Krzysztof Wójtowicz

Wokół problemu realizmu teoriomnogościowego

Filozofia Nauki 3/4, 113-130

1995

Filozofia Nauki
Rok III, 1995, Nr 4(12)

Krzysztof Wójtowicz

Wokół problemu realizmu teoriomnogościowego

Artykuł ten jest poświęcony zagadnieniu istnienia obiektów matematycznych. We współczesnej dyskusji filozoficznej na ten temat można wyróżnić dwa podstawowe typy argumentów na rzecz istnienia tych obiektów: (1) argumenty pochodzące od Gödla i (2) argumenty z niezbędności. W pierwszej części omówiona jest koncepcja Gödla, w drugiej analizowany jest argument z niezbędności Quine'a-Putnama; podana jest też propozycja jego uszczegółowienia.

I

1. Zagadnienie istnienia obiektów matematycznych jest jednym z podstawowych problemów filozofii matematyki. W odniesieniu do kwestii istnienia przedmiotów matematycznych (czy ogólniej abstrakcyjnych) można wyróżnić dwa podstawowe stanowiska: stanowisko nominalistyczne i stanowisko realistyczne.[1] Mówiąc najogólniej, nominaliści twierdzą, że obiekty abstrakcyjne (w szczególności zbiory, klasy, atrybuty, własności, przedmioty matematyczne) nie istnieją. Realiści, w przeciwieństwie do nominalistów, zakładają istnienie tego typu obiektów.

Dyskusja pomiędzy realistami a nominalistami nie jest nowa i prowadzona była w szerszym kontekście niż problem istnienia obiektów matematyczych. Współczesnymi reprezentantami stanowiska nominalistycznego w filozofii matematyki są np Field [1980] i Chihara [1982]. Realiści reprezentowani są np. przez Fregego, Cantora[2], Har-

[1] Jest to z konieczności mało precyzyjna charakterystyka. W artykule nie będziemy zajmować się stanowiskami konceptualistycznymi (Brouwer, Heyting, współcześnie np. Tharp). Inne propozycje (np. strukturalizm modalny Hellmana) należą do jednej z tych dwóch kategorii, choć oczywiście różnią się między sobą.

[2] Cantor uważa, że rzeczywistość matematyczna istnieje w sposób obiektywny, matematyk jedynie ją opisuje: „Jeśli zaś chodzi o rzeczy pozostałe [mianowicie o rzeczy poza stylem i sposobem przedstawienia], to wszystko to nie jest moją zasługą; w stosunku do treści moich prac jestem jedynie sprawozdawcą i urzędnikiem

dy'ego[3], Bernaysa i Gödla, który jest chyba najbardziej znanym reprezentantem platonizmu w matematyce. Wprawdzie sam Gödel nie opublikował zbyt wiele prac na temat filozofii matematyki (wiedzę na temat jego poglądów czerpiemy głównie z [1944] i [1947/64]), jednak wpływ Gödla na filozofię matematyki (zarówno bezpośrednio — poprzez publikacje i wypowiedzi o charakterze filozoficznym, jak i pośrednio — poprzez wyniki formalne) był ogromny. Przypomnimy tu pokrótce jego poglądy filozoficzne.

Według Gödla obiekty matematyczne istnieją w sposób obiektywny, niezależny od matematyków i ich aktywności poznawczej:

> ...Założenie istnienia takich obiektów jest równie uzasadnione, jak założenie istnienia ciał fizycznych, i jest równie wiele powodów, aby wierzyć w ich istnienie. Są w takim samym sensie niezbędne do tego, aby zbudować zadowalającą teorię matematyki, w jakim ciała fizyczne są niezbędne do tego, aby sformułować zadowalającą teorię wrażeń zmysłowych [Gödel 1944, 220].

Sama matematyka ma, według Gödla, pewien obiektywnie istniejący przedmiot badań. Sprzeciwia się on próbom formalistycznego interpretowania matematyki, widząc w nich przejaw pewnej ogólniejszej tendencji, która w stosunku do matematyki nie może być w sposób skuteczny zastosowana:

> Schemat teorii bezklasowej [Gödel ma tu na myśli koncepcję Russella] jest bardzo ciekawy jako jeden z niewielu szczegółowo przeprowadzonych przykładów realizacji tendencji, zmierzającej do wyeliminowania założeń dotyczących istnienia obiektów poza «danymi» i zastępowania ich konstrukcjami opartymi na tych danych. Wynik uzyskany w tym wypadku był w istocie rzeczy negatywny; klasy i pojęcia wprowadzone w ten sposób nie mają wszystkich potrzebnych w matematyce własności. [...] Wszystko to jest argumentem na rzecz stanowiska [..], że logika i matematyka (podobnie jak fizyka) oparte są na mających rzeczywistą treść aksjomatach, których nie da się «wyeliminować poprzez wyjaśnienie» [Gödel 1944, 223-224].

Przyjęcie koncepcji realistycznej rodzi szereg problemów natury epistemologicznej. Propozycja Gödla rozwiązania tych problemów opiera się na pojęciu intuicji matematycznej, która umożliwia nam poznawanie świata obiektów matematycznych:

> ...Chociaż są one tak odległe od danych zmysłowych, mamy coś w rodzaju percepcji także obiektów teorii mnogości, co widać stąd, że aksjomaty narzucają się nam jako prawdziwe. Nie widzę powodu, aby mieć mniej zaufania do tego rodzaju percepcji, tj. do intuicji matematycznej, niż do percepcji zmysłowej, która pozwala nam budować teorie fizyczne oraz wierzyć, że przyszłe wrażenia zmysłowe będą z nimi zgodne i, co więcej, że pewne kwestie obecnie nierozstrzygalne mogą być rozstrzygnięte w przyszłości. Paradoksy teoriomnogościowe nie stanowią tu dla matematyki większego problemu niż złudzenia zmysłowe dla fizyki. [...] Mogą one [tzn. dane intuicji matematycznej] reprezentować aspekt obiektywnej rzeczywistości, ale, w przeciwieństwie do danych zmysłowych, ich obecność w nas może wynikać z innego rozdzaju związku pomiędzy nami a rzeczywistością [Gödel 1947/64, 271-272]

Postulowanie istnienia szczególnej formy percepcji obiektów matematycznych inspirowane jest obserwacją, że matematycy mają podobne poglądy na prawdziwość zdań matematycznych. Przyjęcie tej hipotezy umożliwia jednocześnie wytłumaczenie tego zjawiska.

(*nur Berichterstatter und Beamter*)" (cytat za [Murawski 1984]).

[3] „Osobiście zawsze uważałem matematyka przede wszystkim za obserwatora — człowieka, który obserwuje odległe pasmo górskie i odnotowuje swoje obserwacje. Jego zadaniem jest jasne wyodrębnienie i opisanie innym tylu szczytów, ile to tylko jest to możliwe" [Hardy 1925,18].

Drugim używanym przez Gödla argumentem na rzecz stanowiska realistycznego jest argument «z owocności». Jego punktem wyjścia jest obserwacja, że pewne założenia matematyczne same z siebie nie są oczywiste, a jednak odgrywają istotną rolę w porządkowaniu teorii i mają ważne i naturalne konsekwencje «niższego szczebla». Gödel pisze więc:

> Mogą istnieć aksjomaty o tak licznych sprawdzalnych konsekwencjach, rzucające tak wiele światła na cały przedmiot badań i dostarczające tak mocnych metod rozwiązywania problemów (a nawet w miarę możliwości metod konstruktywnych), że niezależnie od tego, czy są one immanentnie konieczne, powinny zostać zaakceptowane przynajmniej w takim sensie, jak dowolna dobrze ugruntowana teoria fizyczna [Gödel 1947/64, 265].

Dalej znajdujemy wypowiedź, która podsumowuje w jakimś sensie poglądy Gödla na kwestie uzasadniania prawdziwości aksjomatów:

> Poza intuicją matematyczną istnieje inne (choć jedynie uprawdopodabniające) kryterium prawdziwości aksjomatów matematycznych, a mianowicie ich owocność w matematyce i — można by dodać — w fizyce [Gödel 1947/64, 272].

