Anna Wójtowicz

Jaką logikę może zaakceptować filozof?

Filozofia Nauki 3/4, 97-111

1995

Filozofia Nauki
Rok III, 1995, Nr 4(12)

Anna Wójtowicz

Jaką logikę może zaakceptować filozof?

1. LOGIKA Z PUNKTU WIDZENIA FILOZOFA

Dla filozofa — w odróżnieniu od matematyka — logika nie jest interesująca jako pewna konstrukcja czysto formalna. Jest ona narzędziem pozwalającym sprecyzować i opisać rozumowania przeprowadzane w języku naturalnym, wyjaśnić strukturę teorii naukowych i stanowisk filozoficznych. W tym celu filozof wybiera jakiś system logiczny spośród już istniejących (czasami nieco go modyfikując) lub tworzy nową logikę, lepiej pasującą do jego aktualnych potrzeb.

Obserwację tę potwierdza rozwój logiki na początku dwudziestego wieku. Wiele powstałych współcześnie nieklasycznych systemów logicznych ma właśnie genezę filozoficzną. Jako przykład można tu podać:

— intuicjonistyczną logikę Brouwera, formalizującą pojęcie efektywności w matematyce;

— logiki modalne, których celem jest sprecyzowanie zależności między takimi terminami, jak „jest możliwe, że", „jest konieczne, że";

— logiki temporalne, dzięki który możemy opisać formalną strukturę czasu i definiować takie pojęcia, jak „zawsze", „czasami" itp;

— logiki wielowartościowe Łukasiewicza, które pozwalają m.in. sformułować stanowisko indeterministyczne;

— logiki niefregowskie, dające możliwość mówienia nie tylko o wartości logicznej zdania, ale też o tym, do czego dane zdanie się odnosi;

— logiki deontyczne, epistemiczne itp.

Logiki nieklasyczne powstały po to, żeby wyrazić pewne subtelniejsze (np. nieekstensjonalne) własności rozumowań i pojęć, które nie są wyrażalne w logice klasycznej. Z biegiem czasu jednak logiki te oderwały się od swoich «filozoficznych korzeni» i zaczęły «żyć własnym życiem» — jako pewne czysto formalne struktury. Poszczególne systemy logiczne rozwijano dalej ze względu na ich interesujące własności formalne, ze względu na to, że są one uogólnieniem innych systemów lub że są podobne do pewnych struktur algebraicznych czy topologicznych. W związku z tym powstały m.in. «kosmosy» logik modalnych, temporalnych, parakonsystentnych, superintuicjonistycznych itp. Dopiero wtórnie zaczęto się zastanawiać, czy takie systemy mają jakąś naturalną interpretację filozoficzną: czy są jeszcze do czegoś przydatne filozofowi, czy też stanowią tylko przedmiot zainteresowania logika matematycznego.

Jeśli na logikę patrzymy z punktu widzenia filozofa, to wydaje się, że nie wszystkie logiki są równie «dobre», czy równie «akceptowalne».

Filozof może na logikę nakładać ograniczenia dwojakiego rodzaju.

(1) Ograniczenia pierwszego rodzaju — ontologiczne — nakazują wybór tej logiki, która pociąga za sobą jak najsłabsze zobowiązania ontologiczne. Jest to wyraz naturalnego dążenia do tego, aby samo narzędzie, którym posługujemy się w celu opisania jakiejś dziedziny, nie miało wpływu na jej ontologiczne własności. W tym sensie logika pierwszego rzędu (w której zobowiązujemy się jedynie do istnienia indywiduów) jest łatwiejsza do zakceptowania dla filozofa niż logika wyższych rzędów (w której zobowiązujemy się do istnienia klas). Problem ten rozważał m.in. Quine ([QUINE], [THRAP]).

(2) Ograniczenia drugiego rodzaju — formalne — wynikają z tego, że logika ma opisywać strukturę rzeczywistych rozumowań przeprowadzanych w pewnym języku (języku naturalnym bądź jakimś jego fragmencie) i dotyczących określonej dziedziny. Wydaje się, że samo kryterium niesprzeczności czy formalnej elegancji logiki staje się tu niewystarczające. W grę muszą tu wchodzić — oprócz nakazu uznania pewnych formuł specyficznych dla danej dziedziny (np. naturalnych zależności między pojęciami konieczności i możliwości w logice modalnej albo formuł pozwalających uniknąć paradoksów implikacji w logice intuicjonistycznej) — pewne inne formalne własności logik. Można je podzielić na dwie grupy. Do pierwszej należałyby takie własności logiki, które gwarantowałyby jej efektywność jako pewnego sposobu rozumowania. Są to własności skończoności, zwartości i strukturalności. Do drugiej grupy proponujemy zaliczyć własności, dzięki którym zależności między terminami pozalogicznymi występującymi w języku danej logiki, są dobrze określone i spełniają pewne naturalne intuicje, dotyczące związku treściowego między przesłankami i wnioskiem w danym rozumowaniu. Są to własności: interpolacji, Hallden-zupełności, własność Robinsona i własność Betha. Aby sformułować precyzyjnie, na czym te własności polegają wprowadzimy następujące oznaczenia i definicje.

2. POJĘCIA WSTĘPNE

Przez logikę **L** będziemy rozumieć parę $\langle J_L, Cn_L\rangle$, gdzie J_L jest językiem danej logiki (zdaniowej lub pierwszego rzędu), a Cn_L jest operacją konsekwencji określoną na formułach tego języka, zdefiniowaną przez zbiór aksjomatów i reguły wnioskowania.

Przez FOR_J będziemy rozumieć zbiór wszystkich formuł języka J_L, przez AT_J — zbiór wszystkich jego formuł atomowych, a przez $FOR_{NOR}(J)$ — zbiór formuł języka J w postaci normalnej.

W wypadkach, w których nie prowadzi to do nieporozumień będziemy pisać „J" zamiast „J_L" i „Cn" zamiast „Cn_L" oraz odpowiednio „FOR", „AT", „FOR_{NOR}" zamiast „FOR_J", „AT_J", $FOR_{NOR}(J)$.

Wyrażenie „$\alpha \in Cn(X)$" oznacza to, że w danej logice na podstawie zbioru przesłanek X można udowodnić formułę α. Jeśli α można udowodnić na podstawie pustego zbioru przesłanek (a więc, gdy $\alpha \in Cn(\emptyset)$), to α jest tezą danej logiki **L**.

Przez „**SC**" będziemy oznaczać klasyczny rachunek zdań, a więc **SC** = $\langle J_{SC}, Cn_{SC}\rangle$; przez „**PC**" — klasyczną logikę pierwszego rzędu, a więc **PC** = $\langle J_{PC}, Cn_{PC}\rangle$.

