Michał Tempczyk

Wpływ teorii fraktali na modele zjawisk fizycznych

Filozofia Nauki 3/4, 85-96

1995

Filozofia Nauki
Rok III, 1995, Nr 4(12)

Michał Tempczyk

Wpływ teorii fraktali na modele zjawisk fizycznych

1. Rola matematyki w fizyce

Fizyka jest tą dziedziną nauk empirycznych, która najwcześniej zastosowała matematykę do opisu badanych przez siebie zjawisk. Wielkie osiągnięcia fizyki i jej przzodującą rola w gronie innych nauk wynikają przede wszystkim z tego faktu. Matematyka w naukach empirycznych — to przede wszystkim wielkości liczbowe, odpowiadające ilościowym pomiarom podstawowych parametrów. Kiedy patrzymy na nowoczesną naukę, to widzimy, że ilościowy opis zjawisk jest jej najważniejszą cechą. Teorie oparte na rozważaniach jakościowych są mało precyzyjne, a ich możliwości wyjaśniania i przewidywania są poważnie ograniczone przez nieprecyzyjny aparat pojęciowy. We wszystkich prawie naukach przyrodniczych, a zwłaszcza w fizyce, język matematyki jest podstawowym językiem, na bazie którego tworzy się specyficzne pojęcia tych nauk, formułuje prawa i wyciąga wnioski. Sytuację tę scharakteryzujemy ogólnie — stwierdzając, że matematyka jest podstawą fizyki.

Ta podstawowa rola matematyki jest jasno widoczna w formalnej metodologii nauk empirycznych, która w języku tych nauk wyróżnia trzy warstwy: pojęć logicznych, pojęć matematycznych i specyficznych pojęć danej dziedziny. Przy obecnym stanie wiedzy nie uznamy teorii przyrodniczej za ścisłą, jeżeli nie jest ona sformułowana w odpowiednim formalizmie matematycznym. Nie wynika z tego jednak, że teorie fizyczne muszą być sformalizowane. Jest to wymaganie zbyt silne nawet w stosunku do większości teorii matematycznych, a w fizyce formalizuje się teorie dojrzałe, takie jak termodynamika i mechanika klasyczna, na których rozwój zabieg ten nie ma żadnego wpływu.

Dokładny opis zależności pojęć matematycznych i empirycznych można znaleźć w odpowiednich tekstach z metodologii nauki. Celem tej pracy jest uchwycenie roli matematyki w dziedzinach rozwijających się, kiedy używa się w mało formalny sposób pojęć i wzorów określonej teorii matematycznej, traktując ją jako przydatny język.

Pojawia się pytanie, jaki jest związek pewnej dziedziny fizyki (ogólnie dziedziny empirycznej) z używaną w niej teorią matematyczną. Na ten temat napisano wiele, prezentując i uzasadniając wiele stanowisk. Stanowiska te podzielę na dwie grupy. Do pierwszej zaliczę poglądy, zgodnie z którymi matematyka wywiera jednostronny wpływ na inne nauki. Zgodnie z nimi matematyka jest traktowana jako dziedzina czystej myśli. Nie jest ona całkowicie niezależna od zmysłowego doświadczenia, ponieważ pewne jej działy, takie jak geometria, mają wyraźnie empiryczne pochodzenie. Jednak rozwój tych działów i wysoki stopień abstrakcji, jaki osiągnęły, w znacznym stopniu uniezależniają je od empirycznego i poglądowego punktu wyjścia.

Pod tym względem historia geometrii jest niezwykle ciekawa i pouczająca. Powstała ona w starożytności jako nauka empiryczna i wspaniale się rozwijała, stając się podstawowym działem matematyki greckiej. Była to ponadto pierwsza teoria matematyczna, która została zaksjomatyzowana, a *Elementy* Euklidesa na ponad tysiąc lat stały się wzorem ścisłego, formalnego myślenia, niezależnego od intuicji, poglądowych modeli i związku z materialną rzeczywistością. W filozofii Platona świat bytów matematycznych, w znacznej mierze posiadających charakter geometryczny, był uznany za bardziej podstawowy od świata materii. Wielu filozofów uwierzyło, że matematyka należy do świata czystej myśli, stanowiącego podstawę ontologiczną lub poznawczą świata postrzeganego zmysłami.

Niezależnie od stanowiska w sprawie istnienia bytów matematycznych, myśliciele końca osiemnastego wieku sądzili, że nowoczesne przyrodoznawstwo jedynie korzysta z matematyki, która jest dziedzną niezależną od niego. Jednym z zadań filozofii Kanta było uzasadnienie skuteczności i roli matematyki w poznaniu empirycznym. Uważał on, że geometria Euklidesa stanowi aprioryczną formę ludzkiego myślenia. Tak interpretowana geometria była nauką o podstawowych strukturach poznawczych człowieka. Odwróciło to pierwotny stosunek geometrii i świata. Najpierw prawa geometrii wynikały z własności mierzonych powierzchni i figur, a u Kanta własności te stały się konsekwencją wrodzonej struktury myślenia geometrycznego. Jedno się nie zmieniło. Geometria była jedna — euklidesowa.