Stanowisko platonistyczne budzi liczne kontrowersje. Przytoczmy najpierw pogląd zwolennika tego poglądu, wskazującego jego istotne zalety:

> 1. [Platonizm] dobrze wyjaśnia pojęcie „prawdy" w matematyce. [...]
> 2. Platonizm wyjaśnia nasze intuicje, nasze psychologiczne odczucie, że różne twierdzenia są i muszą być naprawdę prawdziwe.[...]
> 3. Pogląd platonistyczny umożliwia jednolite spojrzenie na naukę i matematykę [Brown 1990, 98-99].

Wśród krytyków koncepcji Gödla (czy ogólniej platonizmu) często używanym argumentem jest argument epistemologiczny. Otóż jeżeli obiekty matematyczne są abstrakcyjne, istnieją poza czasem i przestrzenią, to w jaki sposób mielibyśmy je poznawać? Problem ten akcentują zwłaszcza zwolennicy kauzalnej teorii wiedzy. Według Benacerrafa zastosowanie klasycznej koncepcji prawdy w matematyce wymaga postulowania istnienia szczególnych form percepcji obiektów matematycznych [Benacerraf 1973, 409]. Podane przez Gödla rozwiązanie, opierające się na pojęciu intuicji, uznaje on za niezadowalające, mało precyzyjne. Odnosząc się bezpośrednio do cytowanego już fragmentu [Gödel 1947/64, 271-272] Benacerraf pisze:

> To wyobrażenie uważam za obiecujące, ale i niepokojące. Niepokoi mnie fakt, że bez wyjaśnienia, w jaki sposób aksjomaty „narzucają się nam jako prawdziwe", analogia z percepcją zmysłową i naukami fizycznymi pozbawiona jest treści. Brakuje bowiem [...] wyjaśnienia związku pomiędzy naszymi zdolnościami poznawczymi a przedmiotem wiedzy [Benacerraf 1973, 415].

Inny przeciwnik platonizmu, Chihara, uważa, że koncepcja Gödla nie spełnia podstawowych warunków wyjaśnienia naukowego. Odwołuje się ona do niejasnych pojęć — „wiecznych obiektów", z którymi matematycy mają „jakiś kontakt". Żaden naukowiec, twierdzi Chihara, nie będzie usatysfakcjonowany tego typu wyjaśnieniem.

Chihara proponuje naturalistyczne wyjaśnienie faktu, że różni matematycy dochodzą do tych samych wniosków, akceptują te same aksjomaty, mają podobne intuicje. Ta zgodność wśród matematyków ma wynikać po prostu z ich biologicznego podobieństwa. Chihara przytacza tu przykład podobnie działających komputerów — fakt, że generują te same wyniki ma związek z podobieństwem ich budowy. Nie jest konieczne postulowanie związku pomiędzy komputerami a jakąś abstrakcyjną rzeczywistością matematyczną, którą te komputery postrzegają dzięki swoim szczególnym zdolnościom. Podobnie w wypadku matematyków nie jest konieczne postulowanie obiektywnego istnienia wspólnego przedmiotu badań, aby wyjaśnić zgodność wniosków [Chihara1982, 217-218].[4]

Gödla argument «z intuicji» Chihara uważa ostatecznie za nieprzekonujący:

> Argument na rzecz istnienia zbiorów, który opiera się na danych tak mało precyzyjnych i ze swej natury rozmytych, który nie pozwala na przeprowadzenie nawet najbardziej elementarnych testów, jest podejrzany. Przypomina to odwoływanie się doświadczeń niejasno opisywanych jako «mistyczne» aby uzasadnić istnienie Boga [Chihara 1982, 215].[5]

Wreszcie Field w swej ważnej pracy [1980] w ogóle nie ustosunkowuje się do koncepcji Gödla, twierdząc, że **jedynym** sensownym argumentem na rzecz istnienia obiektów matematycznych jest argument Quine'a-Putnama «z niezbędności», odwołujący się do obserwacji, że techniki matematyczne są niezbędne w nauce. W następnym rozdziale omówimy ten właśnie argument.

II

2. Czy analiza języka używanego w nauce, czy też ogólniej w jakiejś dyscyplinie wiedzy, pozwala na wyciąganie wniosków natury metafizycznej? Negatywnej odpowiedzi na to pytanie udziela Carnap. W klasycznej pracy [1950] Carnap analizuje zależność między problemem istnienia a analizą językową. Twierdzi w niej, że stosowanie języka odwołującego się do przedmiotów abstrakcyjnych „nie implikuje przyjęcia ontologii platonistycznej, ale jest całkowicie zgodne z empiryzmem i myśleniem ściśle naukowym" [Carnap 1950, 234]. Oczywiście w języku naukowym wprowadza się pojęcia, które nie odnoszą się bezpośrednio do danych doświadczenia, nie wynikają stąd jednak żadne wnioski dotyczące istnienia desygnatów tych pojęć. Samo sformułowanie „zaakceptowanie nowych bytów" (oznaczające *de facto* jedynie przyjęcie pewnych konwencji językowych) jest wygodne, jednak „rzekome stwierdzenie realności systemu bytów jest pseudo-twierdzeniem pozbawionym treści poznawczej" [Carnap 1950, 241]. Kwestia przyjęcia takich a nie innych form językowych nie ma zatem nic wspólnego z zagadnieniami istnienia, i można je oceniać jedynie ze względu na ich użyteczność. Jest bowiem jasne, że w bogatszych językach można w bardziej efektywny sposób prowadzić rozumowania, formułować teorie i je uzasadniać [Carnap 1950, 241-242]. Aby uzasadnić swoje stanowisko, Carnap przyjmuje rozróżnienie zdań na syntetyczne i analityczne. Zdania syntetyczne odnoszą się do rzeczywistości i są prawdziwe na mocy struktury tej rzeczywistości. Natomiast prawdziwość

---

[4] Do tego typu argumentów krytycznie odnosi się Steiner w [1975], wskazując na fakt, że trudno powoływać się na takie podobieństwo przy wyjaśnianiu zjawiska pokrywania się intuicji matematycznych, skoro jego następstwem nie jest wcale zgodność poglądów na inne tematy.

[5] Bezpośrednio na ten zarzut odpowiada w [1990] Brown w sposób następujący: „Nieprawda. Każdy może w dowolnym momencie przeżyć doświadczenie zieloności trawy lub faktu, że 2+2=4, co upodabnia te dwa przykłady bez odwoływania się do przeżyć mistycznych, których nie są przecież w stanie zrelacjonować nawet ci, którzy twierdzą, że je mieli. Chihara ma rację ignorując przeżycia mistyczne, ale pomiędzy nimi a doświadczeniami matematycznymi nie ma nawet cienia podobieństwa" [Brown 1990, 106].

zdań analitycznych wynika jedynie z przyjęcia takich a nie innych postulatów znaczeniowych i nie ma związku z badaną przez nas rzeczywistością. W myśl tej koncepcji zdania matematyki zaliczają się do zdań analitycznych, a więc nie odnoszą się one do żadnej rzeczywistości. Niezrozumienie tego faktu prowadzi, według Carnapa „do absurdalnej konsekwencji, że stanowisko każdego, kto przyjmuje język fizyki wraz z liczbami rzeczywistymi [...] byłoby nazwane platonistycznym, nawet jeśli jest on radykalnym empirystą, który odrzuca metafizykę platonistyczną" [Carnap 1950, 242].

Reasumując:

> Decydującym pytaniem nie jest rzekomy ontologiczny problem istnienia obiektów abstrakcyjnych, ale raczej pytanie o to, czy użycie abstrakcyjnych form lingwistycznych, czy [...] użycie zmiennych wykraczających poza zmienne dla rzeczy (lub dane fenomenalistyczne), jest skuteczne i owocne dla celów [...] analizy, interpretacji, wyjaśniania lub konstruowania języków komunikacji, w szczególności języka naukowego [Carnap 1950, 247].

Analizy językowe nie uprawniają nas zatem do wyciągania wniosków dotyczących ontologii.

