)$ ,  $u_C(t)$  a  $u_L(t)$  na prvkoch  $RLC$

## Záver

Teoretické riešenie rovníc pre jednotlivé napätia  $u_R(t)$ ,  $u_C(t)$  a  $u_L(t)$  na prvkoch RLC v analytickej forme je pomerne obtiažne. Reálne priebehy napätí na  $u_R(t)$ ,  $u_C(t)$  a  $u_L(t)$  môžeme namerať pomocou jednoduchého experimentu osciloskopom alebo počítačovou simuláciou, napr. simulačným programom MultiSIM, ktorý sa ukazuje ako veľmi vhodný najmä pre školskú prax. Priebehy teoretických výpočtov a praktického experimentu sú samozrejme zhodné.

## Zoznam bibliografických odkazov

Pavlovkin J. (2007), *Počítačom podporované elektrolaboratórium využívané vo vyučovaní technických odborných predmetov*, „Acta Universitas Matthiae Belii”, Ser.: „Technická výchova”, No 7, Banská Bystrica: FPV UMB, s. 59-71, ISBN 978-80-8083-488-3.

## Resumé

Príspevok sa zaoberá teoretickým rozborom časových priebehov napätí a prúdov, v elektrických obvodoch napájaných zo zdrojov harmonického prúdu. Teoretický popis je doplnený experimentálnymi výsledkami nameraných časových priebehov napätí na prvkoch RLC pomocou osciloskopu a prostredníctvom počítačovej simulácie. Obidva spôsoby experimentálneho overenia nachádzajú široké uplatnenie v priemyselnej praxi i v školskej výučbe učiva elektrotechniky príslušných študijných programov stredných odborných a vysokých škôl.

## Harmonic voltage and current in series RLC circuits

### Abstract

The paper deal with theoretical analysis time response of voltage and current, in electric circuit of power supply from source of harmonic current. Theoretical description is supplemented experimental results measure out time response voltage on element RLC by oscilloscope and computing simulation. Both of them means of action experimental verification find wide application in industrial praxis and in school education subject electro technical corresponding educational programs of secondary technical and university.

**Key words:** electrotechnics, technology education, analysis time response.

## **Harmoniczne przebiegi napięć i prądów w szeregowych obwodach RLC**

### **Streszczenie**

W artykule zajęto się teoretycznymi rozważaniami dotyczącymi układów rezonansowych *RLC*. Opis teoretyczny uzupełniony jest opisem zaprojektowanych i przeprowadzonych doświadczeń, które mogą znaleźć zastosowanie zarówno w nauczaniu przedmiotów zawodowych, jak i w przemyśle.

**Słowa kluczowe:** elektrotechnika, edukacja techniczna, analiza przebiegów czasowych.