Sformułowanie geometrii nieeuklidesowych i wynikająca z tego ogólna teoria przestrzeni metrycznych były początkowo szokiem zarówno dla matematyków, jak i dla filozofów. Trudno było sobie wyobrazić, że geometrii może być wiele. Było to niezgodne z ontologiczną i epistemologiczną rolą przypisywaną geometrii do tego czasu. Po kilkudziesięciu latach doprowadziło to do nowego spojrzenia na geometrię, a w konsekwencji na całą matematykę. Matematyka oderwała się od potocznych intuicji i poznania zmysłowego. Okazało się, że jest to pewna gra myślowa, w której umysł może posługiwać się pewnymi analogiami, lecz w zasadzie jest wolny w wyborze przedmiotu swych badań, byle tylko był to przedmiot niesprzeczny i interesujący. Filozoficzne wnioski dotyczące filozofii nauki wyciągnął Poincaré, który był jednym z twórców konwencjonalizmu. Zgodnie z tym stanowiskiem istnieje wiele spójnych i efektywnych formalnych opisów zjawisk, a wybór jednego z nich jest sprawą w znacznym stopniu dowolną. Uczony kieruje się w tym wyborze pewnymi kryteriami prostoty, wygody, efektywności itp.

W konwencjonalizmie najwyraźniej występuje ta podstawowa rola matematyki, jako języka nauk empirycznych. Współcześnie wielu filozofów i metodologów w taki sposób ujmuje tę sprawę. W Polsce rzecznikiem takiego stanowiska jest M. Heller, którego głęboko nurtuje problem matematyczności przyrody (Heller 1975). Używa on metafory krawca, w której matematyk jest jak krawiec, szyjący ubrania dla dużego sklepu. Ubrania te są następnie mierzone przez klientów, którzy znajdują rozmiary i fasony przydatne dla siebie. Problem można wówczas sformułować w następujący sposób: krawiec szyje ubrania bez oglądania się na klientów, dlaczego więc pewne z jego wytworów tak dokładnie pasują do tych klientów? Oczywiście krawiec szyjący rzeczywiście w ten sposób szybko by zbankrutował, bowiem szansa na znalezienie klienta zadowolonego z jego ubrań byłaby minimalna. Natomiast czysta matematyka traktowana jako swobodna gra ludzkiego umysłu jest w tej wygodnej sytuacji, że przynajmniej pewne jej działy mogą rozwijać się niezależnie od zastosowań. Dlatego zastosowania takie wydają się nawet czymś zaskakującym.

Taki obraz stosunku matematyki do nauk empirycznych jest odpowiedni tylko w pewnych sytuacjach, mianowicie wtedy, gdy dany dział matematyki jest już dobrze rozwinięty i czeka na zastosowanie lub znalazł takie zastosowania. W formalnej metodologii nauki jest to sytuacja standardowa, bowiem analizuje się w niej teorie dojrzałe, które już nie mają kłopotów z podstawowymi pojęciami i prawami. Nauka jednak szybko się rozwija i dotyczy to matematyki w równym stopniu, co dziedzin empirycznych. W trakcie tego rozwoju więź matematyki z przyrodoznawstwem staje się bardziej widoczna i nie jest to już jednokierunkowy wpływ czystego myślenia na opis empirii.

Takie właśnie sytuacje będą przedmiotem moich rozważań. Przejdę teraz do analizy nauki w procesie rozwoju.

2. Wpływ nowej matematyki na fizykę

Używając metafory krawca, rozważymy teraz sytuację, w której w matematyce pojawia się nowa teoria i teoria ta jest stosowana do fizyki. Historia geometrii nieeuklidesowych i ich empirycznych zastosowań jest dobrym tego przykładem. Na początku ubiegłego stulecia jedyną geometrią była geometria euklidesowa i ona to stanowiła podstawę fizycznego obrazu świata. Fizycy nie mogli myśleć inaczej, ponieważ ich wyobraźnia nie mogła korzystać z matematycznych modeli przestrzeni, które jeszcze nie istniały. Kiedy modele takie pojawiły się i uczeni przyzwyczaili się do nich, pojawiła się pokusa powiązania ich ze światem empirii. Matematyczny problem związku trzech możliwych geometrii — euklidesowej, eliptycznej i hiperbolicznej — został rozwiązany w ten sposób, iż udowodniono, że każdą z tych geometrii można wymodelować za pomocą pozostałych. Najłatwiej było wyobrazić sobie geometrię eliptyczną, dla której nie ma prostych równoległych i każde dwie proste przecinają się. Jest to dobrze znana już w starożytności geometria na kuli. Gdy potraktujemy powierzchnię kuli jako całą przestrzeń, to otrzymamy zależności charakterystyczne dla tej geometrii nieeuklidesowej, której podstawy zaproponował Bolayi. Do końca dziewiętnastego wieku problemy interpretacji i powiązań poszczególnych geometrii zostały całkowicie rozwiązane, a na przełomie wieków udowodniono, że każda geometria metryczna powstaje z geometrii rzutowej, w której wyróżnia się odpowiednią powierzchnię opisaną równaniem drugiego stopnia, tzw. kwadrykę (Tempczyk 1990).