Za pomocą operacji konsekwencji Cn możemy zdefiniować *zbiór sprzeczny* w danej logice: X jest zbiorem sprzecznym zawsze i tylko, gdy $Cn(X) = FOR$.

Przez *parametry* danej formuły α będziemy rozumieć symbole występujące w tej formule, które nie są stałymi logicznymi. Dla logik zdaniowych będą to więc zmienne zdaniowe (oznaczane jako $var(\alpha)$), a dla formuł z języka logiki pierwszego rzędu — wolne zmienne indywiduowe i litery predykatowe (oznaczane jako $Par(\alpha)$).

Pewnym uogólnieniem pojęcia parametrów dla danej formuły w logikach zdaniowych jest pojęcie atomów tej formuły. *Atomy* formuły a są to takie podformuły formuły α, których wartościowanie przesądza o wartości logicznej α. Dla klasycznej logiki zdaniowej są to po prostu zmienne zdaniowe, a np. dla zdaniowej logiki modalnej zmienne zdaniowe i formuły poprzedzone funktorem modalnym.

Niech J będzie językiem zdaniowym. Przez „$End(J)$" będziemy oznaczać zbiór wszystkich endomorfizmów danego języka J, a więc zbiór wszystkich podstawień formuł za zmienne zdaniowe.

Niech J będzie językiem pierwszego rzędu. Przez „$\Phi(J)$" będziemy oznaczać zbiór wszystkich funkcji ϕ: $AT_J \to FOR_J$, takich, że jeśli $\alpha \in AT_J$ i w α występują zmienne wolne $x_1, ..., x_n$, to dokładnie te same zmienne występują jako zmienne wolne w $\phi(\alpha)$ (por. [GRZEGORCZYK].

Przez „**L**" będziemy zwykle oznaczać logikę zdaniową, a przez „**LQ**" — logikę pierwszego rzędu.

DEFINICJA 1

Niech **L** = $\langle J_L, Cn_L\rangle$ będzie logiką zdaniową. **L** jest nietwórczym rozszerzeniem **SC** = $\langle J_{SC}, Cn_{SC}\rangle$ zawsze i tylko, gdy $J_{SC} \subseteq J_L$ i $\forall X \subseteq FOR_{SC}\ Cn_L(X) \cap J_{SC} = Cn_{SC}(X)$.

Niech **LQ** = $\langle J_{LQ}, Cn_{LQ}\rangle$ będzie logiką pierwszego rzędu. **LQ** jest nietwórczym rozszerzeniem **PC** = $\langle J_{PC}, Cn_{PC}\rangle$ zawsze i tylko, gdy $J_{PC} \subseteq J_{LQ}$ i $\forall X \subseteq FOR_{PC}\ (Cn_{LQ}(X) \cap J_{PC}) = Cn_{PC}(X)$.

W powyższym sensie zdaniowe logiki modalne czy zdaniowe logiki niefregowskie (logiki modalne pierwszego rzędu, niefregowskie logiki pierwszego rzędu) są nietwórczym rozszerzeniem **SC** (**PC**). Natomiast zdaniowa logika intuicjonistyczna (logika intuicjonistyczna pierwszego rzędu) nie jest rozszerzeniem **SC** (**PC**).

3. WŁASNOŚCI LOGIK INTERESUJĄCE Z FILOZOFICZNEGO PUNKTU WIDZENIA

Przy użyciu wprowadzonych pojęć i oznaczeń możemy precyzyjnie sformułować definicje interesujących nas własności logik.

WŁASNOŚĆ SKOŃCZONOŚCI

DEFINICJA 2

Logika zdaniowa (logika pierwszego rzędu) ma własność skończoności (**FIN**) zawsze i tylko, gdy

$\forall \alpha \in FOR\ \forall X \subseteq FOR$ jeśli $\alpha \in Cn(X)$, to $\exists Y \underset{sk}{\subseteq} X\ \ \alpha \in Cn(Y)$.

Dzięki tej własności zapewniamy naszej logice efektywność. Żądamy, aby rozumowania przeprowadzane za jej pomocą miały skończoną liczbę kroków, aby przy wnioskowaniu z danego zbioru przesłanek wystarczyło rozważyć tylko pewien jego skończony podzbiór.

WŁASNOŚĆ STRUKTURALNOŚCI

DEFINICJA 3

Logika zdaniowa ma własność strukturalności (*STRUC*) zawsze i tylko, gdy

$\forall \alpha \in FOR\ \forall X \subseteq FOR$ jeśli $\alpha \in Cn(X)$, to $\forall e \in End(J)\ e\alpha \in Cn(eX)$].

Logika pierwszego rzędu ma własność strukturalności (**STRUC**) zawsze i tylko, gdy

$\forall \alpha \in FOR\ \forall X \subseteq FOR$ jeśli $\alpha \in Cn(X)$, to $\forall \phi \in \Phi(J)\ \phi(\alpha) \in Cn(\phi(X))$.

Nakładając na logikę ten warunek chcemy, aby formalne własności wnioskowania w danej logice nie zależały od konkretnej postaci formuł, ale tylko od ich struktury logicznej. Jest to więc pewna eksplikacja pojęcia wnioskowania formalnego (w odróżnieniu od wnioskowania, w którym między wnioskiem a przesłanką istnieje związek treściowy).

Zauważmy, że o logice strukturalnej prawdziwe jest bardzo ważne twierdzenie — tzw. twierdzenie o nieistotnym występowaniu symboli pozalogicznych:

Jeśli tezą logiki jest pewna formuła α, to tezą tej logiki będzie też formuła β, powstała z α przez zastąpienie występujących w niej symboli pozalogicznych innymi symbolami pozalogicznymi.

WŁASNOŚĆ ZWARTOŚCI

DEFINICJA 4

Logika zdaniowa (logika pierwszego rzędu) ma własność zwartości (**COMP**) zawsze i tylko, gdy

$\forall X \subseteq FOR$ jeśli $Cn(X) = FOR$, to $\exists Y \underset{sk}{\subseteq} X\ \ Cn(Y) = FOR$.

Za pomocą tego warunku chcemy zapewnić sobie to, że jeśli wnioskując z jakiegoś zbioru przesłanek dojdziemy do sprzeczności, to ta sprzeczność wynika już z pewnego skończonego fragmentu zbioru przesłanek. Jest więc efektywnie «lokalizowalną» sprzecznością.

