Marian Przełęcki

Problem interpretacji języka empirycznego w ujęciu teorio-modelowym

Filozofia Nauki 1/2/3, 217-236

1993

Filozofia Nauki
Rok I, 1993, Nr 2-3

Problem interpretacji języka empirycznego w ujęciu teorio–modelowym

Jednym z podstawowych problemów logicznej metodologii nauk empirycznych jest problem interpretacji języka tych nauk — problem sposobu, w jaki wyrażeniom języka empirycznego nadane zostaje znaczenie i odniesienie przedmiotowe. Zakładamy tu, iż język każdej teorii empirycznej jest językiem sensownym, językiem odnoszącym się do określonej dziedziny rzeczywistości (lub do określonej klasy takich dziedzin), i pytamy, na czym polega procedura, która mu taki charakter zapewnia. Idzie tu — tak jak i w innych zagadnieniach metodologii logicznej — nie o opis sprawozdawczy faktycznie stosowanych zabiegów interpretacyjnych, lecz o ich rekonstrukcję logiczną — o taką charakterystykę procedury interpretacyjnej, która by dostarczała racji dla przypisania danemu językowi interpretacji faktycznie mu przysługującej. Sprawa ta nabiera szczególnego znaczenia wtedy, gdy od nauk empirycznych posługujących się językiem potocznym, lub niewiele od potocznego odbiegającym, przechodzimy do teorii empirycznych, których język zawiera wyrażenia specyficzne i językowi potocznemu obce. Zarówno ich sens, jak i sposób jego określania dalekie są od oczywistości. Terminy tych teorii odnosić się mają z założenia do przedmiotów odległych od przedmiotów naszego codziennego doświadczenia, toteż i sposób przyporządkowania im tych przedmiotów przybierać tu musi charakter szczególny.

Aby zdać z niego sprawę, trzeba w całości, jaką tworzy zinterpretowany język empiryczny, wyróżnić dwa różne składniki: język niezinterpretowany, stanowiący pewien twór czysto formalny, i jego interpretację, pojętą jako pewna dziedzina rzeczywistości, do której się tak rozumiany język odnosi. Oba te pojęcia znajdują swoje ścisłe odpowiedniki w aparacie formalnym współczesnej semantyki logicznej: są to pojęcia języka sformalizowanego i jego modelu. Teoria modeli jest tym działem logiki współczesnej, który bada związki semantyczne między językami sformalizowanymi a ich modelami. Toteż środki logiczne tej właśnie teorii posłużą nam do analizy problemu interpretacji języka empirycznego. Jej głównym celem jest dostarczenie przykładu stosowalności pojęć teorio–modelowych do semantyki języków empirycznych. Stanowi ona tym samym kontynuację podobnych analiz zawartych zarówno w moich pracach wcześniejszych (w szczególności w monografii *The Logic of Empirical Theories*, 1969), jak i w pracach innych autorów (Suszko, Wójcicki, Montague). Aparat formalny, z którego się tu korzysta, nie wykraczający poza elementarne pojęcia teorii modeli, znany jest dziś nie tylko logikom, lecz i metodologom; co więcej, należy do zasobu standardowych narzędzi badawczych metodologii współczesnej. Nie ma zatem potrzeby wyjaśniać go tu raz jeszcze w sposób szczegółowy i systematyczny. Ograniczę się więc jedynie do paru słów przypomnienia[1].

I

1. Problem interpretacji języka empirycznego rozważymy na przykładzie języków możliwie najprostszych. Będą to języki o tzw. standardowej formalizacji zawierające predykaty jako jedyne terminy logiczne. (To upraszczające założenie nie zmniejszy, jak zobaczymy, w sposób niepożądany ogólności naszych rozważań.) Słownik takiego języka L zawiera, prócz zmiennych indywiduowych, spójniki zdaniowe, kwantyfikatory i predykat identyczności — jako stałe logiczne, oraz predykaty $r_1, ..., r_n$ — jako stałe pozalogiczne. W znany, czysto syntaktyczny sposób definiujemy zbiór formuł zdaniowych języka L, oraz zbiór zdań (formuł zdaniowych nie zawierających zmiennych wolnych) języka L. W czysto syntaktyczny sposób charakteryzujemy również operację konsekwencji logicznej w języku L, Cn, a stąd i zbiór twierdzeń logicznych języka L jako ogół konsekwencji logicznych zbioru pustego, $Cn(\emptyset)$ (obejmujący twierdzenia węższego rachunku predykatów z identycznością).

Tak scharakteryzowany język L pozostaje oczywiście językiem niezinterpretowanym. Nie mówiąc o żadnej określonej dziedzinie rzeczywistości, nadaje się jednak do mówienia o różnych takich dziedzinach. Każda dziedzina, o której można mówić w języku L, stanowi jeden z modeli tego języka. Modelem języka L jest więc każdy układ

$$\mathfrak{M} = \langle U; R_1, ..., R_n \rangle$$

który składa się z niepustego zbioru U, zwanego uniwersum modelu $\mathfrak{M}$, i z relacji $R_1, ..., R_n$, zachodzących między jego elementami, z których każda ma tyle członów, ile argumentów ma odpowiadający jej predykat języka L. Każdy model $\mathfrak{M}$ języka L wyznacza jedną z możliwych interpretacji tego języka. Jego zmiennym przyporządkowuje jako zbiór wartości uniwersum U, a predykatom $r_1, ..., r_n$ jako ich denotacje relacje $R_1, ..., R_n$.

1) Wszystkie pojęcia formalne używane w tej pracy wyjaśnione są w każdym obszerniejszym podręczniku logiki. Ważniejsze z nich wprowadza w sposób przystępny R. Wójcicki w pracy „Analityczność, syntetyczność, empiryczna sensowność zdań", *Studia Filozoficzne* 3 (46), 1966.

Pojęcie modelu $\mathfrak{M}$ języka L pozwala na wprowadzenie, w znany dobrze sposób, podstawowych pojęć semantycznych zrelatywizowanych do modelu $\mathfrak{M}$. Pojęciem wyjściowym jest w tej konstrukcji pojęcie spełniania. Nie sposób przedstawić tu jego, skomplikowanej nieco, definicji, ale i nie ma potrzeby, bo jest to pojęcie znane i intuicyjnie jasne. Poprzestanę zatem na krótkim, nieformalnym wyjaśnieniu. Niech $\alpha(x_1, ..., x_k)$ będzie formułą języka L o zmiennych wolnych $x_1, ..., x_k$, $\mathfrak{M} = \langle U; R_1, ..., R_n\rangle$ — modelem tego języka, a $\langle a_1, ..., a_k\rangle$ — ciągiem elementów uniwersum U.

Formuła $\alpha(x_1, ..., x_k)$ jest spełniona w modelu $\mathfrak{M}$ przez ciąg $\langle a_1, ..., a_k\rangle$ wtedy, gdy jest tak jak głosi formuła $\alpha(x_1, ..., x_k)$ zinterpretowana w sposób następujący: jej zmienne związane przebiegają zbiór U, zmienne wolne $x_1, ..., x_k$ pełnią funkcje nazw elementów $a_1, ..., a_k$, predykaty $r_1, ..., r_n$ denotują relacje $R_1, ..., R_n$, a stałe logiczne przybierają swą zwykłą, klasyczną interpretację.

Pojęcie spełniania pozwala z kolei na zdefiniowanie pojęcia prawdziwości w modelu $\mathfrak{M}$.

Formuła $\alpha(x_1, ..., x_k)$ jest prawdziwa w modelu $\mathfrak{M}$ wtedy, gdy formuła $\alpha(x_1, ..., x_k)$ jest spełniona w modelu $\mathfrak{M}$ przez każdy ciąg $\langle a_1, ..., a_k\rangle$ elementów zbioru U.

Dla formuł nie zawierających zmiennych wolnych otrzymujemy w ten sposób pojęcie zdania prawdziwego w modelu $\mathfrak{M}$. Zbiór zdań języka L prawdziwych w modelu $\mathfrak{M}$ symbolizować będziemy przez $Ver(\mathfrak{M})$, a zbiór ich negacji — zdań języka L fałszywych w modelu $\mathfrak{M}$ — przez $Fls(\mathfrak{M})$. Gdy wszystkie zdania zbioru X są prawdziwe w $\mathfrak{M}$, mówimy, iż $\mathfrak{M}$ jest modelem zbioru zdań X, w skrócie $\mathfrak{M} \in M(X)$. Przy pomocy tego pojęcia podać możemy semantyczną charakterystykę wprowadzonych wyżej w sposób syntaktyczny pojęć konsekwencji i twierdzenia logicznego:

$\alpha \in Cn(X)$ wtedy, gdy każdy model zbioru zdań X jest modelem zdania α;

$\alpha \in Cn(\emptyset)$ wtedy, gdy każdy model języka L jest modelem zdania α.