Równolegle do prac prowadzonych w samej geometrii, uczeni próbowali zastosować te nowe możliwości do opisu przestrzeni fizycznej. Skoro pojawiły się nowe geometrie, to nie było już oczywiste, że przestrzeń fizyczna musi być euklidesowa. Zaczęto zastanawiać się nad powiązaniem geometrii fizycznej z geometrią matematyczną. Zastanawiali się nad tym często ci sami ludzie, którzy tworzyli geometrię. Najbardziej znanym przykładem jest Gauss, który dokonał pomiarów geodezyjnych trójkąta utworzonego z trzech wierzchołków gór Harzu, chcąc stwierdzić, czy suma kątów rzeczywistego trójkąta jest naprawdę równa 180°. Prace te, opisane w wielu książkach poświęconych historii fizycznej koncepcji przestrzeni, pokazują sytuację nieco odmienną od poprzedniej. Powstaje nowa teoria matematyczna i natychmiast stosuje się ją do tworzenia modeli fizycznych. Modele te są na początku bardzo ogólne, a dopiero w miarę rozwoju samej matematyki nabierają precyzji.

Mało znanym a bardzo ciekawym przykładem tego jest historia ogólnej teorii względności. Już 50 lat przed Einsteinem Clifford sformułował program opisu przestrzeni fizycznej jako zakrzywionej, w której lokalne oddziaływania wpływają na geometrię przestrzeni (Jammer 1954). Program ten, pod względem intuicji i ogólnej koncepcji bardzo podobny do teorii Einsteina, był w owym czasie niewykonalny i trzeba było długo czekać na jego realizację. Warto wspomnieć tutaj, że Einstein na bieżąco śledził rozwój geometrii różniczkowej i stosował jej najnowsze osiągnięcia.

Drugim przykładem wpływu nowej matematyki na ważny dział fizyki jest teoria grup. Korzystając z niej van der Waerden sformułował mechanikę kwantową. Sformułowanie to było początkowo nowym eleganckim sposobem opisu rzeczy znanych; prędko okazało się jednak, że daje ono nowy ogólny sposób opisu zjawisk, który można zastosować w wielu dziedzinach, na przykład w krystalografii. Teoria grup była szczególnie przydatna w klasyfikacjach różnego typu, ujmując podstawową jedność zjawisk lub obiektów różniących się pod pewnymi istotnymi względami. Klasyfikacje takie oparte są na teorii reprezentacji grup. Fizycy tak często i szeroko stosowali reprezentacje, że ich teoria stała się bardziej działem fizyki niż matematyki. Gdy teoria grup rozwinęła się jako dział matematyki i język teorii fizycznych, zaczęto stosować ją w nauce w sposób twórczy, na przykład do klasyfikacji cząstek elementarnych. Obecnie nie można sobie wyobrazić fizyki bez zaawansowanej teorii reprezentacji grup. Na grupy cechowania patrzy się jak na ogólny schemat opisu wszystkich oddziaływań fundamentalnych. Dzięki opisowi grupowemu udało się połączyć ze sobą oddziaływania słabe i elektromagnetyczne.

Podsumujmy oba przykłady. Pokazują one, w jaki sposób można pewne działy matematyki stosować na bieżąco w naukach przyrodniczych. Zastosowania te mają wpływ obustronny. Fizyce dają nowe perspektywy i możliwości tworzenia nowych modeli zjawisk, natomiast matematykę rozwijają i wzbogacają. W początkach nauki nowożytnej przykładem takiej więzi był rachunek różniczkowy i całkowy, który od początku był językiem fizyki, i którego pojęcia miały bardzo wyraźny sens fizyczny. Dopiero w połowie dziewiętnastego wieku powstała precyzyjna teoria matematyczna zwana „analizą matematyczną".

Pozostał do omówienia przypadek teorii, których intuicje są wzięte ze świata fizycznego, a które w końcu stały się czystą matematyką. Tak było w początkach geometrii, o której historii początkowej wiemy bardzo mało. Skierujemy wobec tego uwagę na teorię fraktali, która powstała i rozwija się pod wyraźnym wpływem intuicji empirycznych. Zaletą tego przykładu jest to, że jest on współczesny; dlatego można na nim prześledzić istotne szczegóły związku matematyki z fizyką, którą nadal traktujemy jako ogólną naukę przyrodniczą.

3. Teoria fraktali

W roku 1982 B. Mandelbrot wydał swą najważniejszą książkę *The Fractal Geometry of Nature*, w której ogłosił powstanie nowego działu matematyki: teorii fraktali. Wprawdzie obiekty matematyczne nazwane przez niego „fraktalami" były znane matematykom od dawna (niektóre z nich były skonstruowane w połowie ubiegłego stulecia), należały jednak do rozmaitych działów matematyki i były w nich traktowane w sposób właściwy tym teoriom. Fraktale — to z punktu widzenia klasycznej matematyki twory bardzo dziwne. Kiedy zaczęły się pojawiać, spowodowały sporo zamieszania, ponieważ były niezgodne z panującymi wówczas nawykami myślenia i intuicjami. Często nie było wiadomo, co z nimi zrobić i jak je opisać. Na przykład, pojedyncza trajektoria ruchu Browna jest prawie zawsze krzywą ciągłą, lecz nieróżniczkowalną i posiadającą w skończonym czasie nieskończoną długość. Można udowodnić, że krzywe takie istnieją, lecz trudno je opisać, a zwłaszcza ująć to, co w nich najbardziej charakterystyczne. Dlatego, jak pisze Mandelbrot, fraktale były w przeszłości traktowane jak potwory, z którymi trzeba się rozprawić. Wiele z tych konstrukcji odegrało ważną rolę, ponieważ na ich przykładzie matematycy ujrzeli ograniczenia stosowanych przez siebie pojęć, zawęzili zakres wielu twierdzeń lub byli zmuszeni do sformułowania nowych koncepcji.