Powyższe ograniczenia są standardowe i wydaje się, że tkwią już w samej idei tego, co filozof chciałby nazywać „logiką". Dodatkowo proponujemy rozważyć pewne własności logik, które też wydają się interesujące i istotne z punku widzenia filozofa, a są może mniej znane.

WŁASNOŚĆ INTERPOLACJI

DEFINICJA 5

Logika zdaniowa ma własność interpolacji (**INT**) zawsze i tylko, gdy

$\forall\alpha,\beta \in FOR$ jeśli $(\alpha \Rightarrow \beta) \in Cn(\emptyset)$ i $(var(\alpha) \cap var(\beta)) \neq \emptyset$, to $\exists\gamma \in FOR$ $var(\gamma) \subseteq (var(\alpha) \cap var(b))$ i $(\alpha \Rightarrow \gamma) \in Cn(\emptyset)$ i $(\gamma \Rightarrow \beta) \in Cn(\emptyset)$.

Logika pierwszego rzędu ma własność interpolacji (**INT**) zawsze i tylko, gdy

$\forall\alpha,\beta \in FOR$ jeśli $(\alpha \Rightarrow \beta) \in Cn(\emptyset)$ i $(Par(\alpha) \cap Par(\beta)) \neq \emptyset$, to $\exists\gamma \in FOR$ $Par(\gamma) \subseteq (Par(\alpha) \cap Par(\beta))$ i $(\alpha \Rightarrow \gamma) \in Cn(\emptyset)$ i $(\gamma \Rightarrow \beta) \in Cn(\emptyset)]\}$.

Formułę γ o powyższych własnościach będziemy nazywać „interpolantem dla danych formuł α i β".

Nakładając ten warunek żądamy, aby w logice istotne dla poprawnego wyprowadzania jednej formuły z drugiej były — mówiąc swobodnie — tylko informacje wspólne dla obu tych formuł.

Własność interpolacji bywa też formułowana ogólniej — w jednej z dwu postaci:

(a) w postaci tzw. własności Maehary (MAEH) [WEAVER]:

$\forall X, Y \subseteq FOR$ $\forall\alpha \in FOR$ jeśli $(var(X \cup \alpha) \cap var(Y)) \neq \emptyset$ i $\alpha \in Cn(X \cup Y)$, to $\exists Z \subseteq FOR$ $[var(Z) \subseteq (var(X \cup \alpha) \cap var(Y))$ i $Z \subseteq Cn(Y)$ i $\alpha \in Cn(X \cup Z)]\}$,

co dla logiki o własności **FIN**, w języku której występuje klasyczny spójnik koniunkcji, dla przypadku, gdy $X = \emptyset$, redukuje się do własności interpolacji.

(b) w postaci następującej własności:

$\forall\alpha,\beta$ jeśli $\alpha \in X$ i $\beta \in Y$ i $\alpha \leq \beta$, to $\exists\gamma\ (\gamma \in Z$ i $\alpha \leq \gamma \leq \beta)$,

gdzie **B** jest dowolną algebrą Boole'a i $X, Y, Z \subseteq \mathbf{B}$.

Dla danych zbiorów X, Y, Z własność tę oznacza się zwykle jako „Int(X, Y, Z)". Polega ona na tym, że interpolacja zachodzi między pewnymi konkretnymi zbiorami X i Y «za pomocą» zbioru Z. (Jeśli **B** będzie algebrą Boole'a formuł pewnej logiki, i na zbiory X i Y nałożymy warunek, że są to dowolne teorie tej logiki sformułowane w językach o niepustym przecięciu, a Z jest w tym przecięciu zawarte, to otrzymamy pewną wersję własności Maehary.) W tym ujęciu tzw. twierdzenie Herbranda (Herbranda-Gentzena) ma postać twierdzenia, że Int(**U**, **E**, **O**), gdzie **U** jest klasą formuł ogólnych danego języka, **E** — klasą formuł egzystencjalnych, a **O** — klasą formuł otwartych. Zgodnie z tym twierdzeniem (mówiąc nieformalnie), dowody twierdzeń w klasycznym rachunku predykatów prowadzących od zdań ogólnych do szczegółowych można uzyskać «składając» dwa dowody, z których każdy w pewnej części daje się przedstawić jako dowód z klasycznego rachunku zdań. Twierdzenie to pokazuje związek między procedurami dowodowymi rachunku predykatów i rachunku zdań. Pewnym szczególnym przypadkiem własności interpolacji dla logiki pierwszego rzędu jest własność Lyndona--Oberschelpa-Fujiwary-Motohashi (**LOFM**) [MOTOHASHI]. Polega ona na istnieniu formuły interpolującej γ dla formuł α i β, takiej że jej budowa zależy od budowy formuł α i β. Żądając od logiki, aby miała własność **LOFM**, nakładamy na formułę, wyrażającą «wspólną informację» dla formuł α i β, dodatkowy warunek, aby miała ona określoną strukturę formalną.

Niech $Rel^+(\phi)$, $Rel^-(\phi)$, $Fun(\phi)$ będą odpowiednio zbiorami liter predykatowych występujących pozytywnie lub negatywnie w formule $\phi \in FOR_{NOR}$ i zbiorem symboli funkcyjnych występujących w tej formule.

DEFINICJA 6

Logika pierwszego rzędu ma własność **LOFM** zawsze i tylko, gdy

$\forall\alpha$, $\beta \in FOR_{NOR}$ jeśli $(\alpha \Rightarrow \beta) \in Cn(\emptyset)$ i $\neg\alpha \notin Cn(\emptyset)$ i $\beta \notin Cn(\emptyset)$, to $\exists\gamma \in FOR_{NOR}$

a) $(\alpha \Rightarrow \gamma) \in Cn_{LQ}(\emptyset)$ i $(\gamma \Rightarrow \beta) \in Cn(\emptyset)$,

b) $Rel^+(\gamma) \subseteq (Rel^+(\alpha) \cap Rel^+(\beta))$ i $Rel^-(\gamma) \subseteq (Rel^-(\alpha) \cap Rel^-(\beta))$ i

c) $Fun(\gamma) \subseteq (Fun(\alpha) \cap Fun(\beta))$.

Jeśli w języku tej logiki występuje predykat identyczności „=", to dodatkowo

d) jeśli w γ przynajmniej raz występuje pozytywnie (*resp.* negatywnie) predykat „=", to w α (*resp.* w β) występuje przynajmniej raz pozytywnie (*resp.* negatywnie) predykat „=".

W logice zdaniowej analogiczna własność ma dużo prostszą postać i jest nazywana „własnością Lyndona" (**LYN**) ([LYNDON], [HENKIN]).

