Michał Heller

# Początek i koniec wszechświata w zamkniętym modelu Friedmana

Filozofia Nauki 2/3/4, 7-17

1994

*Filozofia Nauki*
*Rok II, 1994, Nr 3-4(7-8)*

Michał Heller

# Początek i koniec wszechświata w zamkniętym modelu Friedmana

## 1. Wprowadzenie

W literaturze popularnonaukowej, a także w wielu artykułach filozoficznych, roi się od nonsensów na temat początkowej osobliwości w dziejach wszechświata. Część tych nonsensów wynika z nazbyt częstego podporządkowywania naukowej ścisłości celom popularyzacji, część natomiast po prostu z ignorancji. Najczęstszym błędem jest utożsamianie początkowej osobliwości z «punktem», od którego rozpoczęły się dzieje wszechświata, lub z «zerową objętością czasoprzestrzeni», dającą początek kosmicznej ekspansji. Niekiedy również początkową osobliwość utożsamia się z Wielkim Wybuchem. Tymczasem początkowa osobliwość nie jest ani punktem, ani częścią (choćby o «zerowych rozmiarach») czasoprzestrzeni, ani Wielkim Wybuchem (chociaż przy pewnych zastrzeżeniach Wielki Wybuch można traktować jako specjalny typ osobliwości). Zagadnienie zdefiniowania osobliwości (nie tylko początkowej) jest trudnym problemem z pogranicza nowoczesnej geometrii różniczkowej i matematycznych metod fizyki relatywistycznej. Zagadnieniu temu poświęciłem oddzielną monografię[1] i nie jest moim zamiarem powtarzanie zamieszczonych tam analiz. W niniejszym artykule pragnę — oczywiście w nawiązaniu do moich poprzednich rozważań — krótko przedstawić pewne aspekty najnowszych wyników osiągniętych w tej dziedzinie już po napisaniu tamtej monografii. Wyniki te dotyczą przede wszystkim ściśle «technicznej» strony zagadnienia: zastosowanie nowych metod matematycznych pozwoliło na zupełnie odmienne podejście do problematyki. Okazało się również, że podejście to ma

[1] *Osobliwy wszechświat*, PWN, Warszawa 1991.

interesujący aspekt metodologiczny, a osiągnięte rezultaty prowokują do filozoficznych refleksji.

## 2. Osobliwe brzegi czasoprzestrzeni

W ogólnej teorii względności czasoprzestrzeń jest modelowana przez czterowymiarową (odpowiednio gładką) rozmaitość różniczkową, na której zdefiniowana jest (również odpowiednio gładka) metryka Lorentza. Dzięki strukturze czterowymiarowej rozmaitości różniczkowej, zdarzenia w czasoprzestrzeni można identyfikować za pomocą czwórek liczb rzeczywistych, natomiast dzięki metryce Lorentza, każda czasorzestrzeń lokalnie posiada własności czasoprzestrzeni Minkowskiego, tzn. czasoprzestrzeni szczególnej teorii względności.[2] Warto podkreślić, że taki model czasoprzestrzeni posiada bardzo dobre potwierdzenie empiryczne.

Obecny pogląd na naturę klasycznej osobliwości (tzn. gdy nie bierze się pod uwagę efektów związanych z kwantowym charakterem pola grawitacyjnego) ustalił się w wyniku prac Penrose'a, Hawkinga, Geroch i innych, których uwieńczeniem było udowodnienie znanych twierdzeń o występowaniu osobliwości w różnych modelach kosmologicznych i astrofizycznych (w sytuacji kolapsu grawitacyjnego).[3] Zgodnie z tym paradygmatem osobliwość nie należy do czasoprzestrzeni, nie można jej więc uważać za zdarzenie (nawet za zdarzenie «wyjątkowe»), które dałoby się identyfikować za pomocą jakiegoś układu liczb. Standardowa procedura polega na tym, by za pomocą zdarzeń, należących do czasoprzestrzeni, zdefiniować osobliwość, która do czasoprzestrzeni nie należy. W ten sposób zdefiniowaną osobliwość nazywa się *punktem idealnym* czasoprzestrzeni. Punkty idealne (osobliwości może być więcej) tworzą *osobliwy brzeg czasoprzestrzeni.* Podkreślmy jeszcze raz — punkty idealne czasoprzestrzeni, czyli punkty jej osobliwego brzegu, są osiągalne z czasoprzestrzeni, ale same do czasoprzestrzeni nie należą.

Znanych jest kilka równoważnych sobie konstrukcji, które prowadzą do różnych osobliwych brzegów czasoprzestrzeni. Ta różnorodność odzwierciedla niejednoznaczności, w jakie uwikłany jest problem zdefiniowania osobliwości.