Przyjmuje się na ogół, iż język L staje się językiem zinterpretowanym wtedy, gdy spośród wszystkich dziedzin, o których można mówić w języku L, wyróżniona zostaje jedna jako ta, o której język ten faktycznie mowi; innymi słowy, gdy spośród wszystkich modeli języka L wyróżniony zostaje jeden jako tzw. model właściwy lub zamierzony. Język zinterpretowany utożsamia się wobec tego najczęściej z parą $\langle L, \mathfrak{M}^*\rangle$ złożoną z języka sformalizowanego L i jego modelu właściwego $\mathfrak{M}^*$. W zastosowaniu do języka zinterpretowanego wprowadzić możemy pojęcia semantyczne «absolutne» (a nie «relatywne», jak poprzednie), w szczególności pojęcie zdania prawdziwego *tout court*, utożsamiając prawdziwość z prawdziwością w modelu właściwym. Zdanie α jest prawdziwe, gdy jest prawdziwe w $\mathfrak{M}^*$; fałszywe, gdy jest fałszywe w $\mathfrak{M}^*$. Oznaczając zbiór zdań prawdziwych języka L przez Ver, a fałszywych przez Fls, notujemy, iż:

$$Ver = Ver(\mathfrak{M}^*),\ Fls = Fls(\mathfrak{M}^*).$$

Taka koncepcja języka zinterpretowanego wydaje się jednak zbyt rygorystyczna, zwłaszcza w zastosowaniu do języków empirycznych. To, o czym mówi język empiryczny, nie jest prawie nigdy zdeterminowane w sposób jednoznaczny. Czynniki pragmatyczne decydujące o tym, do czego się odnoszą wyrażenia takiego języka, określają jego model właściwy w sposób wieloznaczny. Nieuchronna nieostrość wszelkich terminów empirycznych jest tego wyraźnym dowodem. W istocie więc czynniki te wyznaczają nie jeden model właściwy $\mathfrak{M}^*$, lecz klasę takich modeli M^*, zawierającą z reguły więcej niż jeden element. Dalsza analiza interpretacji języka empirycznego przynosi wyraźne potwierdzenie tego założenia. Przyjmiemy tu zatem bardziej liberalną koncepcję języka zinterpretowanego, zgodnie z którą o języku takim możemy mówić już wtedy, gdy mamy wyróżnioną pewną klasę jego modeli właściwych M^* — niepustą i nie pokrywającą się z ogółem jego modeli. Utożsamiamy więc każdy język zinterpretowany z parą $\langle L, M^* \rangle$, gdzie L — to język sformalizowany, a M^* — to klasa jego modeli spełniająca wymienione warunki. Pojęcie to obejmuje pojęcie poprzednie jako warunek graniczny. Gdy M^* jest klasą jednostkową, otrzymujemy język zinterpretowany w sposób jednoznaczny. Problem zdefiniowania dla języków o interpretacji wieloznacznej «absolutnych» pojęć semantycznych, w szczególności «absolutnego» pojęcia prawdy, natrafia na pewne trudności i do dziś pozostaje problemem otwartym. Wysuwano i dyskutowano różne propozycje jego rozwiązania[2]. Jakkolwiek różnią się one między sobą poza tym, wspólne jest im wszystkim następujące założenie:

Jeśli zdanie α jest prawdziwe w każdym modelu klasy M^*, zdanie to jest prawdziwe; jeśli zdanie α jest fałszywe w każdym modelu klasy M^*, zdanie to jest fałszywe.

Różnice pomiędzy poszczególnymi rozwiązaniami dotyczą wyłącznie kwalifikacji tzw. zdań niezdeterminowanych, tj. zdań, które w pewnych modelach klasy M^* są prawdziwe, a w innych — fałszywe. W rozważaniach naszych nie ma potrzeby przesądzania tej spornej kwestii.

2. Spróbujmy obecnie scharakteryzować w sposób najogólniejszy interpretację dowolnego języka empirycznego. Co możemy założyć o własnościach klasy M^* i o sposobach jej wyznaczania? Wyróżnimy na wstępie dwa główne sposoby interpretowania języka sformalizowanego: werbalny i niewerbalny. Werbalna interpretacja języka L polega na scharakteryzowaniu klasy jego modeli właściwych M^* jako klasy modeli określonego zbioru zdań języka L, tj. jako klasy modeli, w których wszystkie zdania tego zbioru są prawdziwe. Ów zbiór zdań, oznaczany odtąd przez P, nazywać będziemy, zgodnie z przyjętą terminologią, zbiorem postulatów dla języka L (lub dla jego terminów). Werbalna interpretacja języka L sprowadza się do definicji:

$$M^* = M(P)$$

utożsamiającej klasę M^* z pewną klasą definiowalną w języku L. Wszelki inny sposób wyznaczania klasy M^* zaliczymy do sposobów niewerbalnych. Otóż stwierdźmy przede wszystkim, co następuje: jeśli język L ma być językiem empirycznym, jego interpretacja nie może być interpretacją czysto werbalną. Jest to fakt dość oczywisty i niejednokrotnie stwierdzany. Toteż nie uzasadniając go już tutaj szerzej (uczyniłem to m.in. w cytowanej wyżej monografii), ograniczę się do paru luźnych uwag. Jakikolwiek niesprzeczny zbiór języka L obierzemy jako zbiór postulatów P, klasa jego modeli

2) Omawiam je m.in. w pracy „Z semantyki pojęć otwartych", *Studia Logica* 15, 1964.

$M(P)$ będzie klasą tak obszerną i zawierać będzie modele tak różnorodne, iż nie może być uznana za interpretację języka empirycznego. Wśród jej modeli znajdą się zawsze modele takie, których uniwersum składa się z liczb naturalnych, i takie, których uniwersum składa się z wyrażeń językowych! Toteż język, którego klasa modeli właściwych obejmuje wszystkie modele klasy $M(P)$, nie może mieć charakteru empirycznego, jakkolwiek szeroko pojmowalibyśmy to określenie. Świadczy o tym choćby to, że w języku tak zinterpretowanym wszelki termin pozalogiczny pozostaje terminem całkowicie nieostrym.

Przyjmujemy zatem, iż interpretacja naszego języka L nie jest interpretacją czysto werbalną. Klasa jego modeli właściwych M^* nie jest tożsama z żadną klasą definiowalną w języku L. W jaki więc sposób zostaje wyznaczona? Jakie niewerbalne metody wchodzą tu w grę? Założenie, jakie w tej sprawie przyjmiemy, uważane być może za wyraz semantycznego empiryzmu. Zgodnie z nim, dwa istnieją tylko sposoby przyporządkowania terminom empirycznym ich denotacji: jeden — bezpośredni, sprowadzający się w rezultacie do wskazania, w ten czy inny sposób, przedmiotów, które do denotacji danego terminu mają należeć (zabieg taki nazywany bywa definicją ostensywną terminu interpretowanego); drugi — pośredni, polegający na scharakteryzowaniu denotacji danego terminu za pomocą postulatów językowych odwołujących się do terminów empirycznych już zinterpretowanych (w pewnych przypadkach postulaty te przybierają postać definicji równoważnościowej). Bezpośredni sposób interpretacji ma zastosowanie tylko w stosunku do tzw. terminów obserwacyjnych, czyli, mówiąc swobodnie, terminów denotujących obserwowalne własności przedmiotów (lub obserwowalne stosunki między takimi przedmiotami). Wszelkie inne terminy empiryczne, zaliczane do tzw. terminów teoretycznych, interpretowane być mogą jedynie w sposób pośredni. Tak więc, zgodnie z powyższymi założeniami, klasę modeli właściwych M^* języka empirycznego L pojmować będziemy zawsze jako pewną niepustą podklasę właściwą klasy wszystkich modeli zbioru postulatów P, $M(P)$:

$$\emptyset \neq M^* \subset M(P)$$

wyodrębnioną z tej ostatniej za pomocą bezpośrednich procedur interpretacyjnych o charakterze definicji ostensywnych pewnych terminów języka L. Zbiór P reprezentuje tu zbiór wszystkich postulatów dla terminów języka L. Prócz nich — i ich logicznych konsekwencji $Cn(P)$ — nie ma innych zdań języka L, których prawdziwość w modelach klasy M^* byłaby zagwarantowana przez sam sposób wyznaczenia tej klasy.

Bezpośredni sposób interpretacji terminów empirycznych jest procedurą, której analiza wymyka się metodom formalno-logicznym[3]. Dalsze rozważania poświęcimy analizie interpretacji pośredniej. Przedmiotem tych rozważań będzie procedura wzbogacania języka empirycznego o nowe terminy teoretyczne, a więc terminy dopuszczające wyłącznie interpretację pośrednią. A idzie nam o to, jak zdać sprawę — przy

3) Problem ten rozważałem m.in. w pracy „O definiowaniu terminów spostrzeżeniowych", *Rozprawy Logiczne*, 1964.

założeniu określonej interpretacji języka wyjściowego — z interpretacji języka wzbogaconego. Na to pytanie, jak zobaczymy, nasuwają się odpowiedzi różne — zależne od typu sytuacji, w której owo wzbogacenie ma miejsce. Aby odpowiedzi te sformułować w sposób precyzyjny, musimy wprowadzić pewne formalne pojęcia i symboliczne oznaczenia.