Niech $var(\phi)^+$, $var(\phi)^-$ będą odpowiednio zmiennymi (czy ogólniej — atomami) występującymi pozytywnie lub negatywnie w formule ϕ.

DEFINICJA 7

Logika zdaniowa ma własność **LYN** zawsze i tylko, gdy

$\forall\alpha$, $\beta \in FOR_{NOR}$ jeśli $(\alpha \Rightarrow \beta) \in Cn(\emptyset)$ i $\neg\alpha \notin Cn(\emptyset)$ i $\beta \notin Cn(\emptyset)$, to $\exists\gamma \in FOR_{NOR}$ i

a) $(\alpha \Rightarrow \gamma) \in Cn(\emptyset)$ i $(\gamma \Rightarrow \beta) \in Cn(\emptyset)$,

b) $var^+(\gamma) \subseteq (var^+(\alpha) \cap var^+(\beta))$ i

c) $var^-(\gamma) \subseteq (var^-(\alpha) \cap var^-(\beta))$.

WŁASNOŚĆ ROBINSONA

DEFINICJA 8

Logika zdaniowa ma własność Robinsona (**ROB**) zawsze i tylko, gdy

$\forall X$, $Y \subseteq FOR$ jeśli $Cn(X) \neq FOR$ i $Cn(Y) \neq FOR$ i $Cn(X \cup Y) = FOR$ i $(var(X) \cap var(Y)) \neq \emptyset$, to $\exists\alpha \in FOR$ $var(\alpha) \subseteq (var(X) \cap var(Y))$ i $\alpha \in Cn(X)$ i $\neg\alpha \in Cn(Y)$.

Logika pierwszego rzędu ma własność Robinsona (**ROB**) zawsze i tylko, gdy

$\forall X$, $Y \subseteq FOR$ jeśli $Cn(X) \neq FOR$ i $Cn(Y) \neq FOR$ i $Cn(X \cup Y) = FOR$ i $(Par(X) \cap Par(Y)) \neq \emptyset$, to $\exists\alpha \in FOR$ $Par(\alpha) \subseteq (Par(X) \cap Par(Y))$ i $\alpha \in Cn(X)$ i $\neg\alpha \in Cn(Y)$.

Żądając, aby logika miała własność Robinsona, chcemy, by z tego, że suma dwóch zbiorów przesłanek niezależnie niesprzecznych jest sprzeczna, wynikało istnienie pewnej formuły (wyrażonej w języku wspólnym dla obu tych zbiorów zdań), która «pokazuje», na czym ta sprzeczność polega.

Czasami własność tę formułuje się ogólniej jako tzw. własność separowalności: Niech $X, Y, Z \subseteq \mathbf{B}$, gdzie $\mathbf{B}$ jest dowolną algebrą Boole'a. Wtedy

$\forall \alpha,\beta$ jeśli $\alpha \in X$ i $\beta \in Y$ i $\alpha \wedge \beta = 0$, to $\exists \gamma\, \gamma \in Z$ i $\alpha \leq \gamma$ i $\gamma \wedge \beta = 0$,

Dla danych zbiorów X, Y, Z własność tę oznacza się zwykle jako Sep(X, Y, Z). Jeśli teraz na $\mathbf{B}$, X, Y i Z nałożymy warunki analogiczne jak w wypadku uogólnionej własności interpolacji, to otrzymamy pewną wersję własności Robinsona (por. [BACSICH]).

WŁASNOŚĆ ZUPEŁNOŚCI W SENSIE HALLDENA

DEFINICJA 9

Logika zdaniowa jest Hallden-zupełna (**HZ**) zawsze i tylko, gdy

$\forall \alpha,\beta \in FOR$ jeśli $(\alpha \vee \beta) \in Cn(\emptyset)$ i $(var(\alpha) \cap var(\beta)) = \emptyset$, to $\alpha \in Cn(\emptyset)$ lub $\beta \in Cn(\emptyset)$.

Własność ta przysługuje logice, gdy alternatywa formuł, które nie są tezami logiki i «mówią o różnych fragmentach rzeczywistości» nie może być tezą logiki. Sam Hallden uważał posiadanie tej własności za kryterium «rozsądności» dla zdaniowych logik modalnych, a logiki, które jej nie mają, nazywał „semantycznie niezupełnymi" [HALLDEN]. O doniosłości tej własności świadczy w szczególności następujące twierdzenie:

TWIERDZENIE 1

Jeśli logika zdaniowa nie ma własności Hallden-zupełności, to nie ma adekwatnej matrycy (tzn. mówiąc nieformalnie nie istnieje «świat», w którym prawdziwe są wyłącznie twierdzenia tej logiki) [WROŃSKI], [SUSZKO], [LEMMON].

Lemmon [LEMMON] podał następujące kryterium Hallden-niezupełności danej logiki:

TWIERDZENIE 2

Logika **L** nie ma własności **HZ** zawsze i tylko, gdy istnieją dwie różne logiki $\mathbf{L}_1$ i $\mathbf{L}_2$, będące elementarnymi właściwymi rozszerzeniami logiki **L**, takie że $\mathbf{L} = \mathbf{L}_1 \cap \mathbf{L}_2$.

Twierdzenie to pokazuje, jak «rozpoznać» logikę, która nie ma własności **HZ** w kracie logik, będących elementarnym rozszerzeniem pewnego wyjściowego rachunku logicznego — logika taka jest węzłem tej kraty. Innymi słowy, zależności między stałymi logicznymi w logice nie mającej własności **HZ** nie są dostatecznie dobrze określone i można je dookreślić na dwa wykluczające się sposoby.

Własność Hallden-zupełności można uogólnić na logiki pierwszego rzędu. Pierwszą taką definicję podał Łoś ([ŁOŚ]), a w odniesieniu do logik zawierających dodatkowo zmienne zdaniowe — R. Suszko ([SUSZKO]).

Logika pierwszego rzędu **L** jest Hallden-zupełna zawsze i tylko, gdy

$\forall\alpha,\beta \in FOR$ jeśli $(\alpha \vee \beta) \in Cn(\emptyset)$ i $(v(\alpha) \cap v(b)) = \emptyset$, to $\alpha \in Cn(\emptyset)$ lub $\beta \in Cn(\emptyset)$,

gdzie $v(\phi)$ — to zbiór wolnych zmiennych indywiduowych (i zdaniowych — jeśli w logice takie występują) zawartych w ϕ.