W praktyce najskuteczniejszy okazał się tzw. *geodezyjny (osobliwy) brzeg czasoprzestrzeni,* skrótowo zwany *g-brzegiem.* W czasoprzestrzeni istnieją krzywe, które reprezentują ruch fotonów (geodetyki zerowe), i krzywe, które reprezentują swobodny spadek cząstek obdarzonych masą (geodetyki czasopodobne). Jeżeli któraś z takich krzywych urywa się (nie może być dalej przedłużana), to znaczy, że napotkała na osobliwość. Ale na osobliwości może urywać się więcej niż jedna krzywa (geodetyka) i nie jest wcale rzeczą oczywistą, czy dwie urywające się krzywe napotkały tę samą

[2] Po dokładne definicje tych pojęć odsyłam Czytelnika do odpowiedniej literatury. Zob. np.: W. Kopczyński, A. Trautman, *Czasoprzestrzeń i grawitacja,* PWN, Warszawa 1981.

[3] Klasyczną monografią dotyczącą tych zagadnień jest książka: S. W. Hawking, G. F.R. Ellis, *The Large Scale Structure of Space-Time,* Cambridge University Press, Cambridge 1973.

osobliwość, czy dwie różne osobliwości. Podanie kryterium rozstrzygającego tę kwestię stanowiło istotną część definicji g-brzegu czasoprzestrzeni.

Definicja osobliwości jako elementów g-brzegu czasoprzestrzeni została wykorzystana w dowodach twierdzeń o istnieniu osobliwości; stąd jej praktyczna popularność. Jednakże od samego początku zdawano sobie sprawę z pewnego rodzaju prowizoryczności tej definicji. Mówi się w niej o urywaniu się krzywych przedstawiających swobodne spadki cząstek obdarzonych masą i ruchy fotonów, a z fizycznego punktu widzenia nie można wykluczyć urywania się krzywych przedstawiających masywne cząstki poruszające się z przyspieszeniami (byle tylko ograniczonymi). Jednakże uwzględnienie takich krzywych w definicji brzegu osobliwego prowadziło do bardzo poważnych trudności teoretycznych.

## 3. Brzeg Schmidta

Trudności te przezwyciężył — jak się wydawało — Bernard Schmidt[4] w swojej konstrukcji tzw. *b-brzegu czasoprzestrzeni* (b — od angielskiego wyrazu *bundle*). Konstrukcja ta od samego początku została uznana za bardzo elegancką i posiadającą głębokie znaczenie fizyczne. Przyjrzyjmy się jej nieco dokładniej.

Zwóćmy uwagę na fakt, że podręcznikowy wykład szczególnej teorii względności nie zaczyna się od skonstruowania geometrii czasoprzestrzeni, lecz od rozważenia inercjalnych układów odniesienia poruszających się względem siebie, i przekształceń Lorentza pomiędzy tymi układami. Jeżeli mamy do czynienia z czasoprzestrzenią zakrzywioną, to rozważamy lokalne układy odniesienia, tzw. *repery*. Reper składa się z czterech liniowo niezależnych (w szczególności ortogonalnych) wektorów i punktu czasoprzestrzeni, w którym te wektory są zaczepione. Jeżeli rozważymy wszystkie możliwe repery zaczepione we wszystkich możliwych punktach czasoprzestrzeni, otrzymamy konstrukcję zwaną *wiązką reperów nad czasoprzestrzenią.*

Wiązce reperów nad czasoprzestrzenią można nadać strukturę rozmaitości. Punkt $p$ w tej rozmaitości jest opisywany 20-stoma współrzędnymi: 4 współrzędne — to współrzędne punktu zaczepienia, a pozostałe 16 współrzędnych — to $4 \times 4$ składowe wektorów reperu. Punkt $p$ można oczywiście zrzutować na punkt zaczepienia $x$ (por. rys. 1).

Dla uproszczenia dalszych wywodów wprowadźmy teraz oznaczenia. Niech $M$ będzie czasoprzestrzenią, $F(M)$ — wiązką reperów (czasem mówimy również o *przestrzeni wiązki* $F(M)$), a $\pi$: $F(M) \to M$ — wspomnianym wyżej rzutowaniem. Zbiór wszystkich reperów zaczepionych w punkcie $x$ czasoprzestrzeni $M$ nazywa się „włóknem nad punktem $x$" (włókno to można więc zapisać jako $\pi^{-1}(x)$). Od jednego reperu, należącego do włókna, do drugiego reperu, należącego do tego samego włókna,

[4] „A New Definition of Singular Points in General Relativity", *General Relativity and Gravitation*, **1**, 1971, 269-280.

przechodzi się za pomocą przekształcenia Lorentza; grupę przekształceń Lorentza oznaczmy przez $L$. Mówimy, że grupa Lorentza $L$ działa na włóknach. Nazywamy ją także *grupą strukturalną wiązki reperów*.