Mandelbrot postanowił z tych dziwnych i zaledwie tolerowanych konstrukcji utworzyć nowy dział, którego zadaniem będzie opisanie tego, co we fraktalach najbardziej charakterystyczne. Okazało się to przedsięwzięciem nadzwyczaj efektywnym i ciekawym, i w ciągu niewielu lat teoria fraktali rozwinęła się w przyzwoitą dziedzinę matematyki. Obecnie jest powszechnie znana i intensywnie rozwijana oraz stosowana — zarówno w samej matematyce, jak i w naukach empirycznych.

Nie będziemy wchodzili w szczegóły tej teorii, które można znaleźć bez kłopotu w odpowiednich podręcznikach, spojrzymy natomiast na jej rozwój z punktu widzenia związku matematyki z empirią i codziennym doświadczeniem. Przykładów tego związku można znaleźć wiele w samej książce Mandelbrota. Punktem wyjścia były dla niego nie tylko odpowiednie konstrukcje matematyczne, lecz również wiele form i kształtów spotykanych w codziennym życiu. Zauważył on, że w matematyce istnieje ogromna luka, polegająca na tym, że nie opisuje ona poprawnie wielu kształtów powszechnie spotykanych w przyrodzie. Chodziło o kształty poszarpane, nieregularne, pełne zagięć i ostrych wierzchołków. Geometria i analiza matematyczna wiele osiągnęły w sferze linii gładkich, lokalnie dających się opisać za pomocą funkcji różniczkowalnych. Na temat takich funkcji istnieje bogata i szczegółowa wiedza matematyczna. Również geometria różniczkowa oparta jest na lokalnych operacjach różniczkowania; dlatego jej zakres ogranicza się do krzywych i powierzchni różniczkowalnych. Geometria różniczkowa jest w pewnym sensie teorią zamkniętą. Opisała ona wszystko, co mogła. Miała ogromny wpływ na rozwój fizyki, zwłaszcza ogólnej teorii względności i kosmologii, lecz pozostawiała na boku obiekty i procesy, które nie są odpowiednio gładkie i regularne. Fizycy musieli sobie jakoś radzić z takimi zjawiskami, lecz szło im to opornie, ponieważ nie mieli odpowiednio elastycznego i rozwiniętego języka formalnego.

Z drugiej strony nieregularnych zjawisk i poszarpanych kształtów nauka zna wiele, i nie są to wcale sprawy odległe od codziennego życia. Wystarczy przyjrzeć się płatkom śniegu, zarysowi skalistych gór, poszarpanemu brzegowi Norwegii, liściom paproci, kryształom itp. Mandelbrot tworząc swoją teorię chciał opisać także te kształty. Oto co pisze na ten temat we wstępie do swej książki (Mandelbrot 1982, s. 5):

„Przyrodnicy będą (jak sądzę) zdziwieni i zadowoleni, gdy dowiedzą się, że niemało kształtów, które nazywali *ziarnistymi, potworkowatymi, pośrednimi, pryszczatymi, krościatymi, rozgałęzionymi, podobnymi do wodorostów, dziwnymi, splątanymi, pokręconymi, wijącymi się, kosmatymi, pomarszczonymi* i tym podobnie, może być od teraz opisanych w ścisły i silnie ilościowy sposób.

Matematycy będą (jak sądzę) zdziwieni i zadowoleni, gdy dowiedzą się, że zbiory dotychczas uznawane za wyjątkowe, mogą w pewnym sensie być uważane za regułę; że konstrukcje poczytywane za patologiczne mogą w naturalny sposób wyrastać z bardzo konkretnych problemów, i że badanie Natury może pomóc w rozwiązaniu starych problemów i dostarczyć tak wielu nowych zagadnień."

W sferze badania takich nieregularnych kształtów brak było odpowiedniej teorii matematycznej i zapotrzebowanie na taką teorię ze strony wielu nauk było ogromne. Toteż koncepcja Mandelbrota spotkała się natychmiast z zainteresowaniem i entuzjazmem wśród przedstawicieli nauk zajmujących się strukturami o nieregularnej budowie, fizyków, chemików, geologów, biologów, lekarzy. W przeciwieństwie do nich wielu matematyków nie uznawało osiągnięć Mandelbrota, o czym pisze J. Gleick w piątym rozdziale książki poświęconej chaosowi (Gleick 1987). Teoria fraktali znalazła dzięki temu współtwórców również wśród naukowców z dziedzin praktycznych. Tak było prawdopodobnie z geometrią w czasach starożytnych, a w naszym stuleciu podobnie rozwinęła się teoria reprezentacji grup, powszechnie stosowana w fizyce. Obecnie nawet stosunkowo zaawansowane monografie z teorii fraktali poświęcają wiele uwagi praktycznym przykładom i zastosowaniom (Falconer 1989). Nie zmienia to podstawowego faktu, że jest to dobrze rozwinięta teoria matematyczna.