Odmienne stanowisko reprezentuje Quine. Odrzuca on dychotomiczny podział zdań na analityczne i syntetyczne, będące istotnym składnikiem teorii Carnapa:

> Jesteśmy skłonni zakładać ogólnie, że prawdziwość zdań daje się rozłożyć na komponent językowy i komponent faktualny, Przy tym założeniu wydaje się racjonalne sądzić, że w przypadku pewnych zdań ów komponent faktualny powinien być zerowy: byłyby to właśnie zdania analityczne. Lecz przy całej apriorycznej racjonalności tego pomysłu linia graniczna pomiędzy zdaniami analitycznymi i syntetycznymi po prostu nie zotała poprowadzona. Przekonanie, że rozróżnienie to jest w ogóle wykonalne, jest nieempirycznym dogmatem empirystów, ich metafizycznym artykułem wiary [Quine 1953b, 57-58].

Odrzucenie tego podziału wiąże się z poważnymi implikacjami dotyczącymi zagadnień ontologicznych. Nie możemy już bowiem ignorować w naszych analizach ontologicznych zdań odnoszących się do przedmiotów abstrakcyjnych (w szczególności matematycznych), bowiem argument, że są one prawdziwe jedynie na mocy postulatów znaczeniowych języka, upada. Powstaje problem określenia zobowiązań ontologicznych teorii naukowej, tzn. ustalenia, istnienie jakiego rodzaju bytów jest postulowane w danej teorii. Z problemem zobowiązań ontologicznych, dotyczących makroskopowych obiektów fizycznych, mamy do czynienia już na przednaukowym poziomie, w fazie formowania się zdroworozsądkowego obrazu świata. Przyjmujemy bowiem hipotezy dotyczące istnienia tych obiektów, aby skonstruować efektywną teorię rzeczywistości:

> Fizykalistyczny aparat pojęciowy, w którym mówi się o przedmiotach świata zewnętrznego, umożliwia znaczne uproszczenie naszych sprawozdań z doświadczenia. Łącząc oddzielne doznania zmysłowe i traktując je jako percepcję jednego przedmiotu, ujmujemy bogactwo naszych doznań w prostym i operatywnym schemacie pojęciowym. Przyporządkowywanie danych zmysłowych przedmiotom zewnętrznym jest istotnie podyktowane zasadą prostoty: wcześniejsze i późniejsze wrażenie okrągłości łączymy z tą samą monetą lub z dwiema różnymi monetami, kierując się postulatem maksymalnej prostoty naszego całościowego obrazu świata [Quine 1953a, 31].

Podobny mechanizm występuje także w nauce:

> Postulowanie bytów nie ogranicza się do makroskopijnych przedmiotów fizycznych. Przedmioty z poziomu atomów zakłada się po to, by uprościć i uczynić bardziej operatywnymi prawa, która rządzą przedmiotami makroskopijnymi, a w ostatecznym rachunku — prawa doświadczenia [...]. Nauka jest kontynuacją zdrowego rozsądku i podtrzymuje zdroworozsądkową zasadę rozbudowywania ontologii dla uproszczenia teorii" [Quine 1953b, 68].

Przyjęcie tezy, że z występowania w teorii naukowej terminów odnoszących się do obiektów matematycznych wynika istnienie tych obiektów, związane jest z kryterium istnienia Quine'a, wyrażonym w słynnej maksymie „istnieć to być wartością zmiennej". Podobne do Quine'a poglądy wyraża również Putnam. Nawiązując do Quine'a koncepcji istnienia i zobowiązań ontologicznych pisze o tym, że związki matematyki z fizyką są tak silne, że przyjęcie stanowiska realistycznego w stosunku do teorii fizycznej pociąga za sobą konieczność przyjęcia stanowiska realistycznego w stosunku do teorii matematycznych [Putnam 1975, 75].

Spójna teoria świata musi, według Putnama, zakładać pełną ontologię obiektów, o których jest mowa w tej teorii. W szczególności odnosi się to także do obiektów matematycznych. W innym wypadku nie moglibyśmy twierdzić, że prawa fizyki mają obiektywną treść i znaczenie. Mając na myśli prawo grawitacji Newtona, Putnam pisze:

> W jaki sposób twierdzenie tego typu może mieć jakąkolwiek obiektywną treść, jeżeli liczby i «związki» (tj. funkcje) są zwykłymi fikcjami? [...] Jeżeli mówienie o liczbach i «związkach» między masami, itp. a liczbami jest «teologią» (w pejoratywnym sensie), to Prawo Powszechnego Ciążenia także jest teologią [Putnam 1975, 74-75].

Z powyższych rozważań wynika, według Putnama, wniosek, że skoro kwantyfikacja po obiektach matematycznych jest istotnym składnikiem teorii fizycznych, to musimy taką kwantyfikację zaakceptować. To jednak nakłada na nas obowiązek uznania istnienia obiektów, po których kwantyfikujemy, a więc obiektów matematycznych. Podobnie jak Quine, Putnam uważa za intelektualną nieuczciwość negowanie istnienia czegoś, co służy nam do konstruowania teorii i czym się w praktyce naukowej codziennie posługujemy [Putnam 1971, 347].

W ujęciu Quine'a-Putnama prawdy matematyczne podlegają weryfikacji empirycznej wraz z teorią fizyczną, w której występują. To stanowisko różni się zatem od tradycyjnego poglądu platonistycznego, w myśl którego prawdy matematyki są wieczne i niezmienne.[6] Stosowalność twierdzeń i teorii matematycznych staje się istotnym kryterium ich prawdziwości. Jednak jedynie niektóre fragmenty matematyki mają bezpośrednie zastosowanie. Stajemy zatem przed problemem prawdziwości «czystych», pozbawionych zastosowań teorii matematycznych. Sam Quine pisze, że niektóre fragmenty matematyki — te, które nie mają zastosowań — są dla niego czystymi formalizmami. Owszem, pewne fragmenty teorii matematycznych pełnią rolę uspójniającą czy porządkującą w stosunku do teorii mających bezpośrednie zastosowania, jednak pozostałe mają status niezinterpretowanych systemów [Quine 1984, 788].

W artykule tym przyjmiemy założenie, że argument «z niezbędności» Quine'a-Putnama jest trafny, i że analizy teorii fizycznych ze względu na wykorzystywane w nich techniki matematyczne mogą nam powiedzieć coś istotnego na temat istnienia obiektów matematycznych. Sam argument «z niezbędności» ma postać implikacji: „Jeżeli

[6] Russell pisał o Gödlu w tym kontekście w sposób następujący: „Gödel okazał się konsekwentnym platonikiem, i najprawdopodobniej wierzył, że wieczne «nie» znajduje się w niebie, gdzie będą je mogli spotkać prawi logicy" (cytat za [Parsons 1995]).

obiekty O są niezbędne w nauce, to istnieją", czy, w nieco innym sformułowaniu, „Jeżeli obiekty O są stosowane w teorii naukowej T, to jeśli jesteśmy realistami w stosunku do teorii T, to musimy także być realistami w stosunku do obiektów z klasy O". W kryterium tym w istotny sposób występuje pojęcie „niezbędności danego pojęcia matematycznego w teorii fizycznej". Wymaga to pewnej dyskusji i doprecyzowania; powrócimy do tego w dalszej części pracy.

Argument Quine'a-Putnama będzie dla nas zatem pewnego rodzaju hipotezą roboczą. Przedstawimy jednak dla pełności obrazu niektóre krytyczne opinie dotyczące tego argumentu. Przede wszystkim należy wspomnieć o krytyce Fielda, zawartej w [1980]. Koncepcja Fielda odnosi się w istotny sposób do problemu istnienia w matematyce; stała się ona przedmiotem ożywionej dyskusji.