Widzimy więc, że wiązka reperów nad czasoprzestrzenią jest bogatą strukturą — bogatą i umożliwiającą ciekawe rozumowania (które oczywiście zawsze można ubrać w postać odpowiednich rachunków).

Większość kłopotów ze zdefiniowaniem osobliwości wynika stąd, że na czasoprzestrzeni nie da się w sposób naturalny określić funkcji odległości (metryka Lorentza nie jest metryką w sensie topologicznym). Ale w czasoprzestrzeni jest zdefiniowane przeniesienie równoległe wzdłuż krzywych. Wykorzystamy tę okoliczność, by zdefiniować metrykę w przestrzeni wiązki $F(M)$.

Jeżeli przeniesiemy równolegle reper wzdłuż dowolnej krzywej w czasoprzestrzeni, to punkt odpowiadający temu reperowi w przestrzeni wiązki $F(M)$ zakreśli pewną krzywą w $F(M)$; nazwijmy ją *krzywą horyzontalną*. Kąt zawarty pomiędzy dowolnym włóknem wiązki, przecinającym krzywą horyzontalną, a samą krzywą horyzontalną możemy, z definicji, uznać za kąt prosty. Zabieg ten wyznacza pewną metrykę w przestrzeni wiązki $F(M)$.[5] Jest to metryka Riemanna (dodatnio określona), czyli metryka w sensie topologicznym, a więc określa ona funkcję odległości w $F(M)$.

Dysponując funkcją odległości, możemy w $F(M)$ konstruować ciągi Cauchy'ego, tzn. takie ciągi, w których odległość pomiędzy kolejnymi sąsiednimi wyrazami zdąża do zera.[6] Jeżeli granica jakiegoś ciągu Cauchy'ego nie należy do przestrzeni wiązki $F(M)$, to można ją do $F(M)$ dołączyć, czyli jeżeli $F(M)$ jest przestrzenią niezupełną, to można ją uzupełnić. Uzupełnioną przestrzeń $F(M)$ oznaczmy przez $\overline{F(M)}$. $\overline{F(M)} - F(M)$ jest więc brzegiem Cauchy'ego przestrzeni $F(M)$.

Działanie grupy Lorentza w naturalny sposób można rozciągnąć z $F(M)$ na $\overline{F(M)}$. Jednakże szczegółów tego zabigu nie będziemy tu przedstawiać.

Łatwo się przekonać, że jeżeli utworzymy relację ilorazową $F(M)/L$, to będzie ona izomorficzna z czasoprzestrzenią $M$. Jeżeli natomiast utworzymy relację ilorazową $\overline{F(M)}/L$, to będzie ona izomorficzna z czasoprzestrzenią $M$, do której dołączono pewien brzeg. Brzeg ten nazywa się *b-brzegiem* lub *brzegiem Schmidta*.[7]

Warto zwrócić uwagę na fakt, że g-brzeg jest częścią b-brzegu, a więc definicja Schmidta obejmuje osobliwości rozumiane jako «końce» czasopodobnych i zerowych

---

[5] Nie jest to jednoznaczny przepis na wprowadzenie metyki w $F(M)$. Można wszakże pokazać, że dalsza konstrukcja nie zależy od konkretnej definicji tego typu metryki w $F(M)$. Szczegóły — por. w cytowanej pracy Schmidta (1971).

[6] Uwaga! Nie jest to ścisła definicja ciągu Cauchy'ego. Ścisłą definicję można znaleźć w podręcznikach topologii lub analizy matematycznej.

[7] Należy przy tym założyć, że czasoprzestrzeń $M$ jest nieprzedłużalna. Jest to szczegół techniczny, który w dalszych rozważaniach nie będzie odgrywał żadnej roli.

geodetyk. Definicja ta obejmuje również i inne sytuacje, które intuicja nakazuje uznać za osobliwe.