Inną — jak się wydaje odpowiedniejszą ze względu na powiązanie własności Hallden-zupełności i interpolacji — definicję Hallden-zupełności dla logik pierwszego rzędu można sformułować w następujący sposób:

DEFINICJA 10

Logika pierwszego rzędu ma własność Hallden-zupełności (**HZ**) zawsze i tylko, gdy

$\forall\alpha,\beta \in FOR$ jeśli $(\alpha \vee \beta) \in Cn(\emptyset)$ i $(Par(\alpha) \cap Par(\beta)) = \emptyset$, to $\alpha \in Cn(\emptyset)$ lub $\beta \in Cn(\emptyset)$.

Właśnie tak zdefiniowaną własność będziemy nazywać „własnością Hallden-zupełności dla logik pierwszego rzędu".

WŁASNOŚĆ BETHA

Podstawowym pojęciem potrzebnym dla sformułowania własności Betha, jest pojęcie *definiowalności* danego terminu w danej logice. Bywa ono rozumiane na dwa podstawowe sposoby. (Zauważmy, że zawsze definiowalność jest zrelatywizowana do teorii, na gruncie której dany termin się definiuje i do terminów, które występują w definiensie.)

DEFINICJA 11

Termin P jest definiowalny *explicite* na gruncie teorii T za pomocą terminów $Q_1,\ldots, Q_k$ zawsze i tylko, gdy twierdzeniem teorii T jest formuła

$\forall x_1,\ldots,x_n\, [P(x_1,\ldots,x_n) \Leftrightarrow \phi(x_1,\ldots,x_n)]$,

gdzie ϕ jest zbudowane wyłącznie z terminów $Q_1, \ldots, Q_k$.

Termin P jest definiowalny *implicite* na gruncie teorii T za pomocą terminów $Q_1, \ldots, Q_k$ zawsze i tylko, gdy dla dowolnych dwóch modeli $\mathfrak{M}_1 = \langle U, p_1, q_1,\ldots,q_k\rangle$, $\mathfrak{M}_2 = \langle U, p_2, q_1,\ldots,q_k\rangle$,

jeśli $\mathfrak{M}_1 \models T$ i $\mathfrak{M}_2 \models T$, to $p_1 = p_2$,

gdzie p_1, p_2 są interpretacjami predykatu P, a $q_1, \ldots, q_k$ — predykatów $Q_1, \ldots, Q_k$ w modelach $\mathfrak{M}_1$ i $\mathfrak{M}_2$. [Inne sformułowaniu, które jest równoważne powyższemu dla logik, w których prawdziwe jest twierdzenie o pełności, brzmi:

Termin P jest definiowalny *implicite* na gruncie teorii T za pomocą terminów $Q_1, \ldots, Q_k$ zawsze i tylko, gdy

$\forall x_1,\ldots,x_n\, [P(x_1,\ldots,x_n) \Leftrightarrow P'(x_1,\ldots,x_n\,] \in T \cup T'$,

gdzie teoria T' powstaje z teorii T przez zastąpienie terminu P terminem P'.]

DEFINICJA 12

Logika pierwszego rzędu **LQ** ma własność Betha (**BET**) zawsze i tylko, gdy dla dowolnej teorii T logiki **L** i dla dowolnego terminu $P_{\notin}$ języka tej logiki, termin P jest definiowalny *explicite* na gruncie teorii T za pomocą terminów $Q_1, \ldots, Q_k$ zawsze i tylko, gdy termin P jest definiowalny *implicite* na gruncie teorii T za pomocą terminów $Q_1, ..., Q_k$.

Logika mająca własność Betha — to logika dostatecznie «mocna», aby opisać wszystkie zależności między terminami, które występują w sformułowanych w niej teoriach. Innymi słowy, jeśli interpretacja jakiegoś terminu jest wyznaczona jednoznacznie w każdym rozszerzeniu modelu dla danej teorii, to znajduje to odbicie w twierdzeniach tej teorii.

Zauważmy, że w stosunku do logik nieklasycznych — np. logik modalnych — można formułować różne inne (mocniejsze) wersje definiowalności *explicite* i *implicite*:

Termin P jest definiowalny *explicite* na gruncie teorii T za pomocą terminów $Q_1, ..., Q_k$ w logice modalnej zawsze i tylko, gdy twierdzeniem teorii T jest formuła

$$\forall x_1,...,x_n \Box [P(x_1,...,x_n) \Leftrightarrow \phi(x_1,...,x_n)],$$

gdzie ϕ jest zbudowane wyłącznie z terminów $Q_1, ..., Q_k$.

Termin P jest definiowalny *implicite* na gruncie teorii T za pomocą terminów $Q_1, ..., Q_k$ w logice modalnej zawsze i tylko, gdy

$$\forall x_1,..,x_n \Box [P(x_1,..,x_n) \Leftrightarrow P'(x_1,..,x_n)] \in T \cup T',$$

gdzie teoria T' powstaje z teorii T przez zastąpienie terminu P terminem P'.

Powstaje pytanie, czy własność analogiczną do własności Betha można określić dla logik zdaniowych. Nie występują w nich przecież symbole pozalogiczne w tym sensie, w jakim symbolami pozalogicznymi są predykaty (symbole funkcyjne itp.) w rachunku pierwszego rzędu. Próbę określenia takiej własności można znaleźć np. w [KRIVINE, KREISLER]. Polega ona na sformułowaniu następujących definicji pojęć definiowalności *explicite* i *implicite*:

Formuła p jest definiowalna *explicite* na gruncie teorii T, w danej logice **L**, za pomocą formuł $q_1, ..., q_n$ zawsze i tylko, gdy istnieje $\gamma \in FOR$, takie że

$$(p \Leftrightarrow \gamma) \in T$$

i $var(\gamma) \subseteq \{q_1, ..., q_n\}$.

Formuła p jest definiowalna *implicite* na gruncie teorii T, w danej logice **L**, za pomocą formuł $q_1, ..., q_n$ zawsze i tylko, gdy

$$(p \Leftrightarrow p') \in T \cup T',$$

gdzie T' jest teorią, która powstała z T przez zastąpienie wszędzie formuły p dowolną formułą p'.

Dla logik nieklasycznych definicje te można wzmacniać analogicznie jak w wypadku logik pierwszego rzędu.

Przedstawiony wyżej problem zależności między różnymi sensami pojęcia definiowalności (dla logiki klasycznej) sformułował jako pierwszy Padoa. Pokazał on, że dobrym kryterium tego, że termin P nie jest *explicite* definiowalny w danej teorii T, jest wskazanie dwóch modeli dla T, w których interpretacja terminu P jest inna. Rozwinął tę myśl Tarski [TARSKI].