Jak już wspomniano wcześniej, Field uważa argument Quine'a-Putnama za jedyny poważny argument na rzecz realizmu matematycznego [Field 1980, 5]). Jednakże, inaczej niż wielu jego poprzedników odrzuca on nie tyle sam sposób wnioskowania (stosowalność implikuje istnienie), co podważa same przesłanki tego argumentu. Mówiąc krótko, Field twierdzi, że fizyka może obejść się bez matematyki — w tym sensie, że każdą teorię fizyczną można sformułować w nominalistycznej, «syntetycznej» wersji, która nie odwołuje się do technik i twierdzeń matematycznych, a która ma taką samą siłę eksplanacyjną, co teoria w sformułowaniu pierwotnym. Możliwe jest to (jak twierdzi Field) dzięki *nietwórczości* matematyki. Oznacza to, nie wchodząc w szczegóły, że wszystkie zdania dowodliwe w teorii fizycznej, posługującej się aparatem matematycznym, są również dowodliwe w teorii czysto nominalistycznej, nie posługującej się tym aparatem. (Krytyczną dyskusję na temat tej tezy Fielda można znaleźć w [Shapiro 1983].) Field nie postuluje oczywiście eliminacji matematyki z fizyki (uniemożliwiają to przyczyny praktyczne), ale twierdzi, że **w zasadzie** jest to możliwe. Koncepcja Fielda opiera się na pewnych upraszczających i kontrowersyjnych założeniach; stała się zatem przedmiotem zdecydowanej krytyki (por np. [Resnik 1983], [Resnik 1985] i [Urquhart 1990]). Field w swoim programie nie zaszedł zbyt daleko (dotąd udało mu się znominalizować jedynie niektóre proste teorie fizyczne, takie jak mechanika Newtona; brak jest konkretnych wyników dotyczących np. mechaniki relatywistycznej czy kwantowej teorii pola). Nie jest jednak *a priori* oczywiste, że program ten nie ma szans powodzenia.[7]

Krytyczną ocenę argumentu Quine'a-Putnama daje także Maddy w [1992]. Wychodzi ona od naturalistycznego stanowiska w filozofii nauki, w myśl którego badania metanaukowe i filozoficzne powinny przyjmować za punkt wyjścia standardy wewnątrznaukowe, nie zaś abstrakcyjne zasady «filozofii pierwszej». Dotyczy to w szczególności filozofii matematyki. Powinna ona przyjmować za punkt wyjścia i punkt

[7] Czytelnika zainteresowanego literaturą na temat koncepcji Fielda odsyłamy np. do prac [Bigaj 1994], [Wójtowicz 1994].

odniesienia praktykę matematyczną, podstawowym zaś zadaniem filozofa matematyki jest wyjaśnianie pojęciowych komplikacji matematyki współczesnej [Maddy 1992, 276]. Z tej perspektywy Maddy stawia rozumowaniom posługującym się argumentem «z niezbędności» dwa podstawowe zarzuty:

1. W fizyce często mamy do czynienia z uproszczeniami i idealizacjami (Maddy przytacza tu przykład założeń przyjmowanych w hydrodynamice, dotyczących nieskończonej głębokości analizowanego płynu). Nie jest zatem wcale oczywiste, że stosowalność danej teorii implikuje jej prawdziwość. Maddy odwołuje się również do analiz dotyczących ciągłego charakteru czasoprzestrzeni. Jej zdaniem wzmacniają one tezę o niepokrywaniu się stosowalności i prawdziwości.

2. Drugi zarzut dotyczy praktyki matematycznej. Argumenty z niezbędności dotyczą bowiem jedynie pewnych fragmentów matematyki. Praktyka matematyczna jest jednak zupełnie inna — matematycy wychodzą nie od stosowalności twierdzeń, ale od ich dowodliwości w odpowiednich systemach aksjomatycznych, których uzasadnienia poszukuje się w inny sposób. Matematycy pracujący w jakiejś dziedzinie (np. teorii liczb czy analizie) uzasadniają przyjęcie danego systemu aksjomatów czy zaakceptowanie pewnych technik przez odwołanie się do intuicji, do możliwości usystematyzowania praktyki matematycznej lub do innego typu rozważań wewnątrzmatematycznych. Jest jednak mało prawdopodobne, aby powoływali się przy tym na argument «z niezbędności» i na skuteczne zastosowania badanych przez siebie teorii [Maddy 1992, 279].

Maddy twierdzi, że wyniki jej rozważań, jeśli zostaną zaakceptowane, powinny prowadzić do „istotnej reorientacji we współczesnej filozofii matematyki" [Maddy 1992, 289]. Niezależnie od tego, czy zgodzimy się z tym — chyba jednak zbyt daleko idącym — wnioskiem, warto pamiętać o tych zarzutach wobec argumentu «z niezbędności».

Reasumując, argument «z niezbędności» opiera się na obserwacji, że matematyka jest niezbędna w nauce, i że stąd (na podstawie Quine'owskiego kryterium istnienia) wynika konieczność przyjęcia realistycznego stanowiska w stosunku do jej przedmiotu badań. Z kolei zarzuty wobec argumentu «z niezbędności» można podzielić na dwie podstawowe grupy:

(i) pochodzące od Carnapa, a negujące zasadność tego wnioskowania; według Carnapa stosowanie takich a nie innych form językowych nie ma implikacji natury ontologicznej;

(ii) pochodzące od Fielda, a negujące niezbędność matematyki w fizyce i tym samym podważające przesłanki argumentu z niezbędności.

3. Zajmiemy się teraz zagadnieniem niezbędności matematyki w nauce. Warto na wstępie zwrócić uwagę na pewien prosty fakt. Teorie i twierdzenia matematyczne, które są używane w fizyce nie są sformułowane w jednym języku formalnym. Zawsze jest to «naturalny język matematyczny» — składający się z mieszaniny jakiegoś języka naturalnego z językiem formalnym. Występują w nim zarówno wyrażenia języka naturalnego, jak i symbole i oznaczenia matematyczne. Z drugiej strony mówi się, że podstawową teorią dla matematyki jest teoria mnogości Zermela-Fraenkla (w skrócie ZFC), która przecież jest sformułowana w prostym języku formalnym (jest to język pierwszego rzędu, w którym występuje jeden predykat dwuargumentowy). Nie jest to oczywiście żaden paradoks — pojęcia i twierdzenia matematyczne można zrekonstruować w języku teorii mnogości (poczynając od najprostszej konstrukcji liczb naturalnych, poprzez liczby wymierne, rzeczywiste, zespolone, do przestrzeni funkcyjnych, rozmaitości różniczkowych i bardziej skomplikowanych tworów). W praktyce oczywiście nigdy nie posługujemy się sformułowaniami w języku ZFC, gdyż wówczas nie byłoby możliwe sformułowanie jakiegokolwiek bardziej skomplikowanego twierdzenia w rozsądnym czasie. Jednakże taka redukcja jest zasadniczo możliwa.

Płynie stąd pewien wniosek, dotyczący zagadnień ontologicznych. W fizyce występują przestrzenie Banacha, operatory pseudoróżniczkowe, rozmaitości Riemana, grupy Liego i wiele innych. Jeżeli zatem przyjmujemy istnienie tych obiektów matematycznych, które są niezbędne w nauce, to możemy mieć wrażenie, że jest wiele rodzajów tych obiektów. Jednakże fakt, że można je wszystkie zdefiniować w teorii mnogości, czy też inaczej: że mają one swoją reprezentację w postaci odpowiednio skomplikowanych zbiorów — umożliwia nam ograniczenie się w dyskusji do problemu istnienia (odpowiednio skomplikowanych) zbiorów.

Być może nie wszyscy zgodzą się z tego typu wnioskiem. Można bowiem utrzymywać, że istnieje wiele rodzajów obiektów matematycznych (np. te, o których już była mowa), i że fakt, że np. jakaś grupa czy przestrzeń funkcyjna ma swój odpowiednik w świecie zbiorów, nie znaczy wcale, że nie istnieje ona «samodzielnie» poza tym światem. W myśl tej koncepcji każdy fragment świata matematycznego byłby opisywany jakąś teorią — dziedzina grup jedną, zaś dziedzina równań różniczkowych zupełnie inną. Teorie te byłyby sformułowane w różnych, być może wzajemnie nieprzekładalnych językach. Przyjęcie takiej tezy zobowiązuje nas jednak do wyjaśnienia faktu, w jaki sposób wyniki np. teorii grup można zastosować w geometrii różniczkowej, skoro są to różne teorie, odnoszące się do innej klasy przedmiotów. Pojawiają się problemy dotyczące przekładalności czy interpretowalności teorii. Znacznie prostszym wyjaśnieniem będzie przyjęcie hipotezy, że wszystkie obiekty matematyczne są zbiorami, zaś opisujące je teorie są po prostu fragmentami pewnej ogólniejszej teorii, a mianowicie teorii mnogości.[8] Ma to także zalety metodologiczne: łatwiej porównywać zobowiązania ontologiczne i łatwiej bronić się przed zarzutami ze strony zwolenników brzytwy Ockhama.