4. Zastosowanie fraktali w fizyce

Zajmiemy się teraz nieco dokładniej aktualnymi zastosowaniami tej teorii w rozmaitych działach fizyki. Otóż zastosowania takie pojawiły się bardzo szybko. Fizycy natychmiast zorientowali się, jakie wspaniałe możliwości daje ten nowy formalizm w tych działach, które z racji braku regularności opisywanych zjawisk miały kłopoty z ich zadowalającym ujęciem i zrozumieniem. Wiele procesów zachodzących w warunkach dalekich od stanu równowagi przebiega w nieregularny i miejscami gwałtowny sposób. Dobrze znanym przykładem są zawirowania widoczne w szybko płynącej wodzie. Struktura wirów, intuicyjnie dobrze znana prawie każdemu, jest nieskończenie bogata i zmienna. Podstawą zastosowania klasycznej geometrii i analizy matematycznej do opisu kształtów jest istnienie w nich granicy komplikacji, po osiągnięciu której dana struktura staje się prosta i gładka. Istnienie takiej granicy zapewnia różniczkowalność danej krzywej. Można metaforycznie powiedzieć, że linie i powierzchnie regularne zawierają skończoną ilość informacji. W przeciwieństwie do nich fraktale — to takie zbiory, których struktura jest skomplikowana w każdej skali, a ponadto takie, że każdy dowolnie mały fragment ma kształt podobny do kształtu całości. Biorąc pod uwagę tę cechę, Mandelbrot zdefiniował fraktale jako obiekty samopodobne, to znaczy takie, których drobne fragmenty są zawsze podobne do całości. Klasyczne przykłady zbioru Cantora lub dywanu Sierpińskiego są właśnie takie. Definicja ta nie była zadowalająca formalnie i trzeba było ją uściślić, jednak cecha samopodobieństwa została wyróżniona trafnie i pozostała (Wicks 1991).

Dynamiczne zawirowania w cieczach są samopodobne. Gdy coraz dokładniej przyglądamy się wirom, to dostrzegamy coraz więcej szczegółów, które z kolei zawierają następne szczegóły i droga ta nie ma końca. Również wiele struktur spotykanych w przyrodzie ma podobną budowę. Przyjrzyjmy się skalistym graniom górskim. Są one poszarpane i pełne sterczących wypustek. Gdy podejdziemy bliżej dostrzegamy coraz więcej nierówności, na sterczących skałach pojawiają się nowe kolce, a na nich następne wypustki i tak dalej. Wiadomo oczywiście, że żadna materialna struktura nie może być bez końca pogmatwana i poszarpana ze względu na atomową budowę materii; jednakże w praktyce nauka prawie nigdy nie schodzi na ten poziom i można z dobrym przybliżeniem opisywać poszarpany brzeg Norwegii, skaliste góry, płatki śniegu i rosnące kryształy jako samopodobne. Zastosowanie do takich zjawisk fraktali daje ciekawe i ogólne wyniki, a ponadto dostarcza nowych efektywnych metod rachunkowych.

Takie poszarpane powierzchnie, występujące u obiektów materialnych różnego rodzaju i w różnych skalach, stały się idealnym obiektem badań uczonych, stosujących geometrię fraktali jako język matematyczny. Obecnie w znacznym stopniu dzięki tej teorii rozwija się samodzielna gałąź nauk przyrodniczych, nazywana „nauką o powierzchniach" (*surface science*), której zasadniczym zadaniem jest opis nieregularnych powierzchni, pojawiających się zarówno na obiektach statycznych, takich jak skały, jak i dynamicznych, jak na przykład rosnące kryształy, których znanymi przykładami są płatki śniegu (Family, Vicsek 1991). Płatek śniegu powstaje z maleńkiego kryształu wody, który ma symetrię sześciokątną, a następnie spadając około godziny na ziemię w wilgotnym powietrzu rozgałęzia się i rośnie zależnie od lokalnych warunków panujących w zaburzonym powietrzu. Ponieważ jego ostateczny kształt jest niejako zapisem jego historii, a możliwych historii jest nieskończenie wiele, wszystkie płatki różnią się między sobą, chociaż wspólna jest im sześciokątna symetria początkowa (Gleick 1987, s. 309). Podobnie nieregularne są kryształy rosnące w roztworach różnych związków chemicznych, porowate skały, powierzchnie metali itp. Wszystkie tego typu powierzchnie można modelować za pomocą teorii fraktali.