## 4. Patologie b-brzegu czasoprzestrzeni

Konstrukcja Schmidta została — wkrótce po jej ogłoszeniu drukiem — uznana za najelegantszą i najogólniejszą definicją osobliwości. Miała ona wszakże jedną wadę. Policzenie b-brzegów dla znanych rozwiązań równań Einsteina było tak trudne, że Schmidt w swojej oryginalnej pracy podał konstrukcję b-brzegów jedynie dla kilku najprostszych, bardzo sztucznych czasoprzestrzeni, spełniających rolę testów poprawności nowej definicji. Dopiero kilka lat później Bosshard[8] i Johnson[9] zdołali policzyć pewne własności b-brzegów zamkniętego modelu kosmologicznego Friedmana i czasoprzestrzeni Schwarzschilda. Ich wyniki były zaskakujące. Okazało się mianowicie, że b-brzeg zamkniętego modelu kosmologicznego Friedmana składa się tylko z jednego punktu. Jak wiadomo, model ten ma dwie osobliwości: początkową i końcową. A więc utożsamiają się one, tworząc jeden punkt b-brzegu (rys. 2). Bosshard i Johnson wykazali to, konstruując krzywą w przestrzeni wiązki $F(M)$, łączącą włókno nad początkową osobliwością z włóknem nad końcową osobliwością, i dowodząc, że długość tej krzywej jest równa zeru. A więc obydwie osobliwości są tym samym punktem b-brzegu.

Nie koniec na tym. We wszystkich czasoprzestrzeniach, rozważanych w teorii względności, obowiązuje tzw. aksjomat Hausdorffa, stwierdzający, że każde dwa punkty czasoprzestrzeni mają rozłączne otoczenia. Johnson pokazał, że aksjomat ten nie jest spełniony w wypadku zamkniętego modelu Friedmana i w wypadku czasoprzestrzeni Schwarzschilda. Jak wiadomo, oba te rozwiązania zajmują ważną pozycję — pierwsze w kosmologii relatywistycznej (jako model wszechświata), drugie w astrofizyce relatywistycznej (jako model kolapsującej gwiazdy). Niespełnienie aksjomatu Hausdorffa w tych czasoprzestrzeniach znaczy, że każdy ich punkt jest, w pewnym sensie, blisko osobliwości. Jaskrawo sprzeciwia się to naszej intuicji.

Te patologie — a stało się jasnym, że podobnych patologii należy oczekiwać w wielu innych rozwiązaniach równań Einsteina — odwróciły uwagę teoretyków od konstrukcji Schmidta. Próbowano jeszcze szukać środków zaradczych; zaproponowano kilka modyfikacji konstrukcji Schmidta; przedyskutowano to wszystko na specjalnie zorganizowanym sympozjum[10], ale w następnych latach prace dotyczące b-brzegu czasoprzestrzeni stopniowo zaczęły znikać z czasopism naukowych.

---

[8] B. Bosshard, „On the b-Boundary of the Closed Friedman-Model", *Communications in Mathematical Physics*, **46**, 1976, 263-268.

[9] R.A. Johnson, „The Bundle Boundary in Some Special Cases", *Journal of Mathematical Physics*, **18**, 1977, 898-902.

[10] Odbyło się ono w Waterloo, w Kanadzie. Wygłoszone na sympozjum referaty zostały opublikowane w sierpniowym numerze czasopisma *General Relativity and Gravitation* z roku 1979, **10**.

**5. Przestrzenie ustrukturalizowane**

W niektórych publikacjach z tego okresu dawało się wyczuć jakby nutę żalu, że konstrukcja tak elegancka i tak pasująca do ogólnej teorii względności (wszystko «działo się» w przestrzeni lokalnych układów odniesienia, reperów), zawiodła oczekiwania. Od początku jednak wiadomym było (przynajmniej dobrze znającym geometrię różniczkową), że na eleganckiej konstrukcji Schmidta jest poważna skaza. I czasoprzestrzenie, i wiązki reperów nad nimi, należą do kategorii gładkich rozmaitości (ściślej: i czasoprzestrzenie, i wiązki reperów nad nimi, są obiektami tej kategorii). Tymczasem osobliwości łamią strukturę rozmaitości. Mimo to Schmidt usiłował wtłoczyć je do kategorii, do których one z natury nie należą. Wyniki uzyskane przez Bossharda i Johnsona pokazały, że zabieg ten się nie udał. Nasuwa się przypuszczenie, że aby uratować konstukcję Schmidta, trzeba od początku rozważać ją w kategorii szerszej niż kategoria gładkich rozmaitości.

W fizyce teoretycznej od dłuższego czasu daje się odczuć potrzebę wyjścia poza gładkie rozmaitości. Próby kwantowania pola grawitacyjnego w wielu swoich wersjach są próbami kwantowania czasoprzestrzeni, a trudno się spodziewać, by konsekwentnie skwantowana czasoprzestrzeń zachowała strukturę gładkiej rozmaitości.

Jedną z prób wyjścia poza zbyt ciasny paradygmat gładkich rozmaitości jest teoria przestrzeni ustrukturalizowanych, zaproponowana przez W. Sasina i autora niniejszych słów.[11] Teoria ta wyrosła z wcześniejszych prób uogólnienia pojęcia rozmaitości do tzw. przestrzeni różniczkowych.[12] Idea przestrzeni różniczkowych wywodzi się z następującego faktu.