[8] W monografii [1980] Kunen pisze, że pytanie o to, czy istnieją obiekty nie będące zbiorami, jest dla matematyka nieistotne, podobnie jak nieistotne jest pytanie o to, czy zbiory są naprawdę ufundowane. Z punktu widzenia matematyka założenia, że wszystkie przedmioty matematyczne są zbiorami, a wszystkie zbiory są ufundowane, są sensownymi hipotezami roboczymi, zakreślającymi zakres badań i sensownych pytań.

Przyjmiemy więc założenie (w świetle powyższych rozważań wydaje się ono uzasadnione i rozsądne), że wszystkie obiekty matematyczne są odpowiednio skomplikowanymi zbiorami. Dyskusja na temat zobowiązań ontologicznych teorii matematycznych zostanie zatem zredukowana do dyskusji na temat istnienia odpowiednich zbiorów. Precyzyjnych narzędzi dostarczy nam tzw. matematyka odwrotna, której poświęcony jest następny paragraf.

4. Dla zrozumienia motywacji, która tkwi u podłoża badań w zakresie matematyki odwrotnej, musimy cofnąć się do czasów Hilberta i jego programu. W znanym wykładzie *O nieskończoności* [1926] Hilbert przedstawił swoje poglądy na temat nieskończoności i zaproponował metodę uzasadnienia dopuszczalności stosowania metod infinitystycznych. Jest to według niego konieczne, ponieważ obiekty nieskończone nie występują w świecie fizycznym, a przecież rola metod infinitystycznych w matematyce jest fundamentalna. Musimy zatem w jakiś sposób uzasadnić i uprawomocnić stosowanie metod, które pochodzą niejako «nie z tego świata».

W programie Hilberta można (w pewnym uproszczeniu) wyróżnić trzy etapy (por. [Simpson 1988]):

1. Pierwszy etap polega na wyróżnieniu nieproblematycznego, finitystycznego fragmentu matematyki — musimy być w stanie sformalizować w nim przynajmniej elementarne operacje teorioliczbowe i operacje na skończonych ciągach symboli.

2. W drugim kroku cała matematyka ma być sformalizowana w jednym systemie formalnym, którego formuły są skończonymi ciągami symboli, a zatem można je będzie analizować używając metod finitystycznych, sformułowanych w pierwszym kroku.

3. Ostatni krok ma polegać na udowodnieniu niesprzeczności tego systemu za pomocą metod finitystyczynych.

Sam Hilbert nie zdefiniował precyzyjnie pojęcia systemu finitystycznego. Możliwe są tu różne interpretacje (por. np. [Tait 1981]), nie będziemy jednak zajmować się bliżej tym zagadnieniem.

Jak wiadomo, wyniki Gödla pokazują, że przeprowadzenie programu Hilberta w oryginalnej postaci nie jest możliwe; w powszechnym odczuciu twierdzenia te zadały programowi Hilberta «śmiertelny cios». Jednak pytanie, czy nie da się programu Hilberta zrealizować przynajmniej częściowo (i jak pojęcie takiej «częściowej realizacji» należy rozumieć) pozostało otwarte. Wiemy, że nie możemy całej matematyki infinitystycznej ugruntować na jednej finitystycznej teorii. Być może jednak można wykonać to zadanie przynajmniej dla pewnych fragmentów matematyki infinitystycznej. To pytania legło u podstaw tzw. matematyki odwrotnej. Opiszemy teraz w sposób skrótowy i nieformalny podstawowe elementy tego programu badawczego.[9]

[9] Czytelnika zainteresowanego problematyką matematyki odwrotnej odsyłamy np. do prac: [Kossak 1991],

Jak wiadomo, matematyka może być sformalizowana w ZFC. Teoria ta jednak niesie ze sobą pewne paradoksy, przede wszystkim związane z pewnikiem wyboru,[10] ale również z aksjomatem nieskończoności czy zastępowania. Okazuje się jednak [Hilbert, Bernays 1934], że dużą część matematyki klasycznej można rozwijać w słabszej teorii, mianowicie w arytmetyce drugiego rzędu Z_2. Teoria ta sformułowana jest w dwusortowym języku ze zmiennymi dla liczb i zbiorów liczb. Oprócz zwykłych «arytmetycznych» aksjomatów dotyczących działań dodawania i mnożenia (aksjomatów uporządkowanego pierścienia przemiennego) i aksjomatu ekstensjonalności zawiera ona aksjomat indukcji:

$[0 \in X \wedge \forall X\,(x \in X \Rightarrow x + 1 \in X)] \Rightarrow \forall x\, x \in X,$

i szczególnie dla nas ważny schemat aksjomatów istnienia zbiorów:

(CA)[11]: $\exists X\ \forall x\ [x \in X \Leftrightarrow \phi(x)]$, dla wszystkich formuł ϕ z języka Z_2, w których zmienna X nie jest wolna.

Stwierdza on, że dla wszystkich formuł ϕ języka arytmetyki Z_2, **istnieje** pewien zbiór, który składa się dokładnie z tych elementów x, które spełniają formułę ϕ. Zwróćmy uwagę na fakt, że schemat (CA) możemy osłabić, zależne od tego, jak obszerną klasę formuł ϕ uznamy za ważną. Ogólna postać tego schematu jest taka:

(CA-Φ): $\exists X\ \forall x\ [x \in X \Leftrightarrow \phi(x)]$, dla wszystkich formuł $\phi \in \Phi$.

Od pełnego aksjomatu istnienia zbiorów CA, aksjomat ten różni się tym, że istnienie zbiorów zakładamy tylko dla zbiorów definiowalnych formułami z klasy Φ, a nie dowolnymi formułami z języka Z_2. Zauważmy, że jeżeli klasa formuł Φ jest mniejsza od klasy formuł Φ', to przyjmując CA-Φ zakładamy istnienie mniejszej liczby zbiorów niż przyjmując schemat CA-Φ'[12]. Możemy zatem powiedzieć, że rozważane w ramach matematyki odwrotnej podsystemy Z_2 (które są słabsze niż Z_2, gdyż słabszy jest schemat aksjomatu istnienia zbiorów) różnią się między sobą siłą założeń egzystencjalnych. Dobrze widoczne jest to wtedy, gdy przyjrzymy się modelom dla różnych podsystemów Z_2. Modele takie mają postać (M, Γ_M), gdzie M jest modelem dla arytmetyki pierwszego rzędu, zaś $\Gamma_M \subseteq P(M)$ (P(M) to zbiór potęgowy M; predykat $\in$ języka Z_2 interpretujemy zawsze jako relację należenia). W modelach dla silniejszego — zakładającego

---

[Murawski 1993] (w tej pracy czytelnik znajdzie bardzo obszerną bibliografię), [Simpson 1984], [Simpson 1988] czy [Wójtowicz 199?] (gdzie prezentacja dostosowana jest do potrzeb dyskusji na temat argumentu «z niezbędności»).

[10] Na przykład twierdzenie Banacha-Tarskiego o paradoksalnym rozkładzie kuli.

[11] CA — skrót od „Comprehension Axiom"

[12] Ostatnie zdanie wymaga oczywiście pewnego doprecyzowania. Może sie przecież zdarzyć, że klasy formuł Φ i Φ' sa różne, ale opisują te same klasy zbiorów (na przykład jeżeli klasa Φ' powstaje z klasy Φ poprzez dorzucenie nowej, dodatkowej formuły, która jest równoważna jakiejś formule już obecnej w klasie Φ). Aby zachować tu pełną precyzję, należałoby oczywiście powiedzieć, że w tej sytuacji schemat CA-Φ będzie zakładał istnienie niewiększej liczby zbiorów, niż schemat CA-Φ'. Jednak w interesujących wypadkach (rozważanych w ramach matematyki odwrotnej) inkluzje są ścisłe.

silniejszy aksjomat istnienia zbiorów — podsystemu Z_2 klasa Γ_M będzie obszerniejsza.[13]

W ogólnym wypadku klasa formuł Φ, występująca w schemacie istnienia zbiorów, może być dowolnym podzbiorem klasy wszyskich formuł Z_2. Większość uzyskanych w ten sposób teorii $S(\Phi)$[14] będzie nieciekawa. Okazuje się jednak, że można wyróżnić pewne naturalne, z punktu widzenia praktyki matematycznej, teorie $S(\Phi)$, które będą się różniły w zakresie schematów istnienia zbiorów.