3. Niech naszym wyjściowym językiem empirycznym będzie język L_1 zawierający jako jedyne terminy pozalogiczne predykaty $r_1, ..., r_n$. Język ten wzbogacamy o nowe predykaty $q_1, ..., q_m$ przechodząc tym sposobem do języka L_2, zawierającego L_1 jako swoją część. Przyjmiemy tu konwencję, zgodnie z którą wszelkie synktatyczne i semantyczne pojęcia dotyczące języka L_i (i=1, 2) zaopatrzone będą we wskaźnik i. W szczególności, modele języka L_1, czyli układy $\langle U; R_1, ..., R_n \rangle$, symbolizować będziemy przez $\mathfrak{M}_1$, a modele języka L_2, czyli układy $\langle U; R_1, ..., R_n, Q_1, ..., Q_m \rangle$ — przez $\mathfrak{M}_2$. Symbol $\mathfrak{M}_2 |_1$ oznaczać będzie fragment modelu $\mathfrak{M}_2$ odpowiadający językowi L_1, tj. model języka L_1 otrzymany z $\mathfrak{M}_2$ przez eliminację denotacji predykatów $q_1, ..., q_m$. Zakładamy, iż P_1 jest zbiorem postulatów dla predykatów $r_1, ..., r_n$ języka L_1, a P_2 — zbiorem postulatów dla nowo wprowadzonych predykatów $q_1, ..., q_m$ języka L_2. Zgodnie z tym, co ustaliliśmy wyżej, przyjmujemy, że język L_1 jest językiem zinterpretowanym, a klasa modeli M_1^* wyznaczająca tę interpretację, stanowi niepustą podklasę właściwą klasy modeli $M(P_1)$, wyodrębnioną z niej przez bezpośrednie zabiegi interpretacyjne:

$$\emptyset \neq M_1^* \subset M(P_1).$$

A jak zdać sprawę z interpretacji języka L_2? Jak scharakteryzować klasę M_2^* jego modeli właściwych? Odpowiedź na to pytanie zależy od pewnych czynników pragmatycznych, w szczególności od intencji użytkowników języka L_2 decydujących o charakterze jego interpretacji. W rozważaniach obecnych weźmiemy pod uwagę takie tylko — niewątpliwie najczęstsze — sytuacje, w których owo wzbogacenie języka L_1 ma mieć, zgodnie z intencjami jego użytkowników, charakter «konserwatywny», zachowujący jego interpretację dotychczasową. W sytuacjach tych język L_2 ma być, z założenia, interpretowany tak, aby, po pierwsze, wszystkie terminy należące do języka L_1, a więc predykaty $r_1, ..., r_n$, zachowały swą interpretację dotychczasową, wyznaczoną przez klasę M_1^*; po drugie, wszystkie terminy wprowadzane, a więc predykaty $q_1, ..., q_m$, były interpretowane zgodnie z postulatami P_2, tj. w taki sposób, aby postulaty te były prawdziwe. Wszelka definicja klasy M_2^*, wyznaczającej interpretację języka L_2, musi respektować te żądania. Warunek drugi dopuszcza, jak się wydaje, jeden tylko sposób precyzacji. Żąda po prostu tego, aby każdy model $\mathfrak{M}_2$, należący do klasy M_2^* był modelem zbioru postulatów $P_2 : \mathfrak{M}_2 \in M(P_2)$. Warunek pierwszy natomiast dopuszcza eksplikacje różne. Owo zachowanie przez terminy języka L_1 ich interpretacji dotychczasowej może być rozumiane w sposób bardziej lub mniej rygorystyczny, i wydaje się, że w różnych sytuacjach faktycznych różnie też bywa rozumiane. Aby uchwycić te różnice, musimy odwołać się do pewnych pojęć teorii modeli — pojęć, które w zastosowaniach tej teorii do semantyki języków empirycznych zdają się odgrywać szczególnie ważną rolę. Mam na myśli takie pojęcia teorio–modelowe, jak pojęcie rozszerzenia i elementarnego rozszerzenia modeli. Wyjaśnimy ich sens w zastosowaniu do omawianego przez nas języka L.

Niech $\mathfrak{M} = \langle U; R_1, ..., R_n \rangle$ i $\mathfrak{M}' = \langle U'; R'_1, ..., R'_n \rangle$ będą dwoma modelami języka L.

$\mathfrak{M}'$ jest rozszerzeniem $\mathfrak{M}$, w skrócie $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{M}'$, wtedy gdy (i) $U \subset U'$, oraz (ii) $R'_i|_U = R_i$ $(i = 1, ..., n)$; a więc gdy uniwersum modelu $\mathfrak{M}'$ zawiera w sobie uniwersum modelu $\mathfrak{M}$, a relacje modelu $\mathfrak{M}'$ ograniczone do uniwersum modelu $\mathfrak{M}$ pokrywają się z odpowiadającymi im relacjami modelu $\mathfrak{M}$.

$\mathfrak{M}'$ jest elementarnym rozszerzeniem $\mathfrak{M}$, w skrócie $\mathfrak{M} < \mathfrak{M}'$, wtedy, gdy (i) $\mathfrak{M}'$ jest rozszerzeniem $\mathfrak{M}$ oraz (ii) dla dowolnej formuły $\alpha\,(x_1, ..., x_k)$ języka L i dla dowolnego ciągu $\langle a_1, ..., a_k \rangle$ elementów uniwersum modelu $\mathfrak{M}$: formuła $\alpha\,(x_1, ..., x_k)$ jest spełniona przez ciąg $\langle a_1, ..., a_k \rangle$ w modelu $\mathfrak{M}'$ wtedy i tylko wtedy, gdy formuła $\alpha\,(x_1, ..., x_k)$ jest spełniona przez ciąg $\langle a_1, ..., a_k \rangle$ w modelu $\mathfrak{M}$.

Zwróćmy uwagę na pewne konsekwencje tych definicji. Jeśli $\mathfrak{M}'$ jest zwykłym lub elementarnym rozszerzeniem $\mathfrak{M}$, uniwersum modelu $\mathfrak{M}'$ może zawierać elementy nowe, nie należące do uniwersum modelu $\mathfrak{M}$. W obu przypadkach interpretacja predykatów $r_1, ..., r_n$ w dawnej części uniwersum modelu $\mathfrak{M}'$, tj. w zbiorze U, musi być identyczna z ich interpretacją w modelu $\mathfrak{M}$. A jak się przedstawia ich interpretacja w nowej części uniwersum modelu $\mathfrak{M}'$, tj. w zbiorze $U'–U$? Gdy $\mathfrak{M}'$ jest zwykłym rozszerzeniem $\mathfrak{M}$, interpretacja ta może być najzupełniej dowolna. Gdy natomiast $\mathfrak{M}'$ jest elementarnym rozszerzeniem $\mathfrak{M}$, interpretacja ta spełniać musi warunek (ii). Jaki jest jego sens intuicyjny? Zauważmy, iż pociąga in warunek tzw. elementarnej równoważności modeli $\mathfrak{M}'$ i $\mathfrak{M}$:

$$Ver\,(\mathfrak{M}') = Ver\,(\mathfrak{M}).$$

Każde zdanie języka L prawdziwe w modelu $\mathfrak{M}'$ musi być prawdziwe w modelu $\mathfrak{M}$, i na odwrót. A zatem predykaty $r_1, ..., r_n$ muszą być w modelu $\mathfrak{M}'$ zinterpretowane w taki sposób, który by nie zmieniał wartości logicznej żadnego zdania języka L zawierającego owe predykaty. Cokolwiek (wyrażalnego w języku L) było o nich prawdą w modelu $\mathfrak{M}$, musi pozostać prawdę w modelu $\mathfrak{M}'$. W rzeczywistości ów związek między interpretacją predykatów $r_1, ..., r_n$ w modelu $\mathfrak{M}$ i $\mathfrak{M}'$ jest jeszcze ściślejszy. Warto może zwrócić uwagę na fakt, iż w przypadku modelu $\mathfrak{M}$ o uniwersum skończonym, każde elementarne rozszerzenie modelu $\mathfrak{M}$ musi być z nim identyczne.

Wprowadzone obecnie pojęcia pozwalają na eksplikację warunku postulującego zachowanie dotychczasowej interpretacji języka L_1 przy przejściu do języka L_2. Przy ich pomocy wyróżnić możemy co najmniej trzy wersje tego warunku, formułujące żądania coraz to mniej rygorystyczne. Interpretacja języka L_1 wyznaczona jest, jak pamiętamy, przez klasę modeli M_1^*, interpretacja języka L_2 — przez klasę modeli M_2^*. Otóż żądać możemy, aby fragment dowolnego modelu $\mathfrak{M}_2 \in M_2^*$ odpowiadający językowi L_1 był identyczny z pewnym modelem $\mathfrak{M}_1 \in M_1^*$: $\mathfrak{M}_1 = \mathfrak{M}_2|_1$; był jego elementarnym rozszerzeniem: $\mathfrak{M}_1 < \mathfrak{M}_2|_1$; a wreszcie, był jego rozszerzeniem zwykłym: $\mathfrak{M}_1 \subset \mathfrak{M}_2|_1$. Każdej z tych możliwości odpowiada inna definicja klasy M_2^*. Podamy naprzód ich zapis formalny[4], a następnie rozważymy sens intuicyjny.

D1. $M_2^* = \{\mathfrak{M}_2 : \mathfrak{M}_2 \in M(P_2)$ i $\mathfrak{M}_1 = \mathfrak{M}_2|_1$, dla pewnego $\mathfrak{M}_1 \in M_1^*\}$.

D2. $M_2^* = \{\mathfrak{M}_2 : \mathfrak{M}_2 \in M(P_2)$ i $\mathfrak{M}_1 < \mathfrak{M}_2|_1$, dla pewnego $\mathfrak{M}_1 \in M_1^*\}$.

D3. $M_2^* = \{\mathfrak{M}_2 : \mathfrak{M}_2 \in M(P_2)$ i $\mathfrak{M}_1 \subset \mathfrak{M}_2|_1$, dla pewnego $\mathfrak{M}_1 \in M_1^*\}$.