4. ZALEŻNOŚCI MIĘDZY PRZEDSTAWIONYMI WŁASNOŚCIAMI

Logika zdaniowa — np. klasyczny rachunek zdań — jest bardzo prostym opisem wnioskowań, jakie przeprowadzamy w danym języku. Pozwala ona wskazywać zależności, zachodzące między wartościami logicznymi zdań złożonych i tworzących je zdań prostych. Pokazuje, jaka jest «zewnętrzna» formalna struktura wnioskowania. Pewnego rodzaju uszczegółowieniem klasycznej logiki zdaniowej jest (nadbudowana nad nią) klasyczna logika pierwszego rzędu. W logice pierwszego rzędu nie tylko mamy możliwość badania zależności między zdaniami prostymi, ale również rozważamy wewnętrzną strukturę takich zdań. Umiemy powiedzieć, że są to zdania szczegółowe, ogólne, z jakich składają się predykatów itd. Nadal zachowujemy jednak tę samą strukturę wnioskowań, co w leżącej u jej podstaw logice zdaniowej. Innymi słowy każde zdanie o schemacie tautologii logiki zdaniowej jest tautologią logiki pierwszego rzędu i w obu logikach występują te same spójniki. Intuicje te precyzuje następująca definicja.

DEFINICJA 13

Logika pierwszego rzędu **LQ** jest nadbudowana nad logiką zdaniową **L** zawsze i tylko, gdy jest to najsłabsza logika, taka że

1) zbiory spójników występujących w J_{L} i J_{LQ} są takie same;

2) $\forall\alpha \in FOR_{\mathrm{L}}$ jeśli $\alpha \in Cn\mathrm{L}(\emptyset)$, to $f(\alpha) \in Cn_{\mathrm{LQ}}(\emptyset)$, gdzie $f\colon AT_{\mathrm{L}} \rightarrow FOR_{\mathrm{LQ}}$.

UWAGA

Jeśli **L** i **LQ** są nietwórczymi rozszerzeniami odpowiednio **SC** i **PC**, to do **LQ** należą tezy co najwyżej trojakiego rodzaju:

1) tezy **PC**;

2) podstawienia (w sensie funkcji f) tez **L**;

3) tezy powstające z zastosowania specyficznych aksjomatów, określających zależność między spójnikami w J_{LQ} nie występującymi w J_{PC} i kwantyfikatorami.

PRZYKŁAD

Przykładem tez trzeciego rodzaju dla modalnej logiki pierwszego rzędu może być np. formuła: $\Box \forall x\, \phi(x) \Rightarrow \forall x \Box\, \phi(x)$.

Dla dalszych rozważań ważne jest następujące twierdzenie, łączące interesujące nas własności w logikach zdaniowych i w nadbudowanych nad nimi logikach pierwszego rzędu.

TWIERDZENIE 3

Jeśli logika **L** nie ma własności **HZ**, to nadbudowana nad nią logika **LQ** też nie ma własności **HZ**.

DOWÓD

Załóżmy, że **L** nie ma własności **HZ**. Istnieją więc formuły α, β, takie, że $(\alpha \vee \beta) \in Cn_{\mathrm{L}}(\emptyset)$, $(var(\alpha) \cap var(\beta)) = \emptyset$ i $\alpha \notin Cn_{\mathrm{L}}(\emptyset)$, $\beta \notin Cn_{\mathrm{L}}(\emptyset)$. Niech $var(\alpha) = \{p_1, ..., p_n\}$, $var(\beta) = \{q_1, ..., q_k\}$. Ponieważ $\alpha \notin Cn_{\mathrm{L}}(\emptyset)$, więc dla pewnego podstawienia formuł atomowych języka logiki **LQ** za zmienne $p_1, ..., p_n$ formuła $\alpha(p_1/P_1(x_1), ..., p_n/P_n(x_n)) \notin$

$Cn_{LQ}(\emptyset)$ i analogicznie dla pewnego podstawienia formuł atomowych za zmienne q_1, ..., q_k, formuła $\beta(q_1/Q_1(y_1), ..., q_k/Q_k(y_k)) \notin Cn_{LQ}(\emptyset)$. Ponieważ jednak **LQ** jest nadbudowana nad **L**, więc każda formuła o schemacie $(\alpha \vee \beta)$ jest tezą **LQ**. Stąd $[\alpha(p_1/P_1(x_1), ..., p_n/P_n(x_n)) \vee \beta(q_1/Q_1(y_1), ..., q_k/D_k(y_k))] \in Cn_{LQ}(\emptyset)$, czyli **LQ** nie jest ma własności **HZ** — wbrew założeniu.

Bez dowodów podajemy następujące znane twierdzenia.

TWIERDZENIE 4

Jeśli w logice (zdaniowej i pierwszego rzędu) jest klasyczna negacja i logika ma własność **COMP**, to ma własność **FIN**.

TWIERDZENIE 5

Jeśli logika (zdaniowa i pierwszego rzędu) ma własność **INT** i **COMP**, to ma własność **BET**.

TWIERDZENIE 6

Jeśli logika zdaniowa ma własność **HZ**, to ma własność **STRUC**.

5. PRZEGLĄD RÓŻNYCH SYSTEMÓW LOGICZNYCH

Nasze rozważania na temat istotnych z filozoficznego punktu widzenia własności logik zakończymy przeglądem różnych systemów logicznych i wskazaniem, które z nich własności te posiadają. Może to być o tyle ciekawe dla filozofa, że dysponując tą informacją i wybierając jakąś logikę na formalną strukturę prowadzonych przez siebie dociekań, będzie miał większą świadomość wypływających z tego wyboru ograniczeń.

LOGIKA KLASYCZNA

W zdaniowej logice klasycznej własności **INT** i **ROB** są równoważne i wynika z nich własność **BET**. Oczywiście logika ta ma własność **FIN**, **STRUC**, **COMP**, **INT**, **ROB**, **BET** i **HZ**, a także własność **LYN**.

Elementarna logika pierwszego rzędu ma własności **FIN**, **STRUC**, **COMP**, **INT**, **ROB** i **BET**.

Własności **INT** i **ROB** są w niej równoważne i wynika z nich **BET**. Logika ta ma własność **MAEH** i **LOFM**. Ma też własność **HZ** z tym zastrzeżeniem, że albo w jej języku nie występuje predykat identyczności, albo nie jest on traktowany jako symbol pozalogiczny.

Słaba logika drugiego rzędu ma własności **FIN** i **STRUC**, ale nie ma własności **COMP**, **INT** i **BET**; pełna logika drugiego rzędu ma własności **FIN**, **STRUC** i **INT**, ale nie ma własności **COMP** i **BET** (por. [MOSTOWSKI]).