Sama teoria Z_2 jest słabsza niż teoria mnogości ZFC (oczywiście dotyczy to tym bardziej podsystemów Z_2, powstających z Z_2 przez osłabienie schematu aksjomatów istnienia zbiorów). Okazuje się jednak, że w Z_2 można z powodzeniem sformalizować pokaźne fragmenty matematyki. Wymaga to oczywiście pewnych zabiegów formalnych: najpierw należy zdefiniować w języku Z_2 odpowiednie pojęcia (np. pojęcie funkcji ciągłej, czy pojęcie przestrzeni Banacha, jeśli chcemy sformalizować jakieś twierdzenie z analizy, albo grupy, jeśli zajmujemy się algebrą) i następnie sformułować w języku Z_2 odpowiednie twierdzenie. Dowód tego twierdzenia musi być też sformułowany w języku Z_2 i przeprowadzony z wykorzystaniem aksjomatów Z_2. Możemy teraz zastanowić się nad następującym problemem: podsystemy Z_2, rozważane w ramach matematyki odwrotnej, a różniące się schematem istnienia zbiorów (i być może także schematem aksjomatów indukcji, co jest dla nas z filozoficznego punktu widzenia mniej interesujące), rożnią się także oczywiście w zakresie twierdzeń, które można w nich udowodnić. Możemy zatem, mając na uwadze jakieś konkretne twierdzenie matematyczne (np. twierdzenie Arzeli-Ascoliego czy Hahna-Banacha[15]) zastanawiać się, w którym z podsystemów Z_2 możemy je udowodnić. Podstawowy problem, rozważany w ramach matematyki odwrotnej, można zatem sformułować w sposób następujący:

Zasadnicze pytanie matematyki odwrotnej: Jaki jest dla danego twierdzenia «zwykłej» matematyki τ, najsłabszy podsystem Z_2, w którym możemy to twierdzenie udowodnić?[16]

[13] Na przykład struktura postaci (N, P(N)), gdzie N jest standardowym modelem dla arytmetyki (tzn. składa się z «prawdziwych» liczb naturalnych) jest modelem dla Z_2. Z kolei struktura (N, Rec) (N — model standardowy, Rec — rekurencyjne podzbiory zbioru liczb naturalnych) jest modelem dla pewnego podsystemu Z_2, znanego w literaturze jako RCA_0, w którym pełen schemat aksjomatu istnienia zbiorów został osłabiony do schematu dla formuł definiujących zbiory rekurencyjne.

[14] Stosujemy oznaczenie $S(\Phi)$, aby uwypuklić różnice między podsystemami Z_2, wynikające z różnej siły (schematu) aksjomatów istnienia zbiorów. Dla porządku należy jednak podkreślić, że różnice te mogą również występować w schemacie aksjomatów indukcji czy polegać na dodaniu innych dodatkowych aksjomatów.

[15] Są to podstawowe twierdzenia działu matematyki zwanego analizą funkcjonalną, mające duże znaczenie teoretyczne i w zastosowaniach (np. w teorii równań różniczkowych). Twierdzenie Arzeli-Ascoliego podaje warunki relatywnej zwartości podzbioru przestrzeni funkcyjnej, a twierdzenie Hahna-Banacha mówi o rozszerzaniu funkcjonałów liniowych z podprzestrzeni do całej przestrzeni Banacha. Treść tych twierdzeń nie jest jednak istotna dla naszych rozważań; ważne jest to, że naturalne i ważne twierdzenia matematyki «zwykłej» pozwalają się klasyfikować.

[16] Pojawia się pytanie, co to znaczy „«zwykła» matematyka". Simpson, jeden ze współtwórców programu matematyki odwrotnej odpowiada na to pytanie w sposób następujący:

Pytaniu temu można nadać równoważną postać, w której w bardziej czytelny sposób pojawi się kwestia zobowiązań ontologicznych:

Jak silne są dla danego twierdzenia τ aksjomaty istnienia zbiorów potrzebne dla udowodnienia tego twierdzenia?

Wiele konkretyzacji tego pytania doczekało się już odpowiedzi w ramach matematyki odwrotnej. Wyróżnia się kilka podstawowych teorii (będących podsystemami Z_2), które odpowiadają znanym twierdzeniom matematycznych, czy, mówiąc ściślej, grupom twierdzeń. Badania prowadzone są inaczej niż to się standardowo robi w matematyce, wychodzi się bowiem od danego twierdzenia i, posługując się nim, udowadnia dany aksjomat istnienia zbiorów (stąd pochodzi nazwa „matematyka odwrotna").

Podsumowując: w ramach badań nad podsystemami Z_2 możemy *explicite* sformułować aksjomaty istnienia zbiorów potrzebne dla udowodnienia konkretnych twierdzeń matematycznych i dla rozwijania konkretnych teorii matematycznych.

5. W jaki sposób można wykorzystać wyniki matematyki odwrotnej do analiz ontologicznych? Przypomnijmy, że przyjęliśmy dwie robocze hipotezy:

— skuteczność argumentu «z niezbędności» Quine'a-Putnama;

— założenie o tym, że wszystkie obiekty matematyczne są zbiorami odpowiedniego rodzaju.

Możemy teraz zastanowić się nad tym, jakie zobowiązania ontologiczne «zaciągają» w świecie zbiorów odpowiednie teorie fizyczne. «Algorytm» dla takich badań będzie wyglądał w sposób następujący:

(1) dla interesującej nas ze względu na zobowiązania ontologiczne teorii fizycznej *T* wyodrębniamy stosowane w niej techniki matematyczne;

(2) sprawdzamy, w którym z rozważanych w ramach matematyki odwrotnej systemów aksjomatycznych (podsystemów Z_2) $S(\Phi)$ można sformalizować te techniki i udowodnić te twierdzenia;

(3) z wyników badań (1) i (2) wysnuwamy wniosek, że teoria *T* zobowiązuje się do istnienia tych zbiorów, które zakłada (w ramach aksjomatu istnienia zbiorów) teoria $S(\Phi)$.

Jest to oczywiście schemat, który trudno będzie zrealizować w praktyce. Rozważmy pewne podstawowe trudności, które wiążą się z realizacją punktów (1) i (2).

„Mówiąc ogólnie, przez „«zwykłą» matematykę" rozumiemy będącą w głównym nurcie badań matematycznych matematykę nie-teoriomnogościową, tj. matematykę, z jaką mieliśmy do czynienia, zanim zabrali się do jej uprawiania specjaliści od abstrakcyjnej teorii mnogości. (Albo raczej: matematykę taką, jaką byłaby, gdyby nie zabrali się do niej specjaliści od abstrakcyjnej teorii mnogości.) Zwykła matematyka obejmuje zatem geometrię, teorię liczb, rachunek różniczkowy i całkowy, równania różniczkowe, analizę rzeczywistą i zespoloną, przeliczalną algebrę, topologię zupełnych ośrodkowych przestrzeni metrycznych, logikę matematyczną i teorię obliczeń. Nie obejmuje ona abstrakcyjnej teorii mnogości, abstrakcyjnej analizy funkcjonalnej, topologii ogólnej i algebry nieprzeliczalnej" [Simpson 1984, 783].

Ad (1). Już przy realizacji tego punktu powstają wątpliwości. Teorie fizyczne nie są jednorodne, pewne ich fragmenty są dla danej teorii absolutnie podstawowe (stanowią jądro teorii), inne są marginalne i mało istotne. Musimy zatem na wstępie zakreślić zakres badań, tzn. wyróżnić ten fragment teorii fizycznej (np. ten fragment mechaniki kwantowej albo teorii sprężystości), który będziemy badać. W ogólnym przypadku możemy się spodziewać, że pewne zastosowania danej teorii wymagają użycia technik znacznie bardziej zaawansowanych niż te, które są niezbędne dla sformułowania podstawowych faktów. To nakłada na nas obowiązek doprecyzowania założeń; z drugiej strony umożliwi nam to przeprowadzenie bardziej subtelnych analiz dotyczących struktury tej teorii.