Wiadomo, że cała informacja o strukturze gładkiej rozmaitości mieści się w zbiorze wszystkich gładkich funkcji (rzeczywistych) zdefiniowanych na tej rozmaitości. Gładką rozmaitość można wręcz zdefiniować za pomocą z góry zadanej rodziny funkcji $C$ na danym zbiorze $M$, spełniającej pewne warunki.[13] Okazuje się, że jeżeli spośród tych warunków odrzucić jeden (postulujący lokalny dyfeomorfizm z $\mathbf{R}^n$), pozostaje bogata struktura, na której ciągle jeszcze można uprawiać geometrię różniczkową. Strukturę tę nazwano *przestrzenią różniczkową*. Przestrzeń różniczkową można więc zdefiniować jako parę $(M,C)$, gdzie $M$ jest niepustym zbiorem, a $C$ rodziną rzeczywistych funkcji zdefiniowanych na $M$, spełniających odpowiednie postulaty (postulaty te gwarantują, że rodzina $C$ jest algebrą liniową; jeżeli do tych postulatów dodać postulat

[11] M. Heller, W. Sasin, „The Structure of the b-Completion of Space-Time", *General Relativity and Gravitation*, **26**, 1994, 797-811.

[12] Por. R. Sikorski, *Wstęp do geometrii różniczkowej*, PWN, Warszawa 1972. Przegląd różnych teorii przestrzeni różniczkowych i ich porównanie można znaleźć w: M. Heller, P. Multarzyński, W. Sasin, Z. Żekanowski, „On Some Generalizations of the Manifold Concept", *Acta Cosmologica*, **18**, 1992, 31-44.

[13] Taką definicją rozmaitości posłużyli się w swojej monografii R. Penrose i W. Rindler, *Spinors and Space-Time*, tom 1: *Two-Spinor Calculus and Relativistic Fields*, Cambridge University Press, Cambridge 1984, ss. 179 i nast.

o istnieniu lokalnego dyfeomorfizmu pomiędzy $M$ i $\mathbf{R}^n$, to przestrzeń różniczkowa staje się gładką rozmaitością).

Wkrótce podjęto próby zastosowania przestrzeni różniczkowych do fizyki relatywistycznej[14], a w szczególności do zagadnienia osobliwości w kosmologii i astrofizyce.[15] Koncepcja przetrzeni różniczkowych ofiarowała zupełnie nową możliwość podejścia do zagadnienia osobliwości. O ile w paradygmacie tradycyjnym osobliwości same do czasoprzestrzeni nie należą i mogą być osiąganie jedynie z wnętrza czasoprzestrzeni (por. wyżej § 2), o tyle przestrzeń różniczkowa w zasadzie modeluje czasoprzestrzeń wraz z osobliwościami; osobliwości są częścią modelu czasoprzestrzeni. Bliższe badania wykazały jednak, że dotyczy to tylko osobliwości słabszego typu. Na przykład osobliwości krzywizny (które w kosmologii odgrywają ważną rolę) nie dają się przedstawić jako części czasoprzestrzeni modelowanej przez przestrzeń różniczkową. Powstała więc konieczność uogólnienia przestrzeni różniczkowej. W odpowiedzi na tę konieczność powstała koncepcja przestrzeni ustrukturalizowanych.

Przejście od przestrzeni różniczkowych do przestrzeni ustrukturalizowanych polega na tym, że zamiast rodziny $C$ funkcji (spełniających odpowiednie postulaty) na zbiorze $M$, rozważa się snop $\mathcal{C}$ rodzin funkcji (algebr funkcyjnych) na przestrzeni topologicznej $M$, spełniający pewien dodatkowy postulat. Snop $\mathcal{C}$ nazywa się *strukturą różniczkową przestrzeni ustrukturalizowanej*. Przestrzeń ustrukturalizowaną oznacza się przez $(M, \mathcal{C})$. Pojęcie snopa jest znane od dość dawna w matematyce (np. w geometrii algebraicznej). Mówi się o snopie grup, pierścieni i innych struktur algebraicznych. Konieczność zastosowania snopów pojawiła się już w teorii przestrzeni różniczkowych przy próbie ich uogólnienia na przypadek, gdy rodzina funkcji $C$ składa się z analitycznych funkcji zespolonych.[16]