Każda z tych definicji zalicza, jak widać, do klasy M_2^*, determinującej interpretację języka L_2, tylko takie modele języka L_2, które są modelami zbioru postulatów P_2. Tym samym każda z tych definicji realizuje żądanie interpretowania nowo wprowadzonych predykatów $q_1, ..., q_m$ w sposób zgodny z postulatami P_2. Czy można również przyjąć, że każda z podanych definicji realizuje żądanie interpretowania dawnych predykatów $r_1, ..., r_n$ w sposób zgodny z ich interpretacją dotychczasową, daną przez klasę M_1^*? Niewątpliwie, każda z nich w jakimś stopniu czyni temu żądaniu zadość. Zgodnie z każdą z tych definicji, uniwersum dowolnego modelu $\mathfrak{M}_2$ klasy M_2^* obejmuje uniwersum pewnego modelu $\mathfrak{M}_1$ klasy M_1^*. Zgodnie z każdą z nich, dawne predykaty $r_1, ..., r_n$ interpretowane są w modelu $\mathfrak{M}_2$ w obrębie dawnej części jego uniwersum (tj. w uniwersum modelu $\mathfrak{M}_1$) dokładnie tak samo, jak w modelu $\mathfrak{M}_1$, W tym też sensie każda z tych definicji zachowuje dotychczasową interpretację terminów języka L_1. A jakie zachodzą między nimi różnice? Definicja D1 zachowuje tę interpretację w sensie możliwie najściślejszym. Ponieważ wedle niej uniwersum każdego modelu $\mathfrak{M}_2$ klasy M_2^* pokrywa się dokładnie z uniwersum pewnego modelu $\mathfrak{M}_1$ klasy M_1^*, interpretacja predykatów $r_1, ..., r_n$ w modelu $\mathfrak{M}_2$ jest po prostu identyczna z ich interpretacją w modelu $\mathfrak{M}_1$; predykaty te w obu modelach denotują te same relacje. Wedle definicji pozostałych, uniwersa modeli klasy M_2^* mogą zawierać przedmioty nie wchodzące w skład żadnego z uniwersów modeli klasy M_1^*. Interpretacje predykatów języka L_1 w modelach klasy M_2^* mogą więc różnić się od interpretacji w modelach klasy M_1^*; do denotacji tych predykatów w jakimś modelu klasy M_2^* należeć mogą przedmioty z nowej części jego uniwersum, a więc przedmioty, które nie należały do ich denotacji w żadnym modelu klasy M_1^*. Definicja D2 nakłada jednak na takie zmiany interpretacji daleko idące ograniczenia. Żądając, aby fragment każdego modelu $\mathfrak{M}_2$ klasy M_2^* odpowiadający językowi L_1 był elementarnym rozszerzeniem pewnego modelu $\mathfrak{M}_1$ klasy M_1^*, żąda tym samym, jak widzieliśmy, aby były to zmiany niewyrażalne w języku L_1 (a nawet w pewnych wzbogaceniach tego języka), aby więc owo rozszerzenie interpretacji języka L_1 było dla użytkowników tego języka w pewnym sensie niezauważalne. Definicja D3 tego rodzaju ograniczeń nie nakłada. Interpretacja języka L_1 może tu ulegać dowolnym rozszerzeniom (byle by zgodnym z postulatami P_2).

4) Skrót $\{x: W(x)\}$ symbolizuje zbiór x-ów spełniających warunek W.

Pierwotna interpretacja języka L_1 jest jednak charakteryzowana i przez to, że jest to interpretacja zgodna z postulatami P_1: każdy model klasy M_1^* — to model zbioru postulatów P_1. Czy ta jej własność zostaje zachowana przy przejściu do języka L_2? Zachodzi pod tym względem wyraźna różnica między definicją D3 a definicjami pozostałymi. Jeśli klasa M_2^* określona jest zgodnie z definicją D1 lub D2, każdy należący do niej model musi być modelem zbioru postulatów P_1, skoro jego fragment odpowiadający językowi L_1 jest identyczny z jakimś modelem klasy M_1^*, lub jest jego elementarnym rozszerzeniem. Inaczej jest jednak w przypadku definicji D3. Fakt, iż fragment modelu $\mathfrak{M}_2$ klasy M_2^* odpowiadający językowi L_1 jest rozszerzeniem jakiegoś modelu $\mathfrak{M}_1$ klasy M_1^*, gwarantuje prawdziwość w modelu $\mathfrak{M}_2$ tylko tym zdaniom prawdziwym w modelu $\mathfrak{M}_1$, które są zdaniami czysto egzystencjalnymi (tj. zdaniami równoważnymi logicznie takim zdaniom o postaci normalnej, które nie zawierają kwantyfikatorów ogólnych). Mogą więc istnieć wśród postulatów P_1 zdania takie, które okażą się zdaniami fałszywymi w modelach klasy M_2^*. I tutaj jednak zachodzi fakt zachowania postulatów P_1 w pewnej ograniczonej postaci. Załóżmy, iż w języku L_2 istnieje jednoargumentowy predyktat q_1, który w każdym modelu $\mathfrak{M}_2$ klasy M_2^* denotuje dawne uniwersum, tj. uniwersum tego modelu $\mathfrak{M}_1$ klasy M_1^*, którego rozszerzeniem jest model $\mathfrak{M}_2$. Dokonajmy w każdym zdaniu zbioru P_1 relatywizacji wszystkich zmiennych związanych do predykatu q_1. (Operacja ta polega na zastąpieniu kwantyfikatorów zwykłych przez odpowiednie kwantyfikatory ograniczone do predykatu q_1). Zbiór tak przekształconych postulatów oznaczmy przez P_1 (q_1). Otóż definicja D3 klasy M_2^* gwarantuje nam, że każdy model tej klasy jest modelem zbioru zdań P_1 (q_1). W każdym z nich zachowują więc prawdziwość postulaty P_1 ograniczone do dawnego uniwersum.

4. Rozważyliśmy trzy możliwe typy interpretacji języka L_2. Powstaje oczywiście pytanie, czy możliwości te odpowiadają pewnym sytuacjom faktycznym, w szczególności sytuacjom typowym dla rozwoju nauk empirycznych. Jest rzeczą jasną, że zarysowane tu schematy stanowić mogą co najwyżej daleko idące uproszczenie i idealizację jakiegokolwiek faktycznego stanu rzeczy. Z tym jednakże zastrzeżeniem można, jak sądzę, na pytanie to odpowiedzieć twierdząco. Chciałbym wysunąć tu przypuszczenie, iż każdy z opisanych wyżej rodzajów interpretacji odpowiada pewnym charakterystycznym dla nauk empirycznych procedurom wzbogacania języka empirycznego o nowe terminy teoretyczne. Uzasadnienie tego przypuszczenia jest zadaniem odrębnym. Tutaj chcę w paru tylko słowach zaznaczyć, o jakie to sytuacje może chodzić.

Sytuacja odpowiadająca definicji D1 — sytuacja, w której wzbogacając dany język empiryczny zachowujemy jego interpretację, a w szczególności jego uniwersum, niezmienione — to sytuacja bodaj najczęstsza. Taki w szczególności charakter wydają się mieć wszelkie rozszerzenia definicyjne. Wprowadzając do języka L_1 nowy termin za pomocą definicji równoważnościowej, nie mamy potrzeby zmieniania jego dotychczasowej interpretacji, bo mamy w tym przypadku gwarancję, że przy interpretacji istniejącej znajdziemy zawsze żądaną (tj. zgodną z ową definicją) interpretację dla terminu wprowadzanego.

Gwarancji takiej możemy nie mieć jednak wtedy, gdy postulaty dla terminu wprowadzanego przybierają postać różną od definicji równoważnościowej. Wówczas okazać się może, że do tego, aby znaleźć zgodną z tymi postulatami interpretację dla terminu wprowadzanego, musimy rozszerzyć nasze dotychczasowe uniwersum. W pewnych przypadkach — odpowiadających definicji D2 — może to być rozszerzenie elementarne. Jest to możliwe wtedy, gdy uniwersum nasze rozszerzamy o przedmioty tego samego typu, co przedmioty już do niego należące, tj. o przedmioty, które mają te same własności (wyrażalne w dawnym języku L_1), co przedmioty dotychczasowe. Takie rozszerzenie nie zmienia, jak widzieliśmy, istniejącej interpretacji języka L_1 w sposób widoczny. Dla kogoś, kto nie wykracza poza ów język, zmiana taka pozostaje niedostrzegalna.

Istnieją jednak i sytuacje takie, kiedy wzbogacając nasz język świadomie zmieniamy jego dotychczasową interpretację, a zwłaszcza jego dotychczasowe uniwersum, w sposób widoczny. Ma to miejsce wtedy, gdy wprowadzamy terminy odnoszące się do przedmiotów zasadniczo różnych od tych, które składały się na uniwersum dawne. Tak jest na przykład wtedy, gdy do języka obserwacyjnego, którego uniwersum składa się wyłącznie z przedmiotów obserwowalnych, wprowadzamy terminy teoretyczne odnoszące się do przedmiotów zasadniczo nieobserwowalnych. Jest rzeczą jasną, że takie rozszerzenie dotychczasowego uniwersum nie może zostać niezauważone. Nowe przedmioty mają z reguły inne własności, niż przedmioty dawne — i to własności wyrażalne w dawnym języku L_1. Nie wszystko więc, co było prawdą przy poprzedniej interpretacji języka L_1, pozostanie prawdą przy przy obecnej. Dotyczy to również postulatów P_1; pozostaną one prawdziwe tylko wtedy, gdy ograniczymy je do dawnego uniwersum. Zilustrujmy to na najprostszym przykładzie. Przypuśćmy, iż jeden z postulatów języka obserwacyjnego głosi, że „każdy przedmiot jest barwny". Postulat ten, prawdziwy w modelach o uniwersum złożonym z przedmiotów spostrzegalnych, przestaje być prawdziwy, gdy uniwersum to rozszerzymy o przedmioty zasadniczo niespostrzegalne (takie, jak atomy czy elektrony). Prawdą w takich modelach pozostaje natomiast nadal ów postulat ograniczony do uniwersum dawnego, a więc twierdzenie głoszące, iż „każdy przedmiot spostrzegalny jest barwny". Rozszerzenie, które w takich przypadkach wchodzi w grę, nie może być więc rozszerzeniem elementarnym. Są to sytuacje, które zdają się podpadać pod schemat odpowiadający definicji D3[5].