Z powyższych ustaleń wynika więc, że logika klasyczna (zdaniowa i pierwszego rzędu) jest wzorcowym przykładem logiki, którą może zaakceptować filozof.

LOGIKA INTUICJONISTYCZNA I LOGIKI POŚREDNIE

Logiki pośrednie (zdaniowe i pierwszego rzędu) są to logiki zawierające wszystkie tezy logiki intuicjonistycznej (odpowiednio zdaniowej i pierwszego rzędu), sformułowane w języku J_{SC} (J_{PC}). Są one aksjomatycznymi wzmocnieniami logiki intuicjonistycznej, co można interpretować w ten sposób, że nakładają coraz silniejsze (coraz bardziej zbliżone do klasycznych) warunki na intuicjonistyczny spójnik negacji i alternatywy. Skrajnym przypadkiem logiki pośredniej jest więc logika klasyczna.

Zdaniowe logiki pośrednie i logiki pośrednie pierwszego rzędu mają własności **FIN**, **STRUC** i **COMP**.

Udowodniono [MAKSIMOVA], że istnieje dokładnie 7 zdaniowych logik pośrednich z własnością **INT**:

$\mathbf{L}_1$ = logika intuicjonistyczna.

$\mathbf{L}_2 = \mathbf{L}_1 + (\neg\alpha \vee \neg\neg\alpha)$;

$\mathbf{L}_3 = \mathbf{L}_1 + (\alpha \vee (\alpha \Rightarrow (\beta \vee \neg\beta)))$;

$\mathbf{L}_4 = \mathbf{L}_3 + ((\alpha \Rightarrow \beta) \vee (\beta \Rightarrow \alpha)) \vee ((\alpha \Rightarrow \neg\beta) \vee (\neg\beta \Rightarrow \alpha))$;

$\mathbf{L}_5 = \mathbf{L}_3 + \mathbf{L}_2$

$\mathbf{L}_6 = \mathbf{L}_1 + (\alpha \Rightarrow \beta) \vee (\beta \Rightarrow \alpha)$;

$\mathbf{L}_7 = \mathbf{L}_1 + (\alpha \vee \neg\alpha)$ (logika klasyczna).

Dla pośrednich logik zdaniowych udowodniono następujące twierdzenia:

1) własność **INT** jest równoważna własności **ROB**;

2) jeśli logika ma własność **INT**, to ma własność **HZ**;

3) implikacyjny fragment intuicjonistycznej logiki zdaniowej ma własność **INT**, ale istnieje nieprzeliczalnie wiele fragmentów logiki intuicjonistycznej, które nie mają własności **INT**.

Jeśli pośrednia logika pierwszego rzędu ma własność **INT**, to ma też własność **BET**.

Gabbay ([GABBAY]) pokazał, że dla pośrednich logik pierwszego rzędu z własności **ROB** wynika własność **INT**, ale nie odwrotnie. W szczególności intuicjonistyczna logika pierwszego rzędu nie ma własności **ROB**.

LOGIKI MODALNE

Zdaniowe logiki modalne i logiki modalne pierwszego rzędu mają własności **FIN**, **STRUC**, **COMP**.

Istnieje nie więcej niż 38 normalnych zdaniowych logik modalnych nadbudowanych nad logiką **S4** o własności **INT**.

Dla normalnych zdaniowych logik modalnych i nadbudowanych nad nimi logik modalnych pierwszego rzędu udowodniono następujące twierdzenia:

1) logika ma własność **INT** zawsze i tylko, gdy ma własność **ROB**;

2) jeśli logika ma własność **INT**, to ma własność **HZ**;

3) jeślli logika ma własność **INT**, to ma własność **BET**.

Zauważmy, że dla logik modalnych ważne jest następujące twierdzenie:

TWIERDZENIE 7

Jeśli zdaniowa logika modalna **L** nie ma własności **HZ**, to nadbudowana nad nią logika modalna pierwszego rzędu **LQ** nie ma własności **INT**.

SZKIC DOWODU

Pokazaliśmy wyżej, że jeśli logika zdaniowa **L** nie ma własności **HZ**, to nadbudowana nad nią logika pierwszego rzędu **LQ** też nie ma własności **HZ** (twierdzenie 3). Stąd **LQ** nie ma własności **INT**.

W literaturze logicznej można znaleźć uzasadnienia następujących faktów, dotyczących powyższych własności w różnych logikach modalnych.

FAKT 1

Nie mają własności **HZ** zdaniowe logiki modalne **S1**, **S2** i **S3** ([HALLDEN]).

FAKT 2

Mają własności **HZ** zdaniowe logiki modalne **T**, **S4**, **S5** i wszystkie rozszerzenia logiki **S5** ([MCKINSEY]).

FAKT 3

Nie mają własności **HZ** zdaniowe logiki modalne **K**, **E2**, **E3**, **E4**, **E5**, **D2**, **D3**, **D4**, **D5** ([van BENTHEM, HUMBERSTONE] [LEMMON]).

FAKT 4

Mają własności **ROB** modalne logiki pierwszego rzędu: **KQ**, **D2Q**, **E2Q**, **E3Q**, **S2Q**, **S3Q** ([GABBAY]).

FAKT 5

Nie ma własności **BET** modalna logika pierwszego rzędu **S5Q** ([FINE]).

SZKIC DOWODU FAKTU 5

Kit Fine udowodnił, że logika **S5Q** nie ma własności Betha. W teorii $T = Cn_{S5Q}(\Box\forall y\{\Box\forall x\,[\Box(P(x) \Rightarrow Q(y))]\}, \Box\forall y\{\neg\Box\neg\exists x\,[Q(y) \Rightarrow P(x)]\})$ termin Q jest definiowalny *implicite*, ale nie jest definiowalny *explicite*. A więc logika **S5Q** nie ma własności **INT**.

Z powyższych faktów wypływają następujące wnioski.

WNIOSEK 1

Z tego, że zdaniowa logika modalna **L** ma własność interpolacji, nie wynika, że nadbudowana nad nią logika modalna pierwszego rzędu **LQ** ma własność interpolacji (fakty 2 i 5, twierdzenie 3).

Wniosek ten jest dość intuicyjny. W logice pierwszego rzędu **LQ** nadbudowanej nad **L** mogą pojawić się takie formuły kwantyfikatorowe, które «psują» własność interpolacji.

WNIOSEK 2

Z tego, że logika **L** nie ma własności Hallden-zupełności (a więc nie ma własności interpolacji) nie wynika, że logika **LQ** nie ma własności interpolacji (fakty 1, 3 i 4).