Pojęcie przestrzeni ustrukturalizowanej jest znacznie ogólniejsze od pojęcia przestrzeni różniczkowej. Aksjomaty, jakie musi spełniać każdy snop, gwarantują, że gdy rozważamy coraz mniejsze otoczenie dowolnego punktu $p$ należącego do przestrzeni topologicznej $M$, własności struktury różniczkowej $\mathcal{C}$ zostają zachowane. Co więcej, własności te zachowują się także w granicy dokładnie nad punktem $p$ (mówi się wtedy o *źdźble* snopa nad punktem $p$). I odwrotnie, ze struktury w małym otoczeniu punktu $p$ można odtworzyć strukturę na dowolnych zbiorach otwartych przestrzeni $M$. Dodatkowy aksjomat przestrzeni ustrukturalizowanych zapewnia możliwość wykonywania wielu operacji różniczkowych na tych przestrzeniach. W szczególności definiuje się

[14] Por. np.: J. Gruszczak, M. Heller, P. Multarzyński, „A Generalization of Manifolds as Space-Time Models", *Journal of Mathematical Physics*, 29. 1988, 2576-2580; M. Heller, „Geometry of Transition to Quantum Gravity Regime", *Acta Physica Polonica*, 24, 1933, 911-926.

[15] Por. np.: W. Sasin, „Differential Spaces and Singularities in Differential Space-Times", *Demonstratio Mathematica*, 24, 1991, 601-634; J. Gruszczak, M. Heller, „Differential Structure of Space-Time and Its Prolongations to Singular Boundaries", *International Journal of Theoretical Physics*, 32, 1993, 625-648.

[16] Por. M. Heller, „Algebraic Foundations of the Theory of Differential Spaces", *Demonstratio Mathematica*, 24, 1991, 349-364.

przestrzeń styczną do przestrzeni ustrukturalizowanej w dowolnym jej punkcie, pola wektorowe, formy różniczkowe, koneksje.

Gładkie rozmaitości są szczególnym przypadkiem przestrzeni różniczkowych, a przestrzenie różniczkowe są szczególnym przypadkiem przestrzeni ustrukturalizowanych. Okazuje się, że przy pomocy tych ostatnich można modelować czasoprzestrzenie z dowolnymi osobliwościami.[17]

## 6. B-brzeg w kategorii przestrzeni ustrukturalizowanych

W kategorii przestrzeni ustrukturalizowanych można również konstruować b-brzeg dowolnej czasoprzestrzeni. Konstrukcja wygląda zupełnie analogicznie do oryginalnej konstrukcji zaproponowanej przez Schmidta, z tym jednak, że metody przestrzeni ustrukturalizowanych są w tę konstrukcję «zainwestowane» od samego początku. Dowodzi się także, że dowolna czasoprzestrzeń z b-brzegiem jest przestrzenią ustrukturalizowaną.[18]

A jak radzą sobie metody przestrzeni ustrukturalizowanych z patologiami, jakie pojawiają się w konstrukcji b-brzegu dla czasoprzestrzeni zamkniętego modelu Friedmana? Radzą sobie bardzo skutecznie, wyjaśniając zarazem źródło dotychczasowych kłopotów.[19] Niech $(M, \mathcal{C})$ będzie przestrzenią ustrukturalizowaną modelującą czasoprzestrzeń zamkniętego modelu Friedmana (bez osobliwości, a więc w istocie $(M, \mathcal{C})$ jest gładką rozmaitością). Czasoprzestrzeń $(M, \mathcal{C})$[20] nie ma żadnych patologii; jest czasoprzestrzenią doskonale znaną z każdego elementarnego kursu kosmologii. Starajmy się teraz uzupełnić tę czasoprzestrzeń o jej b-brzeg, a więc skonstruować przestrzeń ustrukturalizowaną $(\bar{M}, \bar{\mathcal{C}})$, gdzie $\bar{M} = M \cup$ b-brzeg, a $\bar{\mathcal{C}}$ powstaje przez przedłużenie struktury róniczkowej $\mathcal{C}$ na $\bar{M}$. Z konstrukcją b-brzegu nie ma kłopotów; stosuje się tu takie same metody jak przy konstrukcji b-brzegu każdej innej czasoprzestrzeni. Problem tkwi w przedłużeniu struktury różniczkowej z $M$ na $\bar{M}$.

Struktura różniczkowa $\mathcal{C}$ na $M$ jest odpowiednio bogata: zawiera ona wszystkie funkcje gładkie, jakie istnieją na czasoprzestrzeni zamkniętego modelu Friedmana. Funkcji tych jest oczywiście «bardzo dużo»; wśród nich istnieją także funkcje stałe. Dość żmudnym rozumowaniem dowodzi się , że *z $M$ na $\bar{M}$ można przedłużyć tylko funkcje stałe*. Jest to wynik zaskakujący: struktura różniczkowa $\bar{\mathcal{C}}$ na $\bar{M}$ jest silnie zdegenerowana!

