Anna Kanik

Kulturowe determinanty matematyki

Filozofia Nauki 3/1/2, 69-77

1995

Filozofia Nauki
Rok III, 1995, Nr 1-2(9-10)

Anna Kanik

Kulturowe determinanty matematyki

Druga połowa XX wieku to renesans zainteresowań empiryzmem w filozofii matematyki. Wcześniej, na przełomie wieków, prawie cała uwaga matematyków i filozofów skupiona była na badaniu podstaw matematyki. Powstały wtedy trzy kierunki filozofii matematyki: logicyzm, intuicjonizm i formalizm. Wraz z rozwojem badań nad podstawami matematyki powstała nowa dziedzina wiedzy — metamatematyka. Dla niej to matematyka stała się przedmiotem badań naukowych. Właśnie w obrębie metamatematyki zostało udowodnione twierdzenie, które w sposób istotny wpłynęło na dalsze losy filozofii matematyki. Mowa tu o podanym w 1931 roku przez Gödla twierdzeniu o nierozstrzygalności arytmetyki. Okazało się, że trzeba znaleźć odpowiedź na pytanie, dlaczego mamy taką, a nie inną arytmetykę.

W związku z tym, że badania podstaw nie przyniosły zadowalających rozwiązań problemu poznania matematycznego, w drugiej połowie XX wieku zainteresowania filozofów matematyki przeniosły się na badanie nie tylko wytworów poznania, lecz również sposobów i procesów kształtowania się idei matematycznych. Rozciągnięto zakres badań na praktykę matematyczną i wykorzystano wyniki uzyskane w filozofii nauki do opisu rozwoju wiedzy matematycznej. Na przykład Lakatos przedstawił program filozofii matematyki w duchu Popperowskiego falsyfikacjonizmu. Skoro program Hilberta, wobec twierdzeń Gödla, jest nie do utrzymania, a badania zmierzające do ugruntowania matematyki na oczywistych, jasnych i intuicyjnie prawdziwych aksjomatach prowadzą do coraz bardziej kontrowersyjnych i rodzących paradoksy wyników, to filozofowie matematyki powinni zająć się nie poszukiwaniem podstaw, lecz wyjaśnianiem mechanizmów rozwoju wiedzy matematycznej. Zgodnie z tym programem, w książce *Proofs and Refutations*, na przykładzie dowodu formuły Eulera, Lakatos przedstawił koncepcję rozwoju matematyki jako nieustającego ciągu budowania dowodów i znajdowania kontrprzykładów, stawiania hipotez i ich odrzucania. Wykorzystując dane historyczne Lakatos pokazał, że matematyka jest «omylna» i podlega wahaniom, nie jest wolna od niejasności i przeoczeń, i jest w tym podobna do innych nauk przyrodniczych. Kierunek w filozofii matematyki — odwołujący się do badań historycznych nad rozwojem matematyki — Lakatos nazwał „*quasi*-empiryzmem". Ideę tę wykorzystali filozofowie, którzy jednak nie podzielali sympatii do Popperowskiej filozofii nauki.

W artykule niniejszym chciałabym przedstawić stanowisko w filozofii matematyki ukształtowane pod wpływem koncepcji paradygmatów Kuhna. Stanowisko to zwraca uwagę na oczywisty fakt, że matematyka jest wytworem aktywności społecznej i w związku z tym badając rozwój matematyki nie można pominąć kulturowych uwarunkowań rozwoju matematyki. Wyjdę więc od badań Wildera, dostarczających opisu praktyki matematycznej w kategoriach filozoficznych i kulturowych. Następnie zreferuję poglądy Garbiner, która zanalizowała rozwój rachunku różniczkowego na przełomie XVIII i XIX wieku. Dalej przedstawię krytykę tezy o niezmienności i kumulatywności wiedzy matematycznej przeprowadzoną przez Kitchera oraz jego rozwinięcie idei Kuhna w odniesieniu do matematyki.

* * *

Na kulturę — według Wildera — składa sie zbiór zwyczajów rytuałów, wierzeń, narzędzi itd. Są to tzw. elementy kultury będące w posiadaniu określonej grupy ludzi. Na kulturę matematyczną «składają się»: czasopisma, książki, konferencje oraz matematycy, nauczyciele i ludzie poznający matematykę.