Wniosek ten wydaje się sprzeczny z intuicją — jeśli już na poziomie logiki zdaniowej **L** są takie formuły, dla których nie istnieje formuła interpolująca, to podobnie powinno być w nadbudowanej nad **L** logice pierwszego rzędu **LQ**. Co więcej zauważmy, że wniosek ten jest sprzeczny z twierdzeniem 5. Stąd prawdopodobnie niektóre tezy przedstawione w artykule Gabbaya ([GABBAY]) są błędne.

LOGIKI Z SILNĄ NEGACJĄ

Logiki z silną negacją powstają z logiki intuicjonistycznej jako jej aksjomatyczne wzmocnienie przez dodanie aksjomatów charakteryzujących jednoargumentowy spójnik silnej negacji. Takich logik jest nieprzeliczalnie wiele, ale tylko 14 z nich ma własność **INT**.

LOGIKI WIELOWARTOŚCIOWE

Rasiowa ([RASIOWA]) udowodniła, że wszystkie zdaniowe logiki wielowartościowe mają własność **INT**, a stąd i **BET**.

Nie mają własności **INT** implikacyjne fragmenty wszystkich wielowartościowych logik Łukasiewicza.

LOGIKI NIEFREGOWSKIE

Logika niefregowska powstaje z rozszerzenia języka logiki klasycznej o nieprawdziwościowy spójnik identyczności (≡). Pozwala to już w samej logice (a nie tylko w jej metajęzyku) mówić o tym, że pewne dwa zdania, które są równoważne (mają tę samą wartość logiczną), nie odnoszą się do tej samej sytuacji (mają różne denotacje). Innymi słowy w logice takiej można odrzucić aksjomat Fregego, zgodnie z którym, wszystkie zdania prawdziwe denotują ten sam byt — Prawdę, a wszystkie zdania fałszywe — Fałsz. Za jej pomocą można w szczególności formalizować niektóre tezy *Traktatu logiczno-filozoficznego* Wittgensteina. W zależności od tego jakie dokładnie warunki nałożymy na spójnik Ü, powstają różne logiki niefregowskie ([SUSZKO], [OMYŁA]).

Zdaniowe logiki niefregowskie i logiki niefregowskie pierwszego rzędu mają własności **STRUC**, **FIN** i **COMP**. Są dla nich prawdziwe następujące twierdzenia ([WÓJTOWICZ]):

1) logika ma własność **INT** zawsze i tylko, gdy ma własność **ROB**;

2) jeśli logika ma własność **INT**, to ma własność **HZ**;

3) jeślli logika ma własność **INT**, to ma własność **BET**.

Na temat podstawowych zdaniowych logik niefregowskich wiadomo, że:

1) logiki **SCI**, **WT** i **WH** mają matryce adekwatne, a więc — z TWIERDZENIA 2 — mają własność **HZ**; mają też własność **INT** i własność **BET** (por. [SUSZKO], [LEMMON], [MALINOWSKI, MICHALCZYK]);

2) logiki **WB**, $\mathbf{WB_0}$ i **S3** nie mają własności **HZ**.

Na temat podstawowych logik niefregowskich pierwszego rzędu wiadomo, że

1) nie mają własności **HZ**, a stąd i własności **INT** logiki $\mathbf{PWB_0}$, **PWB**, **PWB1**, **PS3**;

2) logika **PWT** ma własność **INT**, a stąd ma też własność **HZ** i ma własność **BET**;

3) logika **PWH** nie ma własności **INT**.

BIBLOGRAFIA

P.D. Bacsich, „Amalgamation properties and interpolation theorems for equational theories", *Algebra Universalis*, 5 (1975), s.45-55.

K. Fine, „Failures of the interpolation lemma in quantified modal logic", *The Journal of Symbolic Logic*, 2/44 (1979), s. 201-206.

D.M. Gabbay, „Craig's interpolation theorem for modal logic", *Lecture Notes in Mathematics*, 255, Springer-Verlang, s. 111-127.

A. Grzegorczyk, *Zarys logiki matematycznej*, PWN, Warszawa 1969.

S. Hallden, „On the semantic non-completeness of certain Lewis calculi", *The Journal of Symbolic Logic*, 2/16 (1951), s. 127-129.

G. Kreisel, J.-L. Krivine, *Elements of nathematical logic*, North-Holland, Amsterdam, 1971.

E.J. Lemmon, „A note on Hallden-incompleteness", *Notre Dame Journal of Formal Logic*, 7 (1966), s. 296-300.

J. Łoś, „The algebraic treatment of the methodology of elementary deductive systems", *Studia Logica*, 2 (1955), s. 151-212.

J.C.C. McKinsey, „System of modal logic which are not unreasonable in the sense of Hallden", *Journal of Symbolic Logic*, 18 (1953), s. 109-113.

G. Malinowski, M. Michalczyk, „That SCI has the interpolation property", *Studia Logica* 41 (1982), s. 375-380.

A. Mostowski, „Craig's interpolation theorem in some extended systems of logic", [w:] *Logic, Methodology and Philosophy of Science (Proc.Third Internat.Congr., Amsterdam 1967)*, North-Holland, Amsterdam, 1968, s.87-103.

N. Motohashi, „Equality and Lyndon's interpolation theorem", *The Journal of Symbolic Logic*, 1/49 (1984), s. 123-128.

M. Omyła, *Zarys logiki niefregowskiej*, PWN, Warszawa 1986.

H.Rasiowa, „The Craig's interpolation lemma for m-valued calculi", *Bulletin de l'Academie Polonaise des Sciences. Serie des Sciences Mathematiques, Astronomiques et Physiques* 20 (1972), s.341-346.

R. Suszko, „Quasi-completeness in non-Fregean Logic", *Studia Logica*, 29 (1971), s. 7-14.

A. Tarski, *Logic, semantics, metamathematics: Papers from 1923 to 1938*, Clarendon, Oxford, 1956.

L.H. Tharp, „Which logics is the right logic", *Synthese* 31 (1975), s. 1-21.

W.V. Quine, *Filozofia logiki*, PWN, Warszawa 1977.

G. Weaver, „Syntactic features and synonymy relations: a unified treatment of some proofs of the compactness and interpolation theorems", *Studia Logica* 2/53 (1994), s. 325-342.

A. Wroński, „Remarks on Hallden-completeness of modal and intermediate logics", *Bulletin of the Section of Logic*, 5 (1976), s. 126-129.

A. Wójtowicz, „Interpolation and Hallden-completeness properties in class of non-Fregean logics", J. J. Jadacki & J. Paśniczek (red.), *The Lvov-Warsaw School. New Generation*, Rodopi, Amsterdam [w przygotowaniu].