Vladimir Strecko

Dve metódy výpočtu súčtu nekonečného číselného radu

Edukacja - Technika - Informatyka nr 1(15), 202-206

2016

© Wydawnictwo UR 2016
ISSN 2080-9069
ISSN 2450-9221 online

„Edukacja – Technika – Informatyka" nr 1/15/2016
www.eti.rzeszow.pl
DOI: 10.15584/eti.2016.1.28

VLADIMÍR STREČKO

Dve metódy výpočtu súčtu nekonečného číselného radu

Two methods of calculating the sum of an infinite sequence of number series

Doc. PaedDr. Vladimír Strečko, PhD., Prešovská univerzita v Prešove, Katedra fyziky, matematiky a techniky FHPV, Slovenska Republika

Abstrakt

Článok je ukážkou prezentácie dvoch metód výpočtu súčtu vybraných nekonečných číselných radov. Historické poznámky sú jednou z foriem motivácie matematickej činnosti. Matematicko-pedagogický proces má motivovať študentov aj touto formou. Slávny Cicero sa preslávil o.i. citátom: "Historia est Magistra Vitae" Príspevok je pohľadom do 14. storočia, konkrétne stredobodom pozornosti je matematik Mikuláš Oresme, ktorý o. i. dokázal počítať súčty nekonečných číselných radov názornou metódou. Tento spôsob výpočtu bol veľmi obmedzený. Druhý spôsob výpočtu tkvie v aplikácii aparátu vyššej matematiky, ktorá sa rodí v 17. storočí. No uvedené súčty sa efektívne počítajú až o dve storočia neskôr, lebo až v 19. storočí matematika prekonáva svoju druhú krízu, do ktorej sa v 18. storočí dostala.

Kľúčové slová: matematicko-pedagogický proces, nekonečný číselný rad, súčet radu, derivovanie funkčného radu, integrovanie funkčného radu.

Abstract

The paper presents two methods of calculating the selected infinite sequences of number series. The historical notes used are one of the forms of the motivation of mathematical activity, since it is believed that the mathematical-pedagogical process should be motivated also in this way. The famous Cicero is, among other things, also famed by saying "Historia est Magistra Vitae". The paper looks back to the 14th century by focusing on Nicolas Oresme who managed to calculate the sums of infinite sequences, although his approach was a limited one. The other method of calculation rests in the application of the apparatus of a higher mathematical level which was originated in the 17th century. However, the given sums were calculated only 2 centuries later, when mathematics managed to overcome the crisis which it suffered in the 18th century.

Key words: mathematical-pedagogical process, infinite sequence of number series, the sum of the sequence, derivation of functional sequence, integration of functional sequence.

Úvod

Príspevok prezentuje dva rôzne spôsoby výpočtu súčtu nekonečného číselného radu. Cieľom tohto článku je poukázať na historické aspekty vývoja matematiky, ktoré ilustrujú prístupy k výpočtom matematických veličín v 14. storočí a o 5 storočí neskôr.

Vlastná problematika

Študenti 2. ročníka gymnázií sa v rámci učiva o úpravách výrazov s mocninami a odmocninami stretávajú s pravidlami pre počítanie s odmocninami. Po prvýkrát tieto pravidlá formuloval už v 14. storočí francúzsky polyhistor Mikuláš Oresme.

Mikuláš Oresme (asi 1330–1382) pochádzal z Normandie a v rokoch 1348 až 1361 vyučoval na francúzskej univerzite Collège de Navarra v Paríži. Tak ako mnoho mužov vedy v stredoveku aj on bol prepojený s cirkvou a pôsobil v rôznych cirkevných funkciách v Rouene. Od roku 1377 pôsobil ako biskup v Lisieux.

Na rozkaz kráľa Karla V. preložil niekoľko Aristotelových diel do francúzštiny a stal sa tak priekopníkom publikovania vedeckých prác vo francúzštine. Aj napriek tomu publikoval svoje najvýznamnejšie dielo, čo sa týka matematiky, v latinčine. Jednalo sa o *Algoritmus proporcií* (v origináli: *Algorismus proportionum*), v ktorom sa zaoberá so spomínanými mocninami a odmocninami [Wußing 2008: 293–294].

Oresme v Algoritme proporcií zavádza vedľa celočíselných exponentov, tiež štvrtinové, tretinové, polovičné, jedenapolnásobné a iné lomené racionálne exponenty, ktoré by sme dnes zapísali ako $a^{\frac{1}{3}}$, $a^{\frac{3}{2}}$ atď. Zo skutočnosti, že $8=\sqrt{64}$ a $4=\sqrt[3]{64}$ Oresme usudzuje, že 8 je jedenapolnásobná mocnina zo 4, čiže $8=4^{\frac{3}{2}}$. Tieto racionálne exponenty Oresme nazýval iracionálnymi a slovne sformuloval viacero nám už dnes známych pravidiel pre počítanie s nimi, ako napríklad:

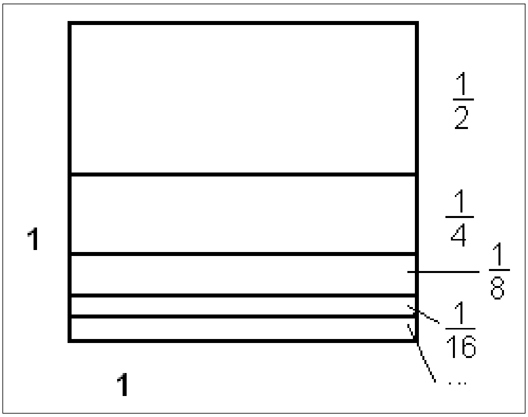
$$a^{\frac{n}{m}}=\left(a^n\right)^{\frac{1}{m}},\quad a^{\frac{1}{m}}b^{\frac{1}{n}}=\left(a^n b^m\right)^{\frac{1}{m.n}},\quad \frac{a^{\frac{1}{n}}}{b^{\frac{1}{n}}}=\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{n}},\quad a^{\frac{1}{n}}b^{\frac{1}{n}}=\left(ab\right)^{\frac{1}{n}},$$