Wilder wyjaśnia, dlaczego zmiany w kulturze matematycznej są stosunkowo nieuchwytne. Dzieje się tak dlatego, że matematykę uprawia niewielka i rozsiana grupa ludzi. Spotkania matematyków są relatywnie rzadkie. Uczniowie tracą na ogół kontakt z matematyką po skończeniu szkoły średniej: dopiero ewentualnie jako rodzice pomagają swoim dzieciom przy rozwiązywaniu zadań szkolnych. Współcześnie matematyka ma ponadnarodowy, uniwersalny język, odrębny od języków etnicznych i ewoluujący niezależnie od tych ostatnich. Mimo to, z większej perspektywy czasowej nie mamy jednak oporów, by mówić o różnych typach matematyk: o matematyce starożytnych Chin, Babilonu, Indii, Egiptu, Grecji itd. Były to różne typy matematyk, bo matematyka babilońska była algorytmiczna, egipska miała nastawienie praktyczne, chińska zajmowała się algebrą, a grecka geometrią.

O socjalnym uwarunkowaniu kultury matematycznej świadczy np., według Wildera, fakt zainteresowania się pewną dziedziną matematyki przez wielu badaczy w jednym czasie. Do 1900 roku w indeksie książki Bella *Developments of Mathematics* były tylko cztery nieistotne odnośniki dotyczące logiki matematycznej. W wydaniu 1950 roku indeks zawierał już ich bardzo dużo, a na 25 stronach tekstu wyjaśniano, czym jest logika matematyczna.

Wilder porusza problem tego, jak własności języka etnicznego wpływają na akceptowane sposoby rozumowania. Wskazuje np. na społeczności, gdzie stosuje się myślenie magiczne i w których prawdopodobnie nie doszłoby w związku z tym do sformułowania prawa wyłączonego środka. Powołuje się na badania Malinowskiego, zgodnie z którymi są społeczności, w których nie szereguje się zdarzeń czasowo, a zatem brak tam myślenia przyczynowo-skutkowego. Trudno więc mówić o ufundowaniu matematyki na uniwersalnych zasadach logiki, skoro intuicje leżące u ich podstaw są zdeterminowane kulturowo. Jak wiadomo, w starożytnej Grecji nie było algebry, a w Chinach nie było geometrii. Za pośrednictwem Arabów algebra w czasach Odrodzenia dotarła do Europy i dopiero geniusz Kartezjusza dokonał syntezy algebry z dobrze znaną Europejczykom geometrią. Ale warunkiem pojawienia się Kartezjusza — i każdego «wielkiego człowieka» — było istnienie odpowiedniego środowiska kulturowego.

Wilder wskazuje na czynniki społeczne, które przyczyniły się do wielkiego rozwoju matematyki w XX wieku. W tym czasie powstało wiele uniwersytetów, organizacji naukowych, fundacji i bibliotek — zmieniły się dotychczasowe warunki organizacji pracy matematyków. Z przyczyn politycznych i ekonomicznych nastąpiło zderzenie wielu kultur, a wzrost emigracji z Polski i Niemiec do USA umożliwił spotkanie się przedstawicieli różnych gałęzi matematyki oraz rozwój jej nowych dziedzin.

* * *

W przeciwieństwie do Kuhna, który zastrzegał się, że jego teoria paradygmatów nie odnosi się do matematyki, Garbiner pokazuje, że również w historii matematyki można wydzielić okresy nauki normalnej i okresy rewolucji naukowych. Zaksjomatyzowanie geometrii przez Euklidesa, sformułowanie geometrii nieeuklidesowych, konstrukcja algebr nieprzemiennych, rozwój logiki matematycznej — to przykłady rewolucji naukowych. Garbiner skoncentrowała się na opisaniu rewolucji z przełomu XVIII i XIX wieku, która związana była z rachunkiem różniczkowym.