5) Ten rodzaj rozszerzenia języka i jego interpretacji wyróżniony został przez R. Suszkę w pracy „Logika formalna a rozwój poznania", *Studia Filozoficzne* 1 (44), 1966. W pracy tej sformułowana też została zasada zachowania postulatów w postaci ograniczonej.

II

1. To, czy podane przez nas definicje klasy modeli właściwych języka L_2 — D1, D2, D3 — charakteryzują interpretację języka empirycznego w sposób trafny, zgodny z rodzajami interpretacji, które faktycznie takiemu językowi przysługują — zależy m.in. od tego, jakim zbiorem jest zbiór P_2, reprezentujący ogół postulatów dla terminów nowo wprowadzonych. Jeśli definicje te mają charakteryzować interpretację języka L_2 w sposób właściwy, nie może to być zbiór dowolny. Spróbujmy sformułować warunki, jakie każda z tych definicji nakłada na zbiór P_2. Problem ten — w zastosowaniu do pewnych spośród owych definicji — rozważany był już niejednokrotnie. Ograniczę się więc tym razem do uwag ogólnych i skrótowych, prezentujących niektóre uzyskane uprzednio rezultaty.

Taka, czy inna odpowiedź na powyższe pytanie zależy od pewnych ogólnych założeń dotyczących semantycznych własności języka empirycznego. I my przyjmiemy tu takie założenia. Zakładamy mianowicie, że język empiryczny — język pewnej nauki czy teorii empirycznej — jest zawsze językiem zinterpretowanym, i że fakt ten jest niezależny od doświadczenia. Odpowiada to tendencji — dominującej w semantyce współczesnej — do uniezależniania sprawy sensowności wyrażeń językowych od rezultatów doświadczenia. Doświadczenie decydować ma o prawdziwości, czy fałszywości twierdzenia empirycznego, a nie o jego sensowności; ta ma być zagwarantowana z góry, przez samą konstrukcję danego języka empirycznego.

Język zinterpretowany utożsamiliśmy uprzednio z parą $\langle L, M^* \rangle$, w której L — to język sformalizowany, a M^* — to niepusta podklasa właściwa klasy jego modeli. Dany język uznać więc możemy za zinterpretowany tylko pod tym warunkiem, iż klasa jego modeli właściwych jest niepusta. Co więcej, zgodnie z przyjętym przed chwilą założeniem, jej niepustość ma być faktem zagwarantowanym z góry. Tak też potraktować musimy analizowany przez nas język L_2. Stwierdzenie niepustości klasy jego modeli właściwych:

$$M_2^* \neq \emptyset$$

ma być prawdą, i to prawdą niezależną od doświadczenia. Kiedy warunek taki uważać możemy za spełniony? Rozważmy go w zastosowaniu do którejś z podanych przez nas definicji klasy M_2^*, np. definicji D1. Twierdzenie, iż klasa M_2^* jest niepusta, równoważne jest na gruncie tej definicji twierdzeniu głoszącemu, co następuje:

(*) Dla pewnego modelu $\mathfrak{M}_1 \in M_1^*$ istnieje model $\mathfrak{M}_2 \in M(P_2)$ taki, iż $\mathfrak{M}_1 = \mathfrak{M}_2 |_1$.
Kiedy twierdzeniu temu przypisać możemy prawdziwość niezależną od doświadczenia? Sądzę, że wtedy tylko, gdy prawdą jest następujące twierdzenie ogólne:
C1. Dla każdego modelu $\mathfrak{M}_1 \in M(P_1)$ istnieje model $\mathfrak{M}_2 \in M(P_2)$ taki, iż $\mathfrak{M}_1 = \mathfrak{M}_2 |_1$.
Zważmy, iż o klasie modeli właściwych języka L_1 założyliśmy, co następuje:

$$\emptyset \neq M_1^* \subset M(P_1).$$

W świetle tego założenia prawdziwość twierdzenia C1 gwarantuje prawdziwość twierdzenia (*), sama zaś jest najwyraźniej od doświadczenia niezależna. Twierdzenie C1 formułuje pewną zależność teorio–modelową i — dla danych zbiorów P_1 i P_2 — na gruncie samej teorii modeli może być rozstrzygnięte. Z drugiej strony, tylko wtedy, gdy prawdą jest twierdzenie C1, prawdziwość twierdzenia (*) może być zagwarantowana z góry. Klasa M_1^* została, jak wiemy, wyodrębniona z klasy $M(P_1)$ za pomocą bezpośrednich procedur interpretacyjnych typu definicji ostensywnej. Jedyną, z góry założoną własnością jej modeli jest to, iż są to modele postulatów P1. Jeżeli więc chcemy z góry mieć pewność, że wśród modeli klasy M_1^* istnieje model taki, który jest fragmentem pewnego modelu postulatów P_2, musimy z góry wiedzieć, że każdy model klasy $M(P_1)$ spełnia taki warunek. A to właśnie głosi twierdzenie C1[6].

Twierdzenie to traktować możemy jako pewien warunek nałożony na zbiór postulatów P_2. Taki tylko zbiór P_2 może być uznany za zbiór postulatów dla predyktatów q_1, ..., q_m języka L_2, który spełnia — dla danego P_1 — warunek sformułowany w tym twierdzeniu. W analogiczny sposób wyrazić możemy warunki nakładane na zbiór postulatów P_2 w przypadku pozostałych definicji klasy M_2^*, tj. definicji D2 i D3. Podobnie jak poprzednio, ich realizacja gwarantuje niepustość klasy M_2^*. A oto kolejne warunki odpowiadające definicjom D1, D2, D3:

C1. Dla każdego modelu $\mathfrak{M}_1 \in M(P_1)$ istnieje model $\mathfrak{M}_2 \in M(P_2)$ taki, że $\mathfrak{M}_1 = \mathfrak{M}_2 |_1$.
C2. Dla każdego modelu $\mathfrak{M}_1 \in M(P_1)$ istnieje model $\mathfrak{M}_2 \in M(P_2)$ taki, że $\mathfrak{M}_1 < \mathfrak{M}_2 |_1$.
C3. Dla każdego modelu $\mathfrak{M}_1 \in M(P_1)$ istnieje model $\mathfrak{M}_2 \in M(P_2)$ taki, że $\mathfrak{M}_1 \subset \mathfrak{M}_2 |_1$.

Sformułowane jak wyżej, warunki te mają najwyraźniej charakter semantyczny. Powstaje zatem pytanie, czy — podobnie jak w przypadku wielu innych pojęć semantycznych — można znaleźć ich odpowiedniki syntaktyczne. Okazuje się, że zachodzi pod tym względem istotna różnica między warunkiem C1 a warunkami pozostałymi. W przeciwieństwie do warunku C1, warunki C2 i C3 dają się sformułować w sposób czysto syntaktyczny. I tak, warunek C2 jest równoważny warunkowi:

C2′. $Cn(P_2) \cap Z_1 \subset Cn(P_1)$,

gdzie Z_1 symbolizuje zbiór zdań języka L_1. Warunek C3 natomiast jest równoważny warunkowi:

C3′. $Cn(P_2) \cap A_1 \subset Cn(P_1)$,

gdzie A_1 symbolizuje zbiór czysto uniwersalnych zdań języka L_1 (tj. zdań języka L_1 równoważnych logicznie takim zdaniom o postaci normalnej, które nie zawierają kwantyfikatorów szczegółowych)[7]. Warunki C2′ i C3′ mają, jak widać, charakter czysto

6) Wywód ten ma charakter szkicowy i intuicyjny. Można by go przedstawić w sposób pełny i precyzyjny za cenę pewnej rozbudowy naszych rozważań. Trzeba by było mianowicie w tym celu scharakteryzować dokładnie metajęzyk opisywanego przez nas języka L_2, co pozwoliłoby na eksplikację owego zagadkowego nieco pojęcia „prawdziwości niezależnej od doświadczenia". Twierdzenie prawdziwe niezależnie od doświadczenia — to, z grubsza mówiąc, takie, które daje się udowodnić na gruncie metajęzyka. Bez trudu można by wówczas okazać, iż twierdzenie (*) wtedy tylko daje się udowodnić na gruncie metajęzyka, gdy daje się udowodnić twierdzenie C1.

7) Równoważność warunków C2 i C2′ stwierdzona jest m.in. w książce J. Shoenfielda *Mathematical Logic*, 1967; jej dowód nie nastręcza trudności. Równoważność warunków C3 i C3′ okazana została po raz pierwszy w pracy J. Łosia „On the extending of models I", *Fundamenta Mathematicae* 42, 1955.

syntaktyczny. Pierwszy z nich żąda, aby wszystkie konsekwencje logiczne postulatów P_2 należące do języka L_1 wynikały z postulatów P_1; drugi żąda tego samego od tych tylko konsekwencji logicznych postulatów P_2, które są zdaniami czysto uniwersalnymi języka L_1.