Również w przyrodzie ożywionej często spotykamy konstrukcje, do opisu których najwygodniejsze i najodpowiedniejsze są fraktale. Są to przede wszystkim organizmy rozgałęziające się na coraz drobniejsze części, które nie posiadają wyraźnej granicy tego rozdrobnienia, takie jak gąbki, paprocie, naczynia przewodzące w liściach, naczynia włoskowate u zwierząt, unerwienie itp. Do niedawna uczeni nie wiedzieli, jak zabrać się do tego rodzaju tworów, ponieważ nie pasowały one do gładkich krzywych i powierzchni, za pomocą których modelowano zjawiska przyrody. Teraz jest to ciekawy i samodzielny dział nauk empirycznych, przekraczający dawne podziały. Można na przykład — w podobny sposób podchodzić do wzrostu i kształtów gąbek oraz do dynamiki i struktury miast (Crilly, Earnshow, Jones 1991, rozdz. 3 i 4). Nowoczesne metody stosowane w nauce o powierzchniach podane są wraz z zastosowaniami w książce *Dynamics of Fractal Surfaces* (Belair, Dubuc 1991).

Następną dziedziną, w której fraktale znalazły szybkie zastosowanie, i która dzięki nim znacznie się rozwinęła, jest teoria chaosu. Jest to teoria nieliniowych burzliwie rozwijających się układów dynamicznych. W układach tych, stosując komputery, odkryto niesłychanie bogatą i skomplikowaną strukturę, której złożoności nie można opisać zadowalająco klasycznymi metodami, ponieważ metody te są zbyt uproszczone i niedokładne. Najciekawszą cechą takich układów jest istnienie w ich przestrzeniach fazowych obszarów skupiających w sobie długookresowe rozwiązania równań. Obszary takie nazwano atraktorami. Nauka klasyczna znała atraktory. Na przykład w dwuwymiarowej przestrzeni fazowej możliwe są tylko dwa rodzaje atraktorów: punkty i cykle graniczne. Tymczasem w przestrzeniach bogatszych odkryto niewyobrażalne bogactwo atraktorów, które ze względu na ich niebanalną skomplikowaną strukturę nazwano dziwnymi (Schuster 1993). Dziwne atraktory są fraktalami. Odkryto je w wielu rodzajach równań nieliniowych.

Nie warto dokładnie wyliczać wszystkich ciekawych zastosowań teorii fraktali w naukach fizycznych i pokrewnych naukach przyrodniczych. Wspomnijmy jeszcze o fizyce statystycznej, o teorii ruchu Browna, o dynamice wielu rodzajów procesów, a nawet o kosmologii (Grabińska 1992, rozdz. 5). Celem tego powierzchownego przeglądu jest pokazanie, jak bardzo teoria fraktali wpłynęła na fizykę. Wpływ ten omówimy teraz z metodologicznego i filozoficznego punktu widzenia.

5. Teoria fraktali a zmiany w fizyce

Spojrzymy więc na zmiany spowodowane przez teorię fraktali w teoriach fizycznych jako na zmianę paradygmatu. Nie jest to oczywiście żadna wielka rewolucja naukowa w rodzaju teorii względności, niemniej jednak całkowicie nowy punkt widzenia na dziwaczne kształty wielu obiektów przyrody spowodował istotne zmiany w teoriach badających te obiekty. Przyrodnicy otrzymali nowe narzędzie matematyczne, którego potrzebowali od dawna, dlatego natychmiast zastosowali je z bardzo dobrymi wynikami. O wynikach tych była już mowa. Teraz zanalizujemy je stosując Kuhnowskie pojęcie paradygmatu i zmiany paradygmatu: zastąpienia jednego przez inny. Oto omówione w punktach podstawowe cechy aktualnej sytuacji.

(a) Mandelbrot podkreśla, że fraktale były przez klasyczną matematykę traktowane jako konstrukcje odbiegające od normy, dziwaczne, trudne do opisania, a często sprzeczne z intuicją. Spotykane w przyrodzie odpowiedniki fraktali nie mogły być przez naukowców traktowane w podobny sposób, ponieważ nie są one wcale rzadkością, a w wielu dziedzinach stanowią regułę. Kiedy jednak do opisu takich obiektów stosowano analizę matematyczną i geometrię różniczkową, to pojawiały się poważne trudności, ponieważ teorie te nie pasowały do zadań, jakie im stawiano. Można powiedzieć, że przyrodnicy uzbrojeni w klasyczną matematykę byli częściowo bezsilni, ponieważ nie wiedzieli jak uchwycić, opisać i wyjaśnić to, co w danych zjawiskach i ciałach było najbardziej widoczne: ich postrzępioną, niesłychanie bogatą strukturę. Z tego powodu tego typu teorie były stosunkowo mało rozwinięte, miały fenomenologiczny i niepełny charakter. Rozwijano je, ponieważ były potrzebne i często bardzo ważne praktycznie, lecz brakowało im pełności i elegancji innych rozwiniętych teorii fizycznych.

Sytuacja uległa istotnej zmianie po zastosowaniu teorii fraktali. Nie trzeba już unikać lub w okrężny sposób opisywać ważnych właściwości takich zjawisk. Nowa teoria matematyczna właśnie po to została stworzona, aby je badać zarówno jakościowo, jak i ilościowo. Jest to zjawisko typowe po wprowadzeniu w danej dziedzinie nowego, bardziej dopasowanego do rzeczywistości opisu zjawisk i związanej z nim teorii. Na przykład, macierzowa mechanika Heisenberga była takim nowym językiem dla fizyki kwantowej. Z samych formalnych własności macierzy wynikały pewne istotne własności procesów mikroświata, które używając klasycznych metod opisywano w sposób sztuczny i niekompletny. Podobnie jest obecnie z fraktalnym opisem porowatych skał, dynamiki procesów turbulentnych, czy struktury rosnących kryształów. Teoria fraktali stanowi naturalny i efektywny schemat opisu tych procesów.