Tym razem dość łatwo udowodnić (jest to bowiem prosta konsekwencja powyższego), że jedynymi krzywymi w przestrzeni wiązki reperów $\overline{F(M)}$, łączącymi włókno nad początkową osobliwością z włóknem nad końcową osobliwością, są krzywe o zerowej

[17] Por. M. Heller, „Scheaves of Einstein Algebras", w przygotowaniu.

[18] Zostało to pokazane w pracy cytowanej w przypisie 11.

[19] Zagadnienie to również zostało rozwiązane w pracy cytowanej w przypisie 11.

[20] Popełniamy tu pewną niedbałość językową, mówiąc zamiennie o czasoprzestrzeni i jej modelu. Jest to zwyczaj dość powszechny wśród fizyków-teoretyków; na ogół nie prowadzi on do nieporozumień.

długości.[21] Co więcej, jeżeli struktura różniczkowa zawiera tylko funkcje stałe, to chociaż zbiór $\bar{M}$ z punktu widzenia teoriomnogościowego składa się z wielu punktów, struktura różniczkowa tych punktów nie rozróżnia (a zatem aksjomat Hausdorffa jest w sposób oczywisty niespełniony). Różniczkowo mamy więc do czynienia z przestrzenią składającą się z jednego punktu. A co za tym idzie osobliwość początkowa i końcowa są dla struktury różniczkowej tym samym punktem.

A więc jednak patologie czasoprzestrzeni zamkniętego modelu Friedmana z b-brzegiem, odkryte przez Bossharda i Johnsona, pozostają w mocy! Otóż w tym sęk, że nie. Metody snopów pozwalają rozważać strukturę różniczkową niekoniecznie nad całą przestrzenią $\bar{M}$ (tzn. czasoprzestrzenią z osobliwościami), lecz także nad dowolnym podzbiorem otwartym $U$ przestrzeni $\bar{M}$. Ponieważ $M$ jest podzbiorem otwartym w $\bar{M}$, ma sens struktura różniczkowa $\bar{C}(M)$ nad czasoprzestrzenią (bez osobliwości) zamkniętego modelu Friedmana. Co więcej, przestrzeń ustrukturalizowana $(M, \bar{C}(M))$ jest całkiem zwyczajną czasoprzestrzenią bez żadnych patologii.

Sytuacja jest zatem następująca. Jak długo pozostajemy wewnątrz czasoprzestrzeni, wszystko jest w porządku, żadne patologie nie występują, mamy do czynienia ze zwykłą czasoprzestrzenią zamkniętego modelu kosmologicznego Friedmana. Ale z chwilą, gdy tylko usiłujemy przedłużyć jakąś strukturę (strukturę różniczkową, pole wektorowe, krzywą, ...) z wnętrza czasoprzestrzeni na jej b-brzeg, aksjomat Hausdorffa zostaje złamany, a początkowa i końcowa osobliwość utożsamiają się.

Widzimy więc, że jeżeli rozważać b-brzeg w kategorii przestrzeni ustrukturalizowanych, to może on być traktowany jako dobra definicja osobliwości. Konstrukcja Schmidta zostaje więc zrehabilitowana. Patologie odkryte przez Bossharda i Johnsona nie kompromitują jej, jak to miało miejsce w kategorii gładkich rozmaitości, gdzie pozostawały bez wyjaśnienia, lecz tylko ukazują «złośliwy» charakter niektórych osobliwości.

Warto jeszcze dodać, że podobna analiza, jaką przeprowadziliśmy dla czasoprzestrzeni zamkniętego modelu Friedmana z b-brzegiem, stosuje się do czasoprzestrzeni Schwarzschilda z b-brzegiem: i w tym wypadku strukturę różniczkową można rozciągnąć z czasoprzestrzeni na jej b-brzeg, ale wtedy przestaje ona rozróżniać poszczególne punkty. Co więcej, słuszne jest twierdzenie, które mówi, że taka sama sytuacja ma miejsce we wszystkich wypadkach, w których włókna w wiązce reperów nad osobliwością redukuje się do punktu.[22]

---

[21] Wektor styczny (do krzywej) jest w istocie derywacją struktury różniczkowej. Jeżeli struktura różniczkowa zawiera tylko funkcje stałe, to derywacja jest równa zeru.

[22] M. Heller, W. Sasin, „ Sheaves of Einstein Algebras", *International Journal of Theoretical Physics*, **34**, 1995, 387-398.