Warunek C1 nie ma, jak wspominałem, odpowiednika czysto syntaktycznego; ściślej — nie ma takiego odpowiednika odnoszącego się do języka L_2. Nie jest nim w szczególności warunek C2′ — standardowy warunek nietwórczości zbioru P_2 ze względu na zbiór P_1. C1 pociąga C2′, lecz nie na odwrót. Można okazać, iż istnieją takie zbiory zdać P_1 i P_2, które spełniają warunek C2′, a nie spełniają warunku C1[8]. Jest to fakt ważny i ciekawy. Jeśli zbiór P_2 jest nietwórczy ze względu na zbiór P_1, nie nakłada on na interpretację terminów języka L_1 żadnych innych warunków wyrażalnych w języku L_1, prócz tych, które nakłada zbiór P_1. Okazuje się jednak, że może on nakładać na interpretację tych terminów pewne warunki różne od P_1 niewyrażalne w języku L_1! Stąd też istnieć mogą w takiej sytuacji modele zbioru P_1, które nie są fragmentami żadnego z modeli zbioru P_2. Warunek C2′ pociąga warunek C1 jedynie w pewnych przypadkach szczególnych. Oto niektóre z nich:

1. C2′ implikuje C1, gdy P_2 jest zbiorem zdań czysto uniwersalnych.[9]
2. C2′ implikuje C1 wtedy, gdy każdy model zbioru P_1 jest modelem o uniwersum skończonym (a więc wtedy, gdy konsekwencją P_1 jest twierdzenie o istnieniu co najwyżej n przedmiotów).

W przypadkach, w których realizacja warunku nietwórczości nie gwarantuje realizacji warunku C1, użytkownik języka L_2 nie dysponuje żadnym dostępnym sobie kryterium pozwalającym stwierdzić, czy warunek C1 został spełniony. Nie może tego rozstrzygnąć pozostając «wewnątrz» swego języka; aby to uczynić, musi wyjść poza jego granice. Stąd — znaczenie przywiązywane do istnienia kryteriów synktatycznych dla warunków takich, jak rozważane obecnie, i problematyczna nieco przydatność w praktyce naukowej warunków, które kryteriów takich nie posiadają.

2. Analiza semantyczna danego języka empirycznego zakłada konieczność określenia zbioru postulatów dla jego terminów pozalogicznych. Analizując język L_2, wyróżnić musimy w szczególności zbiór postulatów P_2 dla nowo wprowadzonych predykatów $q_1, ..., q_m$. W jaki sposób możemy to uczynić? W skład procedury wzbogacania danego języka empirycznego o nowe terminy teoretyczne wchodzi zawsze akt uznania przez użytkowników tego języka określonego zbioru zdań charakteryzujących terminy wprowadzane. Czy ów zbiór zdań może być uznany za zbiór językowych postulatów? Załóżmy, iż zbiorem zdań uznanych w procedurze wzbogacania języka L_1 o predykaty $q_1, ..., q_m$ jest zbiór T_2. Czy zbiór ten może być utożsamiony ze zbiorem P_2 — postulatów wyznaczających w przedstawiony wyżej sposób klasę modeli właściwych języka L_2? Zbiór P_2, jak widzieliśmy, nie może być zbiorem dowolnym. Jeśli

8) Por. m.in. J. Shoenfield, wyd. cyt.

9) Por. J. Łoś, wyd. cyt.

interpretacja języka L_2 ma być zgodna z przyjętymi założeniami semantycznymi, zbiór P_2 musi spełniać określone warunki. Musi to być, mówiąc najogólniej, zbiór w pewnym sensie nietwórczy (ze względu na zbiór P_1). W zależności od tego, jak określamy klasę M_2^* modeli właściwych języka L_2 — zgodnie z definicją D1, D2, czy D3, ów warunek nietwórczości przybiera odpowiednio sprecyzowaną postać — C1, C2, lub C3. Otóż nie jest bynajmniej rzeczą wykluczoną, że zbiór T_2 zdań faktycznie uznanych warunku takiego nie spełnia. Sądzę, że jest to sytuacja nie tylko możliwa, lecz często w rzeczywistej praktyce naukowej spotykana. Nie uzasadniając tutaj tego przypuszczenia, chcę zwrócić jedynie uwagę na fakt, że w naukach empirycznych terminy teoretyczne bywają nierzadko charakteryzowane przez ogół aksjomatów pewnej teorii empirycznej, wśród których nie sposób na drodze pragmatycznej wyróżnić twierdzeń definicyjnych i hipotez rzeczowych. Jest rzeczą jasną, że ogół aksjomatów takiej teorii warunku nietwórczości spełniać nie może, gdyż byłoby to niezgodne z jej empirycznym charakterem. Toteż dokonując logicznej rekonstrukcji języka takiej teorii nie możemy uznać ogółu jej aksjomatów za zbiór postulatów dla terminów wprowadzanych. Wyodrębnienie tego zbioru staje się zadaniem logika, który tej rekonstrukcji dokonuje. Jak zadanie to można rozwiązać?

Niech T_2 symbolizuje, jak wyżej, zbiór zdań uznanych przez użytkowników języka L_2 przy wprowadzaniu predykatów $q_1, ..., q_m$. Załóżmy, iż rodzaj interpretacji języka L_2 podpada pod schemat odpowiadający którejś z uwzględnionych przez nas definicji klasy M_2^* — D1, D2 lub D3. Zbiór zdań języka L_2, który uznany być może za występujący w tych definicjach zbiór postulatów P_2, spełniać musi odpowiedni warunek nietwórczości — C1, C2 lub C3. Jeśli zbiór T_2 warunek taki spełnia, za zbiór P_2 uznamy po prostu zbiór T_2. W wypadku przeciwnym, w ten sposób postąpić nie możemy. Zbiór T_2 traktować musimy jako zbiór, który prócz postulatów dla predykatów q_1, ..., q_m obejmuje również pewne twierdzenia rzeczowe, i jako zbiór P_2 przyjąć musimy zbiór odpowiednio słabszy. Jakie określać go mają warunki? Musi to być przede wszystkim zbiór, który spełnia odpowiedni warunek nietwórczości — C1, C2 lub C3. Musi to być ponadto zbiór, który „odpowiada" zbiorowi T_2, który, innymi słowy, obejmuje zawarte w tym właśnie zbiorze postulaty. Jest to żądanie dość nieokreślone, dopuszczające różne eksplikacje. Podam tu jedną z nich, wyjaśniając naprzód jej sens w zastosowaniu do schematu odpowiadającego definicji D2.

Warunek nietwórczości, jaki spełniać ma zbiór P_2, przybiera w tej sytuacji postać warunku C2, lub równoważnego mu warunku C2'. Zbiór P_2 nie może tu pociągać żadnych zdań języka L_1, nie będących konsekwencjami zbioru P_1:

$$Cn\,(P_2) \cap Z_1 - Cn\,(P_1) = \emptyset.$$

Jednocześnie, jeśli zbiór T_2 warunku takiego nie spełnia, stwierdzić musimy, iż:

$$Cn\,(T_2) \cap Z_1 - Cn\,(P_1) \neq \emptyset.$$

Zbiór powyższy reprezentuje ogół tych warunków, które na interpretację języka L_1 nakłada zbiór T_2, a których nie może nakładać zbiór P_2. Wydaje się więc, iż zbiór P_2

powinien być zbiorem na tyle mocnym, aby po dołączeniu zbioru powyższego stawał się równoważny logicznie zbiorowi T_2. Takie właśnie żądanie formułuje warunek:

A. $Cn\,[(Cn\,(T_2) \cap Z_1 - Cn\,(P_1)) \cup P_2] = Cn\,(T_2)$.

Zbiór P_2 możemy więc określić jako zbiór, który spełnia warunki C2′ i A.

Ten sam warunek A służyć może do określenia zbioru P_2 w sytuacji odpowiadającej definicji D1. Tutaj co prawda zbiór P_2 spełniać musi warunek nietwórczości C1, mocniejszy od warunku C2′. Mówiąc swobodnie, zbiór P_2 nie może nakładać na interpretację języka L_1 żadnych warunków różnych od tych, które nakłada zbiór P_1 — zarówno wyrażalnych w języku L_1, jak i niewyrażalnych w tym języku. Ale dlatego też, zbiór reprezentujący te wszystkie — wyrażalne w języku L_1 — warunki, które na interpretację tego języka nakłada zbiór T_2, a których nie może nakładać zbiór P_2, jest zbiorem tym samym co poprzednio:

$$Cn\,(T_2) \cap Z_1 - Cn\,(P_1).$$

Niczego więcej nie wykraczającego poza nasz język L_1 do zbioru P_2 i tu dodać nie możemy. W rezultacie, zbiór P_2 określony może zostać w tym przypadku jako zbiór spełniający warunki C1 i A.

Inaczej natomiast sformułować musimy omawiany warunek dla schematu odpowiadającego definicji D3. Zbiór P_2 spełniać musi częściowy tylko warunek nietwórczości, C3, który w swej wersji synktatycznej C3′ żąda, aby:

$$Cn\,(P_2) \cap A_1 — Cn\,(P_1) = \emptyset,$$

tj, aby zbiór P_2 nie pociągał żadnych czysto uniwersalnych zdań języka L_1 nie będących konsekwencjami zbioru P_1. Wszelkie zatem ograniczenia, które na interpretację języka L_1 nakłada zbiór T_2 , a których nie może nakładać zbiór P_2, reprezentuje zbiór:

$$Cn\,(T_2) \cap A_1 - Cn\,(P_1).$$

Zbiór ten w połączeniu ze zbiorem P_2 powinien więc tworzyć zbiór równoważny logicznie zbiorowi T_2:

B. $Cn\,[(Cn\,(T_2) \cap A_1 - Cn\,(P_1)) \cup P_2] = Cn\,(T_2)$.

W sytuacji tej zbiór P_2 określamy więc jako zbiór czyniący zadość warunkom C3′ i B.