Według Garbiner rewolucja ta polegała na tym, że różne metody wypracowane w XVIII wieku, związane z przybliżonym rozwiązywaniem równań różniczkowych, zostały jakby odwrócone w XIX wieku i wykorzystane dla dowodzenia twierdzeń ogólnych i formułowania definicji. Na przykład odwrócenie metody aproksymacji dało definicję ε-δ Cauchy'ego.[1] Przy badaniu zbieżności obliczano błąd przybliżenia. Obecnie w warunku zbieżności najpierw zadaje się błąd ε i dla niego szuka się takiego elementu dziedziny, że począwszy od tego elementu dla każdego elementu dziedziny spełniona jest odpowiednia nierówność. Następnie wykazuje się, że warunek ten jest spełniony przy dowolnie małym ε, tj. jego spełnienie nie zależy od wielkości zadanego błędu.

[1] Definicja Cauchy'ego granicy ciągu brzmi: Liczbę a nazywamy *granicą ciągu* (a_n), jeśli dla każdej liczby $\varepsilon > 0$ istnieje taka liczba n_0, że nierówność $|a_n - a| < \varepsilon$ zachodzi dla każdej liczby naturalnej $n > n_0$. Analogicznie skonstruowane są: definicje Cauchy'ego zbieżności szeregów, granicy funkcji w punkcie i warunek ciągłości funkcji.

Zdaniem Garbiner w XVIII wieku rozwój wiedzy matematycznej odbywał się w sposób zupełnie nieusystematyzowany: nie przywiązywano wielkiej wagi do ścisłości rozumowań — celem było osiągnięcie jak największej liczby nowych wyników i rozwiązanie konkretnych zadań. Do rozwinięcia standardów rygoru matematycznego przyczyniły się czynniki zewnętrzne. Kiedy zastosowano rachunek różniczkowy w balistyce dla obliczania toru ruchu kul armatnich, okazało się, że bitwy wygrywa ta armia, która ma lepiej matematycznie wykształconych specjalistów. Po Rewolucji Francuskiej zaczęto powszechnie uczyć matematyki w szkołach. To z kolei wymusiło refleksję nad jej podstawami, jak również wypracowanie standardu rygoru tak, aby pilnować ścisłości swoich wypowiedzi oraz jasno określić wymagania stawiane uczniom. Charakterystyczne, że prace z podstaw rachunku różniczkowego Dedekinda, Cauchy'ego i Weierstrassa znane były z wykładów, lecz nie były publikowane przez nich w czasopismach fachowych.

* * *

Dlaczego matematycy stawiają różne zagadnienia w różnych czasach? Dlaczego zarzucają pewne formy języka? Dlaczego pewne zagadnienia stawia się jako ważne, a inne odrzuca? Dlaczego zmienia się style dowodów? Aby odpowiedzieć na te pytania, trzeba według Kitchera potraktować matematykę w taki sam sposób, w jaki bada się nauki przyrodnicze. Wymaga to obalenia mitu odrębności poznania matematycznego od poznania przyrodniczego. Kitcher odrzuca pogląd, że wobec braku wpływu danych obserwacyjnych na matematykę, jej ewentualne zmiany muszą mieć inną przyczynę — że rozwój matematyki rządzi się innymi prawami niż rozwój pozostałych nauk. Kontrargumentacja Kitchera idzie dwiema drogami:

1. Nie jest prawdą, co wykazał Kuhn, że nauki się zmieniają **tylko** pod wpływem danych obserwacyjnych. Zmiany te występują również w wyniku zmian pojęciowych, zmian sposobów ujmowania podobnych zjawisk oraz zmian metodologicznych, tj. zmian akceptowanych reguł uzasadnienia. Naukowcy podejmują problemy stawiane w aktualnie istniejących teoriach. Niektóre z pytań są bliskie danym obserwacyjnym, ale niektóre z nich są wysoce teoretyczne. Na przykład Newton rozpatrywał zagadnienie, czy teoria grawitacji nie stoi w sprzeczności z tezą o nieoddziaływaniu na odległość. Darwin musiał wyjaśnić konflikt między jego teorią pochodzenia gatunków, a geofizycznymi oszacowaniami wieku Ziemi. Zagadnienia te nie wynikały jedynie z danych obserwacyjnych. To całość wiedzy wymuszała poszukiwania odpowiedzi na te pytania. Kitcher stwierdza, że zmiany w matematyce dokonują się właśnie w analogiczny sposób poprzez konflikty, napięcia i niezgodności z całością aktualnej wiedzy.

