Tomasz Placek

Paradoksy ruchu Zenona z Elei a labirynt kontinuum: "Achilles i żółw", "Strzała", "Stadion"

Filozofia Nauki 5/1, 65-77

1997

Filozofia Nauki
Rok V, 1997, Nr 1(17)

Tomasz Placek

Paradoksy ruchu Zenona z Elei a labirynt kontinuum: „Achilles i żółw", „Strzała", „Stadion"[1]

Pamięci Mirosława Dzielskiego

I. WSTĘP

W pracy rekonstruuję trzy paradoksy ruchu Zenona z Elei. Są to: „Achilles i żółw", „Strzała" i „Stadion". Razem z „Dychotomią", którą analizowałem gdzie indziej[2], stawiają one pytania dotyczące struktur ciągłych (kontinuów). W „Dychotomii" Zenon poszukuje — jak się wydaje — «elementu pierwszego» kontinuum. Sądzę, że rozwiązania tego problemu należy szukać rozważając współczesne teorie kontinuum liczb rzeczywistych — klasyczną i intuicjonistyczną. Takie postawienie sprawy nie wyczerpuje jednak zagadnień Zenona. Dotyczą one bowiem również struktury czasu, przestrzeni oraz problemu zmiany. Te właśnie problemy, a więc zastosowania kontinuum liczbowego do obiektów fizycznych, pojawiają się w trzech paradoksach analizowanych poniżej. Jeśli chodzi o stronę matematyczną, to rachunkowe rozwiązanie stawianych problemów jest łatwe, niezależnie od tego czy stosujemy klasyczną, czy intuicjonistyczną koncepcję kontinuum. Trudno jednak znaleźć kryteria pozwalające

[1] Poniższy tekst jest drugą częścią pracy „Zenona paradoksy ruchu a labirynt kontinuum — Dychotomia", która ukazała się w *Studiach Filozoficznych* 4 (281) 1989, s. 57-73. Oba stanowiące całość teksty redakcja *Studiów* podzieliła i przyjęła do druku w 1988 roku. Z powodu rozwiązania pisma druga część — czyli obecny tekst — nigdy się jednak nie ukazała, a jej maszynopis zaginął. Odnalazł go w 1996 r. profesor Jacek J. Jadacki, za co jestem Mu bardzo wdzięczny. Chociaż od czasu napisania „Paradoksów" (1987 r.) upłynęło prawie 10 lat, po naniesieniu niezbędnych poprawek wciąż wydaje mi się warty przedstawienia. Fragmenty pracy zostały wykorzystane w programie badawczym RPPR II.29.

[2] Patrz: T. Placek, „Zenona paradoksy ruchu a labirynt kontinuum — Dychotomia", *Studia Filozoficzne* 4 (281) 1989, s. 57-73.

ocenić, która z tych teorii właściwie opisuje kontinuum. Co więcej, samo to pytanie zakłada, że albo jest taki obiekt, jak kontinuum, który możemy lepiej lub gorzej opisać, albo przynajmniej mamy jasne i wyraźne intuicje tego, czym jest ciągłość. Założenie to jest jednak bardzo dyskusyjne. W pracy przyjmuję następującą roboczą hipotezę: o ile „Dychotomia" jest przede wszystkim związana z matematyczną teorią kontinuum, o tyle pozostałe trzy paradoksy można traktować jako dotyczące zastosowań tej teorii do opisu ruchu.

II. ACHILLES I ŻÓŁW

Drugi argument, tak zwany „Achilles", sprowadza się do tego, że w wyścigu najszybszy biegacz nie może nigdy prześcignąć najpowolniejszego, bo ścigający musi najpierw osiągnąć punkt, z którego ścigany już wyruszył, tak że powolniejszy ma zawsze pewne wyprzedzenie.[3]

Od czasów Arystotelesa uważano paradoks ten za bardziej skomplikowaną wersję „Dychotomii". Jest to słuszne o tyle, że oba zakładają ciągłą strukturę przestrzeni (dokładniej: jej *gęstość*) i opierają się na podobnej metodzie dzielenia odcinka drogi *ad infinitum*.[4] Łatwo jednak zauważyć, że o ile w pierwszym rozumowaniu dzieliliśmy odcinek ku początkowi, poszukując jego «elementu pierwszego», o tyle w „Achillesie i żółwiu" pytamy o możliwość zsumowania nieskończenie wielu coraz mniejszych odcinków. Odtwórzmy więc rozumowanie Zenona przy pomocy prostej arytmetyki. Oznaczmy początkowy dystans dzielący Achillesa i żółwia przez X. Niech Achilles i żółw poruszają się ruchem jednostajnym z prędkościami odpowiednio V i v. Kiedy Achilles znajduje się w miejscu „0", żółw jest już w miejscu X. Kiedy Achilles mija punkt X, żółw jest już w miejscu $X + (v/V)\,X$. Ogólnie, ilekroć Achilles pokonał dystans