Zestawmy wyniki tych rozważań, podając warunki charakteryzujące zbiór P_2 przy każdej z wyróżnionych tu interpretacji języka L_2. Zbiór P_2 ma być zbiorem zdań języka L_2, który (dla danych zbiorów P_1 i T_2) spełnia:

(1) w przypadku definicji D1 — warunki C1 i A;

(2) w przypadku definicji D2 — warunki C2′ i A;

(3) w przypadku definicji D3 — warunki C3′ i B.

Zauważmy przede wszystkim, że wtedy, gdy zbiór T_2 sam spełnia odpowiedni warunek nietwórczości, zbiór P_2 staje się na mocy powyższych określeń równoważny logicznie zbiorowi T_2. Ten ostatni więc może być uznany w takich przypadkach za zbiór postulatów P_2. W przypadkach pozostałych musi być to zbiór odpowiednio słabszy. Warto może podkreślić fakt, że w przypadkach tych przyjęte określenia nie wyznaczają zbioru P_2 w sposób jednoznaczny. Łatwo podać można przykłady takich nierównoważnych logicznie zbiorów P_2' i P_2'', z których każdy spełnia (dla ustalonych zbiorów P_1 i T_2)

warunki wyszczególnione pod (1), a tym samym — słabsze od nich — warunki wyszczególnione pod (2)[10]. Różnica między takimi zbiorami wydaje się z semantycznego punktu widzenia nieistotna. Każdy z nich uważany być może za zbiór postulatów odpowiadający zbiorowi T_2. O wyborze między nimi decydować muszą względy natury pragmatycznej.

Najważniejszym problemem, jaki nasuwają przyjęte określenia, jest problem istnienia zbiorów spełniających wyszczególnione w nich warunki. Czy dla dowolnych zbiorów P_1 i T_2 istnieje zawsze zbiór P_2, który warunki takie spełnia? Różnie na to pytanie wypadnie odpowiedzieć w zależności od tego, o które warunki chodzi. W przypadku (1) i (2) odpowiedź jest przecząca, w przypadku (3) — twierdząca. Problem istnienia zbiorów spełniających warunki C1 i A oraz zbiorów spełniających warunki C2′ i A, był przedmiotem szczegółowych badań prowadzących m.in. do następujących wyników:

1. Dla pewnych zbiorów P_1 i T_2 nie istnieje ani taki zbiór P_2, który spełnia warunki C1 i A, ani taki, który spełnia warunki C2′ i A.
2. Dla pewnych zbiorów P_1 i T_2 nie istnieje zbiór P_2 spełniający warunki C1 i A, istnieje natomiast zbiór P_2 spełniający warunki C2′ i A[11].

Problem istnienia zbiorów spełniających warunki C3′ i B ma, jak wspomniałem, rozstrzygnięcie pozytywne:

> Dla dowolnych zbiorów P_1 i T_2 istnieje zawsze zbiór P_2 spełniający warunki C3′ i B.

Ponieważ problem ten, w przeciwieństwie do poprzednich, do tej pory rozważany nie był, podam szkic dowodu powyższego twierdzenia. Przypominam w tym celu nałożone na zbiór P_2 warunki:

C3′. $Cn(P_2) \cap A_1 \subset Cn(P_1)$;

B. $Cn[(Cn(T_2) \cap A_1 - Cn(P_1)) \cup P_2] = Cn(T_2)$.

Jeśli $Cn(T_2) \cap A_1 - Cn(P_1) = \emptyset$, przyjmiemy, iż $P_2 = T_2$ Rozpatrzmy przypadek, gdy $Cn(T_2) \cap A_1 - Cn(P_1) \neq \emptyset$, i załóżmy, że zdanie $\alpha \in Cn(T_2) \cap A_1 - Cn(P_1)$. Jako zbiór P_2 przyjmiemy w tym przypadku zbiór wszystkich zdań warunkowych otrzymanych ze zdań zbioru T_2 przez poprzedzenie każdego z nich wspólnym poprzednikiem α:

$$P_2 = \{\alpha \to \beta_i\}_{\beta_i \in T_2}$$

Należy okazać, że tak określony zbiór P_2 spełnia warunki C3′ i B. Fakt spełniania warunku B jest oczywisty. Chcąc okazać, iż P_2 spełnia warunek C3′, załóżmy, iż $\gamma \in Cn(P_2) \cap A_1$. Skoro $\gamma \in Cn(P_2) \cap A_1$, γ jest konsekwencją pewnego skończonego podzbioru zbioru zdań P_2, a więc: $\gamma \in Cn(\{\alpha \to \beta_1, ..., \alpha \to \beta_k\})$, dla pewnego k. To zaś równoważne jest stwierdzeniu, iż $\gamma \in Cn(\{\alpha \to \beta_1 \wedge ... \wedge \beta_k\})$. Łatwo zauważyć, iż tak

10) Przykłady takich zbiorów konstruowane były dla pewnych przypadków szczególnych, w których zbiór T_2 stanowiła para tzw. zdań redukcyjnych. Por. m.in. *The Logic of Empirical Theories*, wyd. cyt.

11) Problem ten rozważany był w pracy M. Przełęckiego i R. Wójcickiego „Inessential parts of extensions of first-order theories", *Studia Logica* 28, 1971. Pojęcia, których owe rozważania dotyczą, różnią się nieco od przyjętych tu określeń (1) i (2). Dowody podanych wyżej twierdzeń można jednak otrzymać z dowodów zawartych w tamtej pracy przez nieznaczną tylko modyfikację tych ostatnich.

może być tylko wtedy, gdy $\gamma \in Cn(\{\sim\alpha\})$. Skoro α jest z założenia zdaniem czysto uniwersalnym, $\sim\alpha$ jest zdaniem czysto egzystencjalnym. Ponieważ γ ma być również zdaniem czysto uniwersalnym, łatwo można okazać (na podstawie twierdzenia o interpolacji), że wynika ono ze zdania $\sim\alpha$ tylko wtedy, gdy bądź $\alpha \in Cn(\emptyset)$ bądź $\gamma \in Cn(\emptyset)$. Ale przypadek pierwszy jest niemożliwy, bo z założenia $\alpha \notin Cn(P_1)$. Zachodzić zatem musi ewentualność druga. Tym samym $\gamma \in Cn(P_1)$, a to właśnie należało okazać.

Tak więc wtedy, gdy interpretacja języka L_2 podpada pod schemat definicji D3 i, co za tym idzie, zbiór jego postulatów P_2 określony zostaje przez przewidziane dla tej sytuacji warunki (3), mamy gwarancję, że żbiór tak określony istnieje i znamy sposób jego konstrukcji. W sytuacjach pozostałych gwarancji takiej nie mamy. Okazać się więc może w pewnym konkretnym przypadku, że zbiór P_2 określony przez przewidziane dla danej sytuacji warunki (1) lub (2) w ogóle nie istnieje. Chcąc wyróżnić i tu pewien zbiór postulatów dla języka L_2, musimy określić go nieco inaczej. Możemy tego dokonać osłabiając w odpowiedni sposób charakteryzujący ów zbiór warunek A.[12]

3. Na koniec — parę uwag w sprawie stopnia ogólności przedstawionych tu konstrukcji. Języki, do których ograniczyliśmy nasze rozważania — to języki niezmiernie proste: oparte na węższym rachunku predyktatów (z identycznością) i nie zawierające innych terminów pozalogicznych prócz predyktatów. Powstaje wobec tego wątpliwość, czy rozważania nasze stosować się mogą do rzeczywistych języków empirycznych, w szczególności do języków typowych teorii empirycznych, takich jak teorie fizykalne. Rysem charakterystycznym tych teorii jest to, iż posługują się one rozbudowanym aparatem matematycznym. Czy można z niego zdać sprawę w ramach przyjętych przez nas konstrukcji? Czy charakter rozważanego tu języka L i jego interpretacji M^* dopuszcza taką możliwość? Odpowiedź na to pytanie zależy w dużej mierze od tego, jak bogaty jest ów aparat. Jeśli wykracza on poza środki elementarne angażując pojęcia takie, jak ogólne pojęcie zbioru, czy funkcji, nie możemy zdać z niego sprawy bez istotnego rozszerzenia przyjętych tu konstrukcji, gdyż są to konstrukcje z założenia ograniczone do języków elementarnych. Wiele z istniejących teorii fizykalnych taki nieelementarny aparat bez wątpienia stosuje. Ale istnieje również, jak się zdaje, wiele interesujących teorii fizykalnych, które nie wykraczają poza aparat elementarny; co ciekawsze , niektóre — z pozoru nieelementarne teorie fizykalne — dają się bez istotnego zubożenia sformułować w języku elementarnym.[13] Otóż zastosowanie zarysowanych przez nas konstrukcji do języków elementarnych teorii fizykalnych nie wydaje się przedstawiać jakichś trudności zasadniczych. Wymaga jednak pewnych

12) Pewne sugestie w tej sprawie zawiera praca M. Przełęckiego i R. Wójcickiego „Inessential parts of extensions of first-order theories", cytowana wyżej, oraz praca tych samych autorów pt. „The problem of analyticity", *Synthese* 19, 1969

13) R. Montague w pracy „Deterministic Theories", zamieszczonej w zbiorze *Decisions, Values and Groups*, 1962, pokazuje szczegółowo, jak można sformułować w ten sposób klasyczną mechanikę punktu materialnego.

wyjaśnień i zastrzeżeń. Zarówno bowiem te języki, jak i ich interpretacje, różnią się na pierwszy rzut oka wyraźnie od rozważanych do tej pory.