2. Byłoby uproszczeniem uznawać, że zmiany w matematyce nigdy nie są stymulowane przez dane obserwacyjne. Oto Euler spacerując po siedmiu mostach w Królewcu postawił zagadnienie, czy można przejść przez nie wszystkie tak, by po żadnej z dróg nie przejść dwa razy. Poszukując rozwiązania rozwinął teorię grafów. Pascal w związku z hazardem rozpoczął badania rachunku prawdopodobieństwa. Podobną stymulującą

rolę odegrał znany problem czterech barw w kartografii. Również teoria katastrof rozwinęła się bezpośrednio pod wpływem «bodźców» obserwacyjnych. Warto dodać, że nieścisłości pojęć matematycznych odkrywane były pod wpływem niepowodzeń w zastosowaniu ich w fizyce. Tak było m.in. w analizie XVIII i XIX wieku.

Analizując problem kumulatywności wiedzy, Kitcher przytacza przykłady «wielkich debat», dotyczących matematyki: Newtona z Leibnizem na temat rachunku różniczkowego, dyskusje dotyczące aksjomatyzacji liczb rzeczywistych oraz teorii zbiorów nieskończonych Cantora. Zwolennicy kumulatywności wiedzy matematycznej twierdzą, że wiele prawd matematycznych uznajemy niezmiennie od czasów starożytnych. Kitcher przypomina, że istnieją również zdania o obiektach fizycznych, uznawane za prawdziwe od starożytności: że pióro pływa po wodzie, że Słońce wschodzi na wschodzie itd. Należy tutaj skądinąd zachować wielką ostrożność, gdyż zarówno w fizyce, jak i w matematyce zdania o podobnym brzmieniu mogą być inaczej rozumiane: inaczej rozumiemy pojęcie „liczby" obecnie, podobnie jak inaczej niż dawniej rozumiemy dziś pojęcie „wody". Zwolennicy kumulatywności matematyki argumentują w sposób następujący: jeśli zdanie matematyczne było akceptowane w pewnym czasie i następnie odrzucone, to ci, którzy pierwotnie je akceptowali, robili to w sposób nieuprawniony. Kontrargumentem mogą tu być twierdzenia geometrii euklidesowej i nieeuklidesowej. Wrażenie kumulatywności wiedzy matematycznej bierze się stąd, że matematyka ma dobre środki reinterpretacji. Newtonowska metoda «fluksji» jest bardzo odmienna od współczesnej analizy, a Hamiltonowska teoria kwaternionów w niczym prawie nie przypomina współczesnej algebry liniowej; obie te teorie jednak w pewnym sensie «żyją» we współczesnej matematyce. Zwolennikom kumulatywności wiedzy matematycznej pozostaje jednakże argument, że nie możemy znaleźć w matematyce teorii analogicznych do teorii takich, jak teoria ruchu Arystotelesa lub teoria flogistonu, które w fizyce zostały zarzucone kompletnie. Kitcher wyjaśnia brak tej analogii specyfiką celu poznania matematycznego.

Wychodzi więc od opisu różnic w rozwoju geometrii nieeuklidesowej i tlenowej teorii spalania. Po około dwutysiącletnich próbach udowodnienia piątego postulatu Euklidesa, trzech matematyków — Łobaczewski, Bolyai i Gauss — zdecydowało się badać konsekwencje dodania do pierwszych czterech aksjomatów zdania postulującego istnienie wielu równoległych. Okazało się, że tak skonstruowana geometria jest niesprzeczna. Zaakceptowano ją więc jako część matematyki i rozwijano badania, mające na celu znalezienie charakterystyk odróżniających geometrie nieeuklidesowe od euklidesowej. Na gruncie badań matematycznych nie było potrzeby dokonywania wyboru pomiędzy tymi geometriami (mimo że Gauss dokonywał pomiarów mających rozstrzygnąć, czy fizyczna przestrzeń jest nieeuklidesowa). Inaczej natomiast było z teorią spalania. Teoria flogistonowa postulowała, że coś się uwalnia z substancji spalanych; tym czymś miał być flogiston. Tlenowa teoria spalania Lavoisiera postulowała nie emisję lecz absorpcję składnika powietrza. Po 1800 roku większość fizyków zajęła się badaniem teorii tlenowej, porzuciwszy flogistonową. Tak więc teorie fizyczne są porzucane, a matematyczne — zdają się pokojowo «współistnieć».