Ad (2). Rzadko zdarza się, że dana grupa twierdzeń i definicji (np. ze standardowego podręcznika równań różniczkowych) odpowiada dokładnie jednemu z podsystemów Z_2. Szczególnie wyraźnie jest to widoczne w wypadku analizowania technik matematycznych używanych przez fizyków. Na ogół bowiem w praktyce nie zwraca się uwagi na to, w jak silnych systemach aksjomatycznych dane twierdzenia są dowodzone. «Użytkownicy» twierdzeń matematycznych zwracają uwagę jedynie na to, czy twierdzenia te znajdują się w grupie twierdzeń powszechnie akceptowanych przez matematyków (np. twierdzenia, dla których udowodnienia wymagany jest pewnik wyboru są powszechnie akceptowane; natomiast takie, dla których udowodnienia wymagana jest np. uogólniona hipoteza continuum albo jakiś aksjomat istnienia dużych liczb kardynalnych — nie są). Zastosowanie tego kryterium w praktyce polega na sprawdzeniu, czy dane twierdzenie można znaleźć w jakiejś monografii czy artykule. Zastrzeżenia natury filozoficznej (które leżą u podłoża np. intuicjonistycznych czy post-intuicjonistycznych koncepcji metamatematycznych i rozwijanych w ich ramach teorii matematycznych) nie stanowią, jak się wydaje, istotnej przeszkody dla fizyka. Fizyk stosuje te twierdzenia (zaczerpnięte z monografii, artykułów, czy udowodnione przez siebie samego), które są dla niego przydatne, nie ograniczając się tutaj żadnymi zewnętrznymi kryteriami natury filozoficznej. Mimo to analizy dotyczące miejsca w hierarchii Friedmana[17] technik matematycznych stosowanych w danej teorii mogą być owocne. Jest prawdopodobne, że dla prostych teorii fizycznych T (np kinematyki ruchu prostoliniowego) wystarczą nam techniki matematyczne formalizowalne w jakimś prostym podsystemie Z_2, a z kolei bardziej skomplikowane teorie będą wymagać użycia technik nie mieszczących się w tej hierarchii i odwołujących się na przykład do pełnego ZFC. Przeprowadzenie tego typu analiz będzie filozoficznie owocne, jednak zdecydowanie wykracza poza ramy tej pracy (i poza kompetencje autora).

Ad (3). Z rozważań w punkcie 2 wynika pośrednio, że nie zawsze otrzymamy wyniki precyzyjnie określające zobowiązania ontologiczne (w klasie zbiorów) teorii

[17] Jest to hierarchia podsystemów Z_2 uszeregowanych, ogólbie rzecz biorąc, według siły aksjomatu istnienia biorów. Nawza pochodzi od nazwiska matematyka, który w roku 1974 na Kongresie Matematyków w Vancouver sformułował założenia programu badawczego matematyki odwrotnej.

fizycznych. Można jednak przypuszczać, że uzyskamy szereg wyników postaci: teoria T zobowiązuje co najmniej do zbiorów z klasy definiowalnej aksjomatem Φ — jeżeli w tej teorii występuje w istotny sposób (tu powraca pytanie o znaczenie pojęcia istotności) jakieś twierdzenie równoważne aksjomatowi Φ. Będzie to też znaczący z filozoficznego punktu widzenia wynik.

6. Powyższe analizy rodzą szereg wątpliwości natury technicznej, filozoficznej i metafilozoficznej. W skrótowej formie omówimy tu kilka z nich (czytelnik znajdzie szersze omówienie tych kwestii w [Wójtowicz 199?].

Przede wszystkim należy zauważyć, że wzmocnienie (czy modyfikacja) argumentu «z niezbędności» poprzez zastosowanie wyników matematyki odwrotnej (czy ogólniej: wyników logicznych czy metamatematycznych) do rozważań ontologicznych — nie rozstrzyga sporu między realizmem a nominalizmem. Nominalista odrzuca argument «z niezbędności» (bądź, jak Carnap, wskazując na fakt, że wnioskowanie istnienia ze stosowalności nie jest uprawnione; bądź, jak Field, podważając przesłankę tego argumentu i podając nominalistyczne przeformułowania teorii fizycznych). Będzie on zatem odrzucał także jego modyfikacje i uszczegółowienia. Jednak doprecyzowanie argumentu «z niezbędności» może służyć realiście do obrony przed zarzutami natury metodologicznej, dotyczącymi braku precyzyjnego sformułowania czy możliwości zastosowania tego argumentu w praktyce.

Należy także pamiętać o tym, że klasyfikacja Friedmana obejmuje, jak dotąd, zaledwie małą część twierdzeń matematycznych (choć udało się zaszeregowanie wielu podstawowych dla fragmentów matematyki twierdzeń, jak np. wspomniane już twierdzenie Hahna-Banacha czy twierdzenie Ascoli, ale także wiele innych). Drugą istotną trudnością jest to, że nie jest łatwo dokładnie wyodrębnić fragmenty matematyki używane w teoriach fizycznych (o czym już była mowa), a co za tym idzie dokładnie określić, jakie podsystemy Z_2 są faktyczne używane w poszczególnych teoriach fizycznych, co umożliwiłoby dokonanie dokładnej klasyfikacji zobowiązań ontologicznych. Możemy raczej spodziewać się tu jedynie cząstkowych odpowiedzi i wyników o postaci „zobowiązania ontologiczne teorii T są nie słabsze niż...", aniżeli dokładnych i precyzyjnych twierdzeń.

Przejdźmy teraz do wątpliwości natury bardziej ogólnej. Czy klasyfikowanie obiektów abstrakcyjnych pod względem stopnia komplikacji ma w ogóle sens? Czy rozważania tego typu nie zaciemniają niepotrzebnie obrazu i nie utrudniają rozważenia właściwego problemu filozoficznego, tj. kwestii istnienia obiektów abstrakcyjnych, nie zaś ich struktury, stopnia komplikacji czy «wewnętrznej budowy»? Nie ma tu prostych odpowiedzi. Zwróćmy jednak uwagę na to, że problem złożoności obiektów matematycznych i ich struktury był obecny w dyskusjach na temat podstaw matematyki od dawna. Standardowym przykładem może być tu pewnik wyboru, kontrowersyjny przede wszystkim ze względu na swój niekonstruktywny charakter, a nie ze względu na fakt, że postuluje istnienie obiektu abstrakcyjnego.[18] Podobną naturę ma dyskusja na temat istnienia zbiorów nieprzeliczalnych, czy analizy dotyczące dodatkowych aksjomatów dla teorii mnogości — np. aksjomatów dużych liczb kardynalnych, czy zasad kombinatorycznych (por. [Maddy 1988]). Dla matematyka kwestia struktury badanego obiektu jest zasadnicza. Powstaje tu w kontekście naszej dyskusji nowy problem: czy właściwą miarą złożoności zbiorów jest rodzaj definiującej je formuły, czyli miejsca tej formuły w hierarchii Σ-Π[19]. Jeżeli jednak chodzi o powszechnie akceptowane wśród matematyków nieformalne kryterium abstrakcyjności twierdzeń (w myśl którego twierdzenie, że 2+2=4, jest mniej abstrakcyjne, niż twierdzenie Gödla) to okazuje sie, że hierarchia Friedmana w miarę dobrze odpowiada tej naturalnej hierarchii.

Zastanówmy się nad pewnym problemem natury metafilozoficznej. Jest dość oczywiste, że dla formułowania skomplikowanych teorii fizycznych potrzebujemy trudnych i skomplikowanych teorii matematycznych, a dla udowodnienia silnych twierdzeń potrzebujemy silnych założeń. Czy drobiazgowe analizy techniczne, dotyczące podsystemów Z_2 mogą mieć istotne znaczenie filozoficzne? Znajomość szczegółów technicznych nie zawsze jest filozofowi potrzebna, czasem może nawet utrudniać zrozumienie istoty problemu. Jednak ich nieznajomość może prowadzić do szkodliwych uproszczeń czy nawet nierzetelności. (Przypomnijmy w tym miejscu chociażby nadużycia interpretacyjne pojawiające się przy okazji twierdzenia Gödla.) Wiedza na przykład na temat tego, czy fizyki nie można uprawiać stosując np. jedynie teorię pewnej skończonej ilości liczb naturalnych (np tylko liczb mniejszych od 10^{10}), byłaby bardzo istotna w kontekście dyskusji na temat roli matematyki infinitystycznej w poznawaniu świata. Jednak warunkiem koniecznym uczestniczenia w takiej dyskusji jest znajomość tego typu wyników.