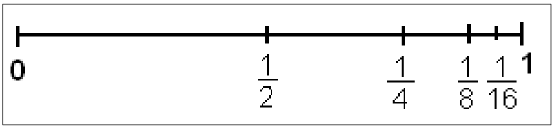
a podobne. Týmto položil základ pre neskoršie teórie logaritmov [Juškevič 1978: 389].

V Algoritme proporcií sa Oresme okrem mocnín a odmocním venoval aj geometrickej interpretácii číselných radov. Ukázal, že súčet nekonečného radu

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}...=1$$

pomocou nasledujúcich obrázkov:



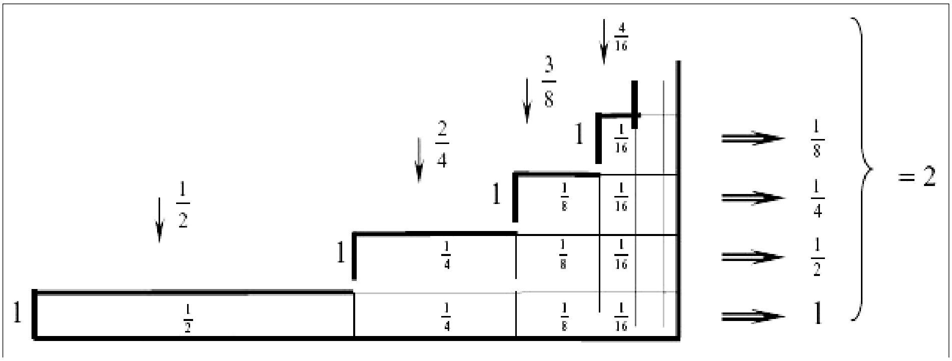


Exaktne v súčasnosti vypočítame súčet tohto radu podľa vzorca $S = \frac{a_1}{1-q}$, kde a_1 je prvý člen geometrického číselného radu, q je kvocient tohto radu.

Takisto pomocou obrázka vedel určiť aj súčet nasledujúceho radu

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{3}{8} + \frac{4}{16} + \ldots = 2\,.$$

alebo ako ukazuje nasledujúci obrázok 1.



Obrázok 1. Súčet nekonečného radu. Grafické znázornenie od Oresmeho [Jedinák 2007: 49]

Takýmito a podobnými radmi sa zaoberajú žiaci tretieho resp. štvrtého ročníka gymnázií, avšak grafický súčet sa využíva zriedkavo. Ukážeme si ešte ako by súčet členov tejto postupnosti mohli riešiť študenti vysokých škôl. Treba dokázať, že

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} = 2 .$$

Riešenie spočíva v zavedení funkčného radu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} x^n ,$$

ktorý nech má súčet *S(x)*, potom

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} x^n .$$

Obidve strany vydelíme x a po zintegrovaní ľavej aj pravej strany dostávame

$$\int \frac{S(x)}{x} \mathrm{d}x = \int \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} x^{n-1} \mathrm{d}x$$

a po ďalšej úprave

$$\int \frac{S(x)}{x} \mathrm{d}x = \frac{x}{2-x}.$$

Nakoniec zderivujeme obe stany rovnosti a po úprave dostaneme

$$S(x) = \frac{2x}{(2-x)^2} ,$$

kde pre $x = 1$ je $S(1) = 2$.

Z ďalších Oresmeho diel sú veľmi významné spisy *O konfigurácii kvalít* (*De configuratione qualitum*) a *O rovnomerných a nerovnomerných intenzitách* (*De uniformitate et difformitate intensionum*), kde sa snažil o matematický popis pohybu. Začal dokonca používať aj geometrické vyjadrenie veličín a ich vzájomných súvislostí. Do budúcnosti tak prispel k stanoveniu závislosti medzi časom a meranou veličinou a vytušil úlohu funkčných závislostí ako nástroja pre skúmanie prírody a jej merateľných zákonov [Jedinák 2007: 48–49].

Záver

Článok ukázal efektívnosť aplikácie diferenciálneho a integrálneho počtu pri výpočte súčtu nekonečných číselných radov. Na historickom pozadí sa čitateľ oboznamuje s možnosťou použitia aparátu vyššej matematiky v praxi. Veríme, že článok zaujal svojím obsahom čitateľa Zborníka a siahne aj po odporúčanej literatúre v ktorej sa danej problematike venuje oveľa viac pozornosti.

Literatúra

Jedinák D. (2007), *Eseje o matematikoch*, Trnava.

Juškevič A.P. (1978), *Dějiny matematiky ve středověku*, Praha.

Strečko V. (2000), *Problematika vyučovania matematiky v inžinierskom vzdelávaní*, Nitra.

Wußing H. (2008), *6000 Jahre Mathematik*, Berlin–Heidelberg.

Znám Š., Bukovský L., Hejný M. a kol. (1986), *Pohľad do dejín matematiky*, Bratislava.

Lektorovala:
doc. RNDr. Edita Pártová, CSc.