Geometrie Euklidesa i Łobaczewskiego obie należą do matematyki dlatego, że poprawnie opisują dwa różne obiekty. Geometria Euklidesa opisuje przestrzeń euklidesową, a geometria Łobaczewskiego pewien rodzaj przestrzeni nieeuklidesowej. Obie przetrwały w matematyce, ponieważ **obie** są obecnie interpretowane inaczej niż w momencie konstruowania. Od czasów Kartezjusza do czasów Gaussa, Bolyai i Łobaczewskiego, matematycy nie odróżniali przestrzeni geometrycznej od przestrzeni fizycznej. Geometria Euklidesa była częścią matematyki i zarazem częścią fizyki. Badania matematyczne pokazały, że istnieje konkurencyjna teoria przestrzeni fizycznej. Matematycy wypracowali sobie nową interpretację starej i nowych geometrii, a pytanie, która z nich jest geometrią przestrzeni fizycznej, pozostawili do rozstrzygnięcia fizykom. Tak więc nastąpiła zmiana sposobu interpretacji tego, czym jest geometria, i w związku z tym pytanie dotyczące przestrzeni fizycznej przestało być pytaniem matematycznym — matematycy nie są zatem zobowiązani do poszukiwania na nie odpowiedzi.

Taka sytuacja w matematyce jest regułą. Początkowo matematyka obejmowała — poza geometrią i arytmetyką —optykę, astronomię i akustykę. Jak doszło do oddzielenia się tych dziedzin nauki? Dawne badania dotyczące światła, dźwięku i przestrzeni Kitcher dzieli na te, które budowały **możliwości** kontrukcji teorii (zadanie matematyków) i te, które sprawdzały adekwatność tych teorii (zadanie nauk przyrodniczych). Kiedy następuje oddzielenie pewnych dziedzin od matematyki, to problem konkurujących teorii rozwiązuje się w jej obrębie w drodze reinterpretacji tych teorii. Metody tej reinterpretacji dają właśnie silne złudzenie kumulatywności wiedzy matematycznej.

Kitcher uważa mechanizm zmian w matematyce za racjonalny. „Racjonalność" rozumie przy tym następująco. Oto pojawia się pytanie domagające się odpowiedzi. Odpowiedź wymaga wprowadzenia nowych pojęć, lub zmiany dotychczasowych. Racjonalna jest taka zmiana, że zyski z jej wprowadzenia (uzyskane odpowiedzi) są wyższe od strat (ryzyko związane z użyciem nowych pojęć). Kartezjusz uzyskał odpowiedzi na zgromadzone przez Pappusa nierozwiązane zagadnienia z geometrii, z których wiele sformułowano już w starożytnej Grecji. Teoria liczb zespolonych, do której początkowo podchodzono podejrzliwie i którą uważano za bezużyteczną, rozwinęła się gwałtownie, gdy przekonano się jak silnym narzędziem jest ona dla analizy.

Zdaniem Kitchera jest pięć czynników, które trzeba uwzględnić przy badaniu zmian praktyki matematycznej: język praktyki, zbiór poglądów metamatematycznych, zbiór akceptowanych problemów, zbiór akceptowanych rozumowań, zbiór akceptowanych zdań. Zmiana języka — to zmiana pojęć. Zmianą języka jest np. dopuszczenie do używania pojęcia „liczby" w odniesieniu do liczb zespolonych. W szesnastowiecznej matematyce oczywiście można było sformułować zdanie „Istnieje liczba, której kwadrat jest równy -1", ale zdanie to było fałszywe, wobec ówczesnego rozumienia pojęcia „liczby" i operacji podnoszenia do kwadratu. Współcześnie zdanie to nie jest fałszywe. Można mu co najwyżej zarzucić nieprecyzyjność i domagać się uzupełnienia.