(b) Dzięki nowej geometrii odkrywa się ogólne prawa, wiążące ze sobą zjawiska należące do odrębnych dziedzin. Nie jest ważna szczegółowa dynamika tych zjawisk ani ich podstawowe składniki, lecz ich fraktalna struktura i odpowiednie matematyczne własności fraktali. Własności te występują w wielu dziedzinach; dlatego nowa teoria tworzy nowy rodzaj ogólności i prowadzi do nowego rodzaju wyjaśniania. Tak było w historii fizyki wiele razy. Na przykład, termodynamika przekroczyła podziały dokonane przez mechanikę, a teoria atomowa zintegrowała prawie całą fizykę i chemię. W mniejszym zakresie, lecz równie skutecznie robi to obecnie teoria fraktali.

Oprócz praw pojawiły się typowe uniwersalne przykłady tych własności materii, które stały się najważniejsze w nowej teorii. Płatki śniegu, które były dotychczas trudnym do opisania przykładem bogactwa form przyrody, stały się modelem kształtowania się postrzępionych struktur fraktalnych. Ponadto powstały i rozwijają się nowe metody rachunkowe, korzystające z pojęcia ułamkowych wymiarów, generatorów, współczyników kontrakcji itp.

(c) Nowy język i sposób opisu prowadzi do ujawnienia i opisania analogii, które dawniej albo były całkowicie niewidoczne, albo też nie można było uchwycić ich istoty. Te nowe cechy i podobieństwa prowadzą z kolei do nowych klasyfikacji obiektów i zjawisk. Klasyfikacje te nakładają się na stare podziały, zacierają je lub ignorują, ponieważ chodzi teraz o co innego. Podobieństwo kształtów i sposobu dynamicznego rozwoju pewnych klas obiektów może stać się podstawą dla stosowania jednakowych praw i wysuwania daleko idących wniosków. Jest to też bardzo ważna cecha wprowadzenia nowego paradygmatu.

(d) Przy wprowadzeniu nowego sposobu opisu zjawisk natychmiast pojawia się cała sfera nowych możliwości. W początkowym okresie jest wiele do zrobienia i można stosunkowo szybko uzyskać ciekawe istotne wyniki. Dobrym przykładem takiej sytuacji jest okres rozwoju mechaniki kwantowej. W ciągu około dziesięciu lat nowe istotne rezultaty pojawiały się prawie bez przerwy. Niewiele było ośrodków na świecie, w których dobrze rozumiano co się dzieje, dlatego prawie wszyscy uczestnicy seminariów Bohra i Borna stali się wybitnymi fizykami i prawie wszyscy wielcy twórcy nowej fizyki byli związani z tymi ośrodkami. Teoria fraktali nie jest takim przełomem, jednak nowe możliwości, które niesie, również doprowadziły do wielu istotnych osiągnięć. Jest ona łatwa do zrozumienia, dlatego fizycy nauczyli się jej bez kłopotów i zaczęli powszechnie stosować. Oprócz tego jej zasięg jest o wiele większy niż zasięg podstawowych teorii fizycznych. Teorie podstawowe zmieniają istotnie nasze zrozumienie materii, zdarza się jednak, że ich przewidywania i zasięg jest poważnie ograniczony. Taką teorią jest ogólna teoria względności. Przewidziała ona niewiele, a naprawdę stosuje się ją tylko w teorii czasoprzestrzeni, teorii czarnych dziur i w kosmologii. Fraktale są mniej rewolucyjne, za to o wiele bardziej konkretne i efektywne, oparte na tej geometrii modele pojawiły się we wszystkich prawie naukach empirycznych.

(e) Obserwujemy silne powiązanie matematyki z naukami empirycznymi. Teoria fraktali jest podstawą rozwoju wielu dziedzin, sama jednak korzysta z nich. Bierze z nich przykłady, problemy i rozwiązania. Będąc niewątpliwie teorią matematyczną, rozwija się w silnym związku z innymi naukami. Taki był przez półtora wieku rozwój analizy matematycznej. Ci sami ludzie rozwijali analizę i stosowali ją. Granica między matematyką i jej zastosowaniami była nieostra i płynna. Historia klasycznej mechaniki pokazuje wiele takich powiązań i wspólnych rezultatów. Podobnie dzieje się z teorią fraktali. Na przykład, generowanie fraktali statystycznych leży na granicy między teorią a metodami rachunkowymi i modelami wziętymi z przyrody, takimi jak liście paproci. Widać na tym przykładzie, jak odległy od praktycznej działalności matematyków jest model matematyka jako krawca szyjącego ubrania bez zwracania uwagi na klientów i ich potrzeby. Wiele bardzo abstrakcyjnych dziedzin rozwija się obecnie w taki sposób; nie wiadomo jednak, czy nie znajdą one nagle zastosowań w fizyce lub w jakiejś innej nauce. Lie był krytykowany za to, że bada grupy oderwane od rzeczywistości, i że jego teoria nigdy się nie przyda. Minęło kilkadziesiąt lat i jego teoria stała się narzędziem fizyki, a zastosowania fizyczne spowodowały okres szybkiego rozwoju samej tej teorii. W omawianym przez nas przypadku matematyka i nauki przyrodnicze rozwijają się cały czas razem i są silnie powiązane ze sobą.