Język takiej teorii fizykalnej — nazwijmy go językiem L_f — ujmowany bywa z reguły jako tzw. język wielotypikalny i zawierający symbole funkcyjne. Wyróżnia się w nim, w przypadku najprostszym, dwa typy zmiennych: $x_1, x_2, \ldots$ i $y_1, y_2, \ldots$, a jako stałe pozalogiczne symbole funkcyjne dwóch rodzajów: $g_1, \ldots, g_k$ oraz $f_1, \ldots, f_l$. Modele takiego języka L_f przybierają postać tzw. modeli dwuzakresowych:

$$\langle U_1, U_2; G_1, \ldots, G_k, F_1, \ldots, F_l\rangle,$$

gdzie U_1 - to zbiór wartości zmiennych $x_1, x_2, \ldots$, U_2 —to zbiór wartości zmiennych $y_1, y_2, \ldots$, $G_1, \ldots, G_k$ — to funkcje o argumentach i wartościach ze zbioru U_1, a $F_1, \ldots, F_l$ — to funkcje o argumentach ze zbioru U_2, a wartościach ze zbioru U_1. Zgodnie z zamierzoną interpretacją języka L_f, U_1 ma być zbiorem liczb (najczęściej zbiorem liczb rzeczywistych), U_2 — pewnym zbiorem przedmiotów fizycznych, $G_1, \ldots, G_k$ — pewnymi operacjami matematycznymi, a $F_1, \ldots, F_l$ — pewnymi wielkościami fizycznymi. Zbiór U_1 i funkcje $G_1, \ldots, G_k$ reprezentują więc zakładany w danej teorii aparat matematyczny.

Mimo wyraźnej odmienności tego języka i jego modeli od naszego języka L i jego modeli $\mathfrak{M}$ — różnice te mają w istocie charakter jedynie techniczny. Wiadomo bowiem, że wszystko, co da się wyrazić w wielotypikalnym języku z funkcjami, da się też wyrazić, mówiąc swobodnie, w odpowiednio dobranym jednotypikalnym języku bez funkcji, a więc w języku takim, jak język L. Nie mogę tu precyzować, ani uzasadniać tego — dobrze zresztą znanego — twierdzenia (czyni to każdy obszerniejszy podręcznik logiki). Poprzestanę zatem na paru uwagach wyjaśniających.

Przejście od języka z funkcjami do odpowiadającego mu języka bez funkcji sprowadza się pod względem synktatycznym do zastąpienia każdego k–argumentowego symbolu funkcyjnego k+1–argumentowym predykatem. Otrzymujemy w ten sposób zamiast języka z symbolami funkcyjnymi $g_1, \ldots, g_k, f_1, \ldots, f_l$ język zawierający $k+l$ odpowiadających im predykatów $r_1, \ldots, r_k, q_1, \ldots, q_l$. Przejście z kolei od języka dwutypikalnego do języka jednotypikalnego polega na przyjęciu jednego typu zmiennych i wprowadzeniu zamiast dwóch poprzednich typów zmiennych dwóch dodatkowych jednoargumentowych predykatów s_1, s_2. W rezultacie dochodzimy na tej drodze do języka tego samego rodzaju, co języki przez nas rozważane — zawierającego jeden tylko typ zmiennych i $n = 2+k+l$ predykatów $s_1, s_2, r_1, \ldots, r_k, q_1, \ldots, q_l$. Nazwijmy go, jak poprzednio, językiem L. Zakładamy, iż jego modele, czyli układy typu:

$$\langle U; S_1, S_2, R_1, \ldots, R_k, Q_1, \ldots, Q_l\rangle$$

związane są z modelami języka L_f w sposób następujący:

1. Uniwersum U jest sumą obu zakresów poprzednich: $U=U_1 \cup U_2$.
2. Podzbiory S_1, S_2 pokrywają się odpowiednio z zakresami U_1, U_2: $S_1=U_1, S_2=U_2$.
3. Każda relacja $R_i (i =1, \ldots, k)$ odpowiada funkcji G_i zgodnie ze schematem:

$$R_i\,(x_1, \ldots, x_{k_i}, y) \equiv G_i\,(x_1, \ldots, x_{k_i}) = y;$$

w ten sam sposób każda relacja Q_i $(i =1, \ldots, l)$ odpowiada funkcji F_i.

Założenia te czynią intuicyjnie zrozumiałym sposób, w jaki to wszystko, o czym mówi się w języku L_f, wyrażone może być w języku L. (Wystarczy w tym celu, mówiąc swobodnie, zastąpić w danym zdaniu języka L_f zwroty z symbolami funkcyjnymi przez odpowiednie predykaty, a zmienne związane ujednolicić i zrelatywizować do predykatu s_1 lub s_2).

Wspominaliśmy, iż zgodnie z zamierzoną interpretacją języka L_f pewne jego terminy otrzymują interpretację matematyczną. Przy przejściu do języka L rolę tych terminów przejmują predykaty s_1, r_1, ..., r_k. Otóż stać można na stanowisku, że dana teoria wyposażona zostaje w stosowny aparat matematyczny wtedy tylko, gdy predykaty te denotują jednoznacznie określone, z góry ustalone twory matematyczne. I tak, predykat s_1 denotować musi zbiór liczb rzeczywistych — oznaczmy go przez $\mathbf{S}_1$, a predykaty r_1, ..., r_k — określone relacje zachodzące między tymi liczbami (odpowiadające operacji dodawania, mnożenia itp.) — oznaczmy je przez $\mathbf{R}_1$, ..., $\mathbf{R}_k$. Założenie takie wyrażalne jest oczywiście w przyjętej przez nas terminologii. Żąda ono, aby do klasy M^* modeli właściwych rozważanego języka L należały takie tylko modele (Ɱ):

$$\langle U; \mathbf{S}_1, S_2, \mathbf{R}_1, ..., \mathbf{R}_k, Q_1, ..., Q_l \rangle,$$

w których predykaty s_1, r_1, ..., r_k otrzymują ową ustaloną interpretację matematyczną: $\mathbf{S}_1$, $\mathbf{R}_1$, ..., $\mathbf{R}_k$. Nazwijmy je modelami standardowymi języka L. Przy takim jednak warunku nakładanym na klasy modeli właściwych rozważanych w tej pracy języków, pewnej modyfikacji musiałyby ulec niektóre wywody zawarte w jej części drugiej. Oparte one bowiem były na założeniu, iż klasa modeli właściwych M^* wyodrębniona została z klasy modeli postulatów $M(P)$ za pomocą bezpośrednich zabiegów interpretacyjnych typu definicji ostensywnej. Był to jedyny rodzaj bezpośrednich procedur interpretacyjnych, do jakich odwoływaliśmy się w pracy obecnej zgodnie z jej empirystycznymi założeniami. W przypadku rozważanym, ten rodzaj interpretacji bezpośredniej nie wchodzi oczywiście w grę. Wyodrębnienie klasy modeli standardowych języka L odwoływać się musi do interpretacji bezpośredniej innego rodzaju i inne, wskutek tego, pociągającej konsekwencje.

Sądzę jednak, że fakt wyposażenia teorii fizykalnej w stosowny aparat matematyczny pojmowany może być również w sposób bardziej liberalny, w pełni harmonizujący z konstrukcjami zarysowanymi w pracy obecnej i nie wymagający jakiejkolwiek ich modyfikacji. Można mianowicie terminy matematyczne traktować jako terminy dopuszczające — jak wszelkie terminy teoretyczne — interpretację jedynie pośrednią, a więc daną przez określony zbiór postulatów. Zbiór ten wchodziłby po prostu w skład zbioru postulatów P i w ten sposób wyznaczał interpretację terminów matematycznych języka L. Chcąc, aby interpretacja ta zdeterminowana była jak najściślej, musimy jako zbiór postulatów dla predykatów s_1, r_1, ..., r_k przyjąć pewien zbiór maksymalny. Może nim być po prostu ogół prawd matematycznych wyrażalnych w języku L. Oznaczamy go symbolem Mt i definiujemy, jak następuje:

$\alpha \in Mt$ wtedy, gdy α jest zdaniem prawdziwym w każdym modelu standardowym języka L.

Warunek żądający, aby każdy model właściwy języka L był modelem zbioru zdań Mt, jest oczywiście warunkiem słabszym, niż warunek żądający, aby był to model standardowy. Warto jednak zwrócić uwagę na fakt, że w wielu zastosowaniach — ważnych z logicznego punktu widzenia — różnica ta nie odgrywa istotnej roli. Ilustracją tego może być zależność następująca:

Jeśli zbiór zdań X jest zbiorem skończonym, zdanie α jest prawdziwe w każdym modelu standardowym zbioru X wtedy i tylko wtedy, gdy $\alpha \in Cn\,(Mt \cup X)$.[14]

Przemawia to za tym, iż ów bardziej liberalny sposób interpretacji terminów matematycznych pozwala również zdać sprawę z aparatu matematycznego zakładanego przez niektóre języki empiryczne. I one, co za tym idzie, objęte zostają naszymi rozważaniami.

14) Twierdzenie to przytacza R. Montague w cytowanej wyżej pracy.