Zmiany zbioru akceptowanych zdań zachodzą pod wpływem zmian języka. Przykładem jest zmiana zdania „Nie istnieje liczba, której kwadrat jest równy –1" na zdanie „Nie istnieje liczba rzeczywista, której kwadrat jest równy –1". Oprócz zdań, które są reinterpretowane, są w historii matematyki zdania, które zostały odrzucone. Kitcher podaje przykład rachunku kwaternionów. Hamilton przedstawił nowy rodzaj «liczb» analogiczny do liczb zespolonych, pozwalający opisywać przestrzenie czterowymiarowe. Współcześnie zrezygnowano z uznawania kwaternionów za liczby. Teoria Hamiltona obecnie jest tylko przykładem jednej z wielu algebr.

Do zbioru akceptowanych rozumowań zalicza Kitcher dowody oraz metody rozwiązywania problemów. Wyróżnia on dwie funkcje dowodów. Pierwsza — to sposób otrzymywania nowej wiedzy przy pomocy wiedzy dotychczasowej. Funkcja ta w dużym stopniu określana jest przez poglądy metamatematyczne. Druga — to zwiększanie naszego rozumienia twierdzeń matematycznych i wydzielanie zbioru zdań, z których one wynikają. W matematyce występują też sposoby rozumowania inne niż dowody. W historii matematyki można znaleźć sporo przykładów rozumowań przez analogię czy uogólnień akceptowanych bez dowodów; wprowadzane są także nowe metody dowodów jako uprawnione, a stare czasem odrzucane.

Kitcher uważa, jak się zdaje, że zmiany w zbiorze akceptowanych problemów mają najsilniejszy wpływ na zmiany w matematyce. Zmiany w tym zbiorze mają wpływ na zmiany języka, metod rozumowania i zbioru zdań akceptowanych. Próby odpowiedzi na wiele dobrze postawionych pytań były istotnym czynnikiem rozwoju matematyki. Zagadnienia Fermata wytyczyły drogi badań w teorii liczb, a sporządzona przez Hilberta lista problemów matematyki do rozwiązania w XX wieku jest uważana za jedno z wielkich jego osiągnięć w matematyce.

Ostatni składnik praktyki matematycznej to stanowisko metamatematyczne obejmujące: (i) uznany standard dowodu, (ii) pogląd na to, czym jest dziedzina badawcza matematyki, (iii) przyjęty podział dyscyplin, (iv) relatywne wartościowanie poszczególnych typów badań w matematyce. W praktyce stanowisko metamatematyczne rzadko jest *explicite* formułowane. To, w jaki sposób należy uprawiać matematykę, jest przekazywane przez nauczycieli we wczesnych stadiach procesu nauczania nierzadko metodą, będącą rodzajem indoktrynacji. Kitcher podaje trzy przykłady odmiennych stanowisk metamatematycznych:

1. Matematyka współczesna:

(i) dowód powinien być w zasadzie formalizowalny; mimo że formalne dowody nie są wymagane, to przedstawianie dowodów powinno być takie, żeby można było je poddać prawie mechanicznie formalizacji (wśród matematyków mogą tu występować różnice zdań co do języka formalizacji);

(ii) cała matematyka może być przedstawiona w standardowej teorii mnogości ZF;

(iii) teoria mnogości jest podstawową dyscypliną matematyczną; w szczególności teoria mnogości poprzedza arytmetykę i analizę; analiza poprzedza geometrię;

(iv) specjalne badania przypadków szczegółowych zwykle są mniej użyteczne niż dociekania bardziej ogólne; teoria funkcji rzeczywistych powinna być rozwijana jako przypadek szczególny teorii funkcji określonych na przestrzeniach metrycznych, algebra liczb zespolonych powinna być rozpatrywana jako część badań ciał o charakterystyce zero.

2. Matematyka czasów Newtona, Cotesa, Maclaurina i Robinsa:

(i) dowody są ciągami zdań takimi, jak u Euklidesa (lub w *Principiach* Newtona);

(ii) matematyka zawiera arytmetykę, geometrię i kinematykę;

(iii) kinematyka i geometria są fundamentalnymi dyscyplinami matematycznymi;

(iv) badania algebraiczne są uprawnione wtedy, gdy można podać dla nich interpretację geometryczną, arytmetyczną lub kinematyczną.