(f) Uczeni są świadomi, że ich punkt widzenia i opis przyrody jest nowy. Oto co Barnsley pisze we wstępie do swojej książki (Barnsley 1988, s. 1): „Geometria fraktali spowoduje, że będziesz wszystko widział inaczej. Dalsze czytanie jest niebezpieczne. Ryzykujemy utratą dziecinnego obrazu chmur, lasów, galaktyk, liści, piór, skał, gór, potoków wody, dywanów, cegieł i wielu innych rzeczy. Już nigdy nasza interpretacja tych rzeczy nie będzie taka sama... Geometria fraktali jest rozszerzeniem geometrii klasycznej. Można jej użyć do tworzenia dokładnych modeli struktur fizycznych, od paproci do galaktyk. Geometria fraktali jest nowym językiem. Gdy potrafimy nim mówić, możemy opisać kształt chmury tak dokładnie, jak architekt może opisać dom."

Mamy zatem do czynienia z powstaniem i rozwojem nowego sposobu opisu zjawisk, z nowym punktem widzenia na przyrodę.

(g) Na poziomie organizacji nauki nowa dziedzina pojawiła się jako nowe specjalizacje, nowa tematyka prac, nowe czasopisma i konferencje poświęcone fraktalnym modelom najróżniejszych zjawisk. Wszystko to dzieje się szybko i jednocześnie. Na przykład, trzy nowe czasopisma *Chaos Solitons & Fractals. Applications in Science and Engineering; Journal of Nonlinear Science i Nonlinear Science Today* zaczęto wydawać w jednym 1991 roku. Podobnie przeglądając katalogi najpoważniejszych wydawnictw naukowych obserwuje się mnóstwo tytułów związanych z tą tematyką. Teoria fraktali stała się trwałą częścią nowoczesnej nauki.

Te cechy aktualnego stanu badań pokazują, jak szeroko i poważnie fraktale zmieniły nauki empiryczne. Jest to nie tyle rewolucja naukowa w sensie gruntownej przebudowy nauki, ile raczej pojawienie się uzupełniającego modelu zjawisk. Nie jest prawdą, że odmienne paradygmaty muszą się zwalczać, a ich przedstawiciele nie mogą się porozumieć. W przypadkach takich drobnych «rewolucji» mamy do czynienia ze wzbogaceniem języka i możliwości poznawczych nauki; z pojawieniem się klasy nowych modeli, opartych na nowej pojęciowo teorii formalnej.

W pracy niniejszej skupiłem uwagę na sytuacji panującej w nauce, nie wspominając o ciekawych filozoficznych konsekwencjach nowej teorii. Jedną z nich jest pojęcie prostoty, omawiane przez samego Mandelbrota. Pokazuje on, że przechodząc od klasycznego do fraktalnego opisu kształtów zmieniamy pojęcie prostoty. Dowodzi przekornie, że zbiór Cantora lub dywan Sierpińskiego są prostsze od koła. Takich spraw jest wiele, ale wykraczają one poza temat tej pracy. Chodziło mi tutaj przede wszystkim o pokazanie, jak bardzo matematyka jest spleciona z naukami empirycznymi, i w jaki sposób oba typy nauk zwrotnie wpływają na siebie.

Literatura

Barnsley, M., 1988. *Fractals Everywhere*, Academic Press, Boston.

Belair, J. and Dubuc, S. (red.), 1990. *Fractal Geometry and Analysis*, Kluwer Academic Publishers, Amsterdam.

Crilly, A.J., Earnshow, R.A. and Jones, H. (red.), 1991. *Fractals and Chaos*, Springer, Berlin.

Falconer, K., 1990. *Fractal Geometry. Mathematical Foundations and Applications*, J.Wiley & Sons, New York.

Family, F. and Vicsek, T. (red.) 1991. *Dynamics of Fractal Surfaces*, World Scientific, Singapore.

Gleick, J., 1987. *Chaos*, Penguin Books, New York.

Grabińska, T., 1992. *Realizm i instrumentalizm w fizyce współczesnej*, Wydawnictwo Politecchniki Wrocławskiej, Wrocław.

Heller, M., 1975. *Spotkania z nauką*, Pax, Warszawa.

Jammer, M., 1954. *Concepts of Space*, Harvard University Press, Cambridge, Mass.

Mandelbrot, B., 1982. *The Fractal Geometry of Nature*, W.H. Freeman and Company, San Francisco.

Schuster, H.G., 1993. *Chaos deterministyczny. Wprowadzenie*, PWN, Warszawa.

Tempczyk, M., 1990. „Rozwój pojęcia przestrzeni w geometrii XIX wieku", *Studia Philosophiae Christianae*, t. 26, nr 1 s. 184-194.

Wicks, K.R., 1991, *Fractals and Hyperspaces*, Springer, Berlin.