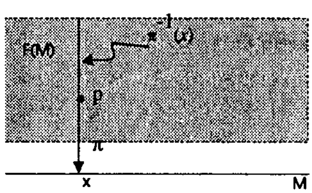
### 7. Demiurg Platona i zamknięty świat Friedmana

Powróćmy jeszcze do zamkniętego modelu kosmologicznego Friedmana. W świetle wyników zreferowanych w poprzednim paragrafie można na ten model patrzeć z dwu punktów widzenia. Z punktu widzenia obserwatora mieszkającego w świecie Friedmana wszystko jest tak, jak być powinno w «porządnym» relatywistycznym modelu wszechświata. Obserwator ten, uprawiając kosmologię, stwierdzi, że w jego skończonej przeszłości miał miejsce Wielki Wybuch, a w skończonej przyszłości nastąpi Wielki Koniec. Obserwatorowi nie wolno jednak «dotknąć» żadnej z tych dwu osobliwości. A «dotknąć» ją może, przedłużając na przykład pole wektorowe zdefiniowane na swojej czasoprzestrzeni do jej b-brzegu, czyli do osobliwości. Z chwilą, gdy to uczyni, osobliwości natychmiast się zlepią i wszystkie punkty czasoprzestrzeni staną się różniczkowo nierozróżnialne. Obserwator żyjący w zamkniętym świecie Friedmana nie może więc, pod groząswojego unicestwienia, « dotknąć» żadnej z dwu osobliwości.

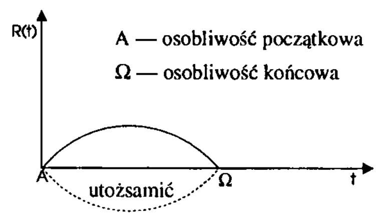
Ale można też rozważać zamknięty świat Friedmana z punktu widzenia «obserwatora zewnętrznego», na przykład z punktu widzenia Demiurga, który ten świat stworzył. Oczywiście Demiurg w swojej stwórczej działalności musi jakoś «dotykać» osobliwości. Przecież spowodował on, że w początkowej osobliwości świat rozpoczął swoją ewolucję. Demon musi więc w jakimś sensie operować strukturą różniczkową $\bar{C}$ rozciągniętą na czasoprzestrzeń $M$ z b-brzegiem, ale wówczas z jego perspektywy początek i koniec świata są tą samą chwilą. Oczywiście Demiurg może zacieśnić się do rozpatrywania struktury różniczkowej $\bar{C}(U)$ zawężonej do podzbioru otwartego $U$ czasoprzestrzeni $M$ (w szczególności do $U = M$) i wówczas może on obserwować, co dzieje się w danej części zamkniętego świata Friedmana (ewentualnie w całym świecie Friedmana, ale bez osobliwości). Przyjmuje on wówczas niejako perspektywę obserwatora wewnętrznego.

Jest to całkowicie nowa sytuacja w kosmologii, która mogłaby dostarczyć filozofowi materiału do refleksji. Oczywiście nie mam na myśli refleksji typu eschatologicznego. Rozważany tu model kosmologiczny (podobnie jak i inne modele współczesnej kosmologii) opiera się na zbyt wielu idealizacjach i uproszczeniach, by mógł pretendować do modelowania rzeczywistego świata we wszystkich jego, nawet tylko wielkoskalowych, szczegółach, a tym bardziej, by na jego podstawie wysnuwać wnioski teologiczne. Rozważany tu model kosmologiczny Friedmana nie może pretendować do wiernego opisywania rzeczywistego świata, choćby tylko z tego względu, że nie bierze on pod uwagę kwantowych własności pola grawitacyjnego. Tymczasem wszystko wskazuje na to, że nie można zbudować konsystentnej teorii «początku» i «końca» świata poza kosmologią kwantową. Jeżeli jednak nawet uproszczony model prowadzi do tak zaskakujących wniosków, jak możliwość utożsamienia początkowej i końcowej osobliwości, przy równoczesnym zachowaniu integralności całej historii świata w ocenie uczestniczącego w niej obserwatora, to na jakie zaskoczenia intelektualne powinniśmy być gotowi w kontakcie z rzeczywistością (gdybyśmy mieli do niej dostęp) lub z dokładniejszymi jej modelami? Wprawdzie do rzeczywistości nie mamy bezpośredniego dostępu, ale w filozoficznych spekulacjach warto sobie czasem pozwalać na tego rodzaju epistemologiczną fikcję.

Wezwanie do intelektualnej pokory jest jedną z najbardziej filozoficznych lekcji, jakie płyną ze współczesnej nauki. Lekcji tej można nauczyć się z wielu fizycznych teorii, ale zagadnienia, choćby luźno związane z początkiem i końcem kosmicznej historii, dodają tej lekcji specyficznych akcentów.



Rys. 1



Rys. 2