3. Matematyka czasów Bolzana:

(i) dowód matematyczny nie powinien odwoływać się do intuicji;

(ii) matematyka jest nauką o wielkościach (a wielkości są tym, co można dodawać, odejmować, mnożyć i dzielić);

(iii) algebra — nauka o wielkościach w ogólności — jest fundamentalną dyscypliną matematyczną; arytmetyka i analiza jest odgałęzieniem algebry, geometria zaś wyrasta z analizy;

(iv) ogólne badania algebraiczne bez interpretacji geometrycznej są nie tylko uprawnione, lecz bardzo ważne dla przyszłości matematyki.

Skoro zmiany w zbiorze akceptowanych problemów są jednym z czynników wpływających na zmiany w praktyce matematycznej, należy zapytać, w jaki sposób pewne zagadnienie matematyczne zostaje uznane za ważne. Interesujące problemy matematyczne mają różne źródła. Jedne wypływają z zapotrzebowań praktycznych: np. optymalizacja zorganizowania stanowisk w hali produkcyjnej stawia problemy rozwiązywane w teorii grafów. Zastosowania matematyki w naukach eksperymentalnych są źródłem innych pytań. W samej matematyce naturalnie pojawiają się również nowe zagadnienia: np. pytania o możliwość uogólnienia pewnych metod obliczania, czy pytania o warunki konieczne i wystarczające danych własności. Są też pytania dotyczące uogólnień niebanalnych, tj. takich, przy których język matematyki jest istotnie rozszerzany (przykładem jest teoria liczb pozaskończonych Cantora), przy czym rozszerzenie takie wymaga reinterpretacji wcześniejszych teorii, podobnych do reinterpretacji opisanej w przypadku geometrii.

* * *

Wyniki badań nad praktyką i historią matematyki można ująć w skrócie następująco:

1. Matematyka zmienia się w czasie.

2. Praktyka matematyczna zależy od kultury danej społeczności. Zmiany kulturowe mają wpływ na sposób uprawiania matematyki.

3. Osiagnięcia poszczególnych matematyków są skorelowane z ogólnym poziomem współczesnej im wiedzy matematycznej.

4. Rodzaj standardów metodologicznych związany jest ze stanem komunikacji między matematykami.

5. Wiedza matematyczna nie gromadzi się kumulatywnie. Nowe koncepcje matematyczne mogą być okazją do odrzucenia pewnych idei lub reinterpretacji dotychczasowych wyników matematycznych.

6. Zmiany w matematyce mają charakter racjonalny; są stymulowane poszukiwaniem odpowiedzi na ważne pytania.

7. W historii matematyki obowiązywały różne paradygmaty metamatematyczne, określające, czym jest matematyka i jakie są dopuszczalne w niej metody uzasadniania.

BIBLIOGRAFIA

Davis P.J., Hersh R.

[1981] *The Mathematical Experience*, Birkhäuser, Boston.

[1986] *Descartes' Dream*, Harvester Press, Brighton.

[1994] (tłumaczenie [1981]) *Świat matematyki*, (tłum. R.Duda), PWN, Warszawa.

Garbiner J.V.

[1986] „Is Mathematical Truth Time-Dependent", [w:] Tymoczko [1986]

Kitcher P.

[1984] *The Nature of Mathematical Knowledge*, Oxford University Press, New York.

Lakatos I.

[1967] *Problems in the Philosophy of Matematics*, North- Holland Publishing Company, Amsterdam.

[1991] *Proofs and Refutations, The Logic of Mathematical Discovery*, Cambridge University Press, New York.

Murawski R.

[1986] „Humanizacja matematyki, czyli o nowych prądach w filozofii matematyki", *Studia Filozoficzne* nr 8.

Tymoczko T.

[1986] *New Directions in the Philosophy of Mathematics. An Anthology*, Birkhäuser, Boston.

[1994] „Zróbmy miejsce matematykom!" (tłum. A.Kanik), *Principia*, vol. X-XI .

Wilder R.

[1981] *Mathematics as a Cultural System*, Pergamon Press, Oxford.

[1986] „The Cultural Basis of Mathematics", [w:] Tymoczko [1986].