Zarówno sam argument Quine'a-Putnama, jak i jego modyfikacje, nie rozstrzygają kwestii istnienia obiektów «czystej matematyki» (przy całej niejednoznaczności tego terminu). Do analiz dotyczących tego typu obiektów musimy używać innych argumentów — czy to argumentów pochodzących od Gödla, czy na przykład analiz heurystycznych dotyczących uzasadniania aksjomatów dla teorii mnogości (por.np. [Maddy 1988]).

[18] Dla nominalisty zbiór pusty czy zbiór jednoelementowy jest równie nie do zaakceptowania, jak skomplikowane twory teoriomnogościowe (np. duże liczby kardynalne). Nominalista odrzuca bowiem istnienie przedmiotów abstrakcyjnych ze względu na ich abstrakcyjność właśnie, a nie ze względu na strukturę. Zbiór pusty jest dla niego «równie abstrakcyjny», jak np. zbiór potęgowy zbioru liczb naturalnych.

[19] Hierarchia Σ-Π jest hierarchą formuł, określającą ich stopień komplikacji, mierzony ilością kwantyfikatorów. Klasa $\Sigma_0^0 = \Pi_0^0$ składa się z formuł zawierających jedynie kwantyfikatory ograniczone. Klasa $\Sigma^0_{n+1}(\Pi^0_{n+1})$ składa się z formuł postaci $\exists x\, \phi$ (odp. $\forall x\, \phi$), gdzie ϕ jest formułą klasy Π^0_n (odp. Σ^0_n). Mówiąc niezbyt ściśle, im dłuższy ciąg kwantyfikatorów występuje w danej formule, tym wyżej występuje ona w hierarchii Σ-Π

7. Platonizm klasyczny (operający się na argumentach typu argumentów Gödla) i realizm Quine'a-Putnama różnią się w istotny sposób. O ile argumenty Gödla wychodzą, mówiąc najogólniej, od doświadczenia matematycznego i rozważań nad strukturą samej matematyki, o tyle argumenty Quine'a-Putnama opierają się na analizach dotyczących struktury tych teorii naukowych, w których występują techniki matematyczne. Podejście Quine'a-Putnama pozwala na uniknięcie kontrowersyjnych rozważań dotyczących intuicji matematycznej i poznania przedmiotów matematycznych (co jest jednak zarazem słabością tego podejścia, gdyż brak w nim teorii epistemologicznej; ujęcie Quine'a-Putnama nie wyjaśnia oczywistości matematyki elementarnej). Argument «z niezbędności» koncentruje się na badaniach metanaukowych, co z kolei umożliwia jego uściślenie — np. takie, jakie zostało zaprezentowane w niniejszym artykule.

Uzyskane w ten sposób wyniki mogą być interesujące dla realisty, akceptującego argumenty Quine'a-Putnama[20] — umożliwią mu one bowiem doprecyzowanie jego stanowiska i prowadzenie «ilościowych», a nie jedynie «jakościowych» rozważań. Wydaje mi się, że mogą one być interesujące także dla przeciwników stanowiska realistycznego, odrzucających argument «z niezbędności». Wyniki matematyki odwrotnej można bowiem stosować również do analiz języka nauki, «biorąc w nawias» zagadnienie istnienia.

BIBLIOGRAFIA

Benacerraf P.

[1973] „Mathematical Truth", *Journal of Philosophy*, 70, 1973, 661-680; [przedrukowane w:] P. Benacerraf & H. Putnam, *Philosophy of Mathematics*, second edition, Cambridge: Cambridge University Press, 403-420.

Benacerraf P., Putnam H.

[1964] *Philosophy of Mathematics*, Englewood Cliffs (New Jersey): Prentice-Hall.

Bigaj T.

[1994] „Kilka uwag w sprawie niezbędności matematyki w nauce", *Filozofia Nauki*, 3-4, 161-173.

Brown J.R.

[1990] „π in the sky", [w:] A.D. Irvine (red.), *Physicalism in Mathematics*, Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Carnap R.

[1950] „Empiricism, Semantics and Ontology", [przedrukowane w:] [Benacerraf & Putnam 1964, 233-248].

Chihara C.

[1982] „A Gödelian Thesis Regarding Mathematical Objects: Do They Exist? And Can We Perceive Them?", *Philosophical Review*, 91, 211-27.

Field H.

[1980] *Science Without Numbers*, Oxford: Basil Blackwell.

[20] Nie wszyscy realiści uważają argumenty Quine'a-Putnama za podstawowe. Brown uważa, że wśród argumentów na rzecz istnienia przedmiotów matematycznych należą one do tych najsłabszych, i że nawet skuteczne przeprowadzenie programu Fielda nie obali argumentów na rzecz stanowiska realistycznego [Brown 1990, 99].

Gödel K.
[1944] „Russell's Mathematical Logic", [przedrukowane w:] [Benacerraf & Putnam 1964, 211-232].
[1947/64] „What is Cantor's Continuum Problem?", [przedrukowane w:] [Benacerraf & Putnam, 1964],258-273.
Hardy G.H.
[1929] „Mathematical Proof", *Mind*, 38, 1-25.
Hilbert D.
[1926] „On the infinite", [przedrukowane w:] [Benacerraf & Putnam 1964, 134-151].
Hilbert D., Bernays P.
[1934] *Grundlagen der Mathematik*, Band I, Berlin: Springer-Verlag.
Kossak R.
[1991] *Odwrotna matematyka — częściowa realizacja programu Hilberta*, Warszawa: IMPAN.
Kunen K.
[1980] *Set Theory*, Amsterdam: North-Holland.
Maddy P.
[1988] „Believing the Axioms I & II", *Journal of Symbolic Logic*, 53, 481-511, 736-764.
[1992] „Indispensability and practice", *Journal of Philosophy*, 89, 275-289.
Murawski R.
[1984] „G.Cantora filozofia teorii mnogości", *Studia Filozoficzne*, 11-12, 75-88.
[1993] „Rozwój programu Hilberta", *Wiadomości Matematyczne*, 30, 51-72.
Parsons C.
[1995] „Platonism and Mathematical Intuition in Kurt Gödel's Thought", *Bulletin of Symbolic Logic*, 1, 44-74.
Putnam H.
[1971] „Philosophy of Logic", [przedrukowane w:] [1979, 323-357].
[1975] „What is Mathematical Truth?", [przedrukowane w:] [1979, 60-78].
[1979] *Mathematics, matter and method: philosophical papers*. Cambridge: Cambridge University Press.
Quine W.V.O.
[1953a] „O tym co istnieje", w: [Quine 1969].
[1953b] „Dwa dogmaty empiryzmu", w: [Quine 1969].
[1969] *Z punktu widzenia logiki*, Warszawa: PWN.
[1984] Review of Parson's *Mathematics in Philosophy*, *Journal of Philosophy*, 81, 783-794.
Resnik M.D.
[1983] Review of *Science Without Numbers*, *Nous*, 17, 514-519.
[1985] „How Nominalist is Hartry Field's Nominalism?", *Philosophical Studies* 47, 163-181.
Shapiro S.
[1983] „Conservativeness and Incompleteness", *Journal of Philosophy* 60, 524-531.
Simpson S.G.
[1984] „Which Set Existence Axioms are Needed to Prove the Cauchy/Peano Theorem for Ordinary Differential Equations?", *Journal of Symbolic Logic*, 49, 783-802.
[1988] „Partial Realisations of Hilbert's Program", *Journal of Symbolic Logic*, 53, 1988, 349-363.
Steiner M.
[1975] Review of Chihara's *Ontology and the Vicious Circle Principle*, *Journal of Philosophy*, 72, 1975, 184-196.
Tait W.W.
[1981] „Finitism", *Journal of Philosophy*, 78, 524-546.
Urquhart A.
[1990] „The Logic of Physical Theory", [w:] A.D. Irvine (red), *Physicalism in Mathematics*, Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 145-154.
Wójtowicz K.
[1994] „Czy matematyka jest niezbędna w nauce?", *Filozofia Nauki*, 3-4, 141-160.
[199?] „Reverse mathematics and the indispensability argument", [w:] J.J. Jadacki & J. Paśniczek (red.) *The Lvov-Warsawa School. New Generation*, Amsterdam: Rodopi [w przygotowaniu].