$$X + (v/V)X + \ldots + (v/V)^n X,$$

tylekroć żółw go wyprzedza o odległość $(v/V)^{n+1}X$. Oczywiście Achilles biegnie szybciej niż żółw, a więc $V > v$. To zapewnia, że szereg

$$X + X\,(v/V) + \ldots + X\,(v/V)^n + \ldots$$

jest zbieżny. Jego granica wynosi $XV/(V+v)$. W takiej odległości od miejsca „0" Achilles dogoni żółwia. Problem Zenona jest jednak nieco inny. Zenon pyta raczej, czy stanie się to w skończonym czasie. Aby na to odpowiedzieć, wystarczy podzielić wyliczoną odległość przez prędkość Achillesa. Otrzymamy, że wyścig zakończy się po czasie $X/(V+v)$. Jeśliby Zenon był wciąż nieprzekonany, można powtórzyć rozumowanie, badając, jakie czasy potrzebne są Achillesowi na przebycie kolejnych odcinków drogi. Przedstawiają się one następująco:

$$X/V,\ X/V\cdot v/V,\ X/V\cdot(v/V)^2,\ \ldots,\ X/V\cdot(v/V)^n,\ \ldots$$

[3] Arystoteles, *Fizyka*, 239 b 14, tł. K. Leśniak, PWN, Warszawa 1968.

[4] Uporządkowany zbiór jest *gęsty*, jeśli dla dowolnych jego elementów x, y takich, że $x < y$, istnieje element z spełniający nierówność $x < z < y$.

Sumując powyższe czasy otrzymujemy wynik $X/(V+v)$. Tak więc trudności rachunkowe paradoksu są rozwiązywane przy pomocy teorii szeregów.

Zupełnie inaczej przedstawia się sprawa, gdy powyższy paradoks zinterpretować jako dotyczący zastosowania klasycznej teorii liczb rzeczywistych do opisu czasu, przestrzeni i ruchu. Tak zresztą rozumieli go niektórzy matematycy, krytyczni wobec teorii klasycznej. Stajemy wtedy wobec następujących pytań: Czy czas (odcinek przestrzenny) jest uporządkowanym nieprzeliczalnym zbiorem momentów (punktów przestrzennych)? Jak odbywa się ruch w takim czasie i przestrzeni? Rozważmy następującą uwagę H. Weyla, która rozpoczęła współczesną dyskusję nad paradoksem:

> Jeśli jednak odcinek o długości 1 rzeczywiście składa się z nieskończenie wielu mniejszych, będących oddzielnymi całościami (*chopped off wholes*) pododcinków o długościach 1/2, 1/4, 1/8, ..., wówczas to, że Achilles mógłby je wszystkie przebiec, jest niezgodne z naturą nieskończoności jako czegoś, co nie da się ukończyć. Jeśli przyjąć taką możliwość, to nie ma powodu, aby jakaś maszyna nie była w stanie ukończyć procesu podjęcia nieskończenie wielu różnych aktów decyzji w skończonym czasie, dając na przykład pierwszy wynik po 1/2 minuty, drugi po następnej 1/4 minuty, trzeci po kolejnej 1/8 minuty itd. W ten sposób byłoby możliwe, o ile zdolności mózgu byłyby podobne do działania takiej maszyny, przeglądnąć wszystkie liczby naturalne, uzyskując pewną decyzję typu „albo tak, albo nie" w sprawie dowolnego pytania o istnienie (*existential question*), dotyczącego liczb naturalnych![5]

W powyższym fragmencie można wyodrębnić dwa argumenty.

1) Załóżmy, że odcinek przestrzeni jest sumą nieskończenie wielu niezachodzących na siebie pododcinków. Jeśli każdy z tych pododcinków jest oddzielną («odrąbaną», jak chce Weyl) całością, to dowolny ruch będzie polegał na wykonaniu nieskończonej liczby operacji w skończonym czasie. Maszynę, która potrafi coś takiego wykonać, nazywa się w literaturze *maszyną nieskończonościową*. Każdy proces ruchu prowadził będzie do wykonania nieskończonej ilości operacji. Ukończenie wykonywania procesu składającego się z nieskończenie wielu oddzielnych operacji jest nie do pogodzenia z charakterem nieskończoności *potencjalnej*. Proces jest bowiem nieskończony potencjalnie, jeśli po dowolnym jego stadium zachodzi następne.

2) Jeśli ruch jest maszyną nieskończonościową, to należy oczekiwać, że w świecie fizycznym mogą istnieć lub istnieją inne maszyny nieskończonościowe. Tych jednak nie ma.

Kluczowym pojęciem w pierwszym argumencie jest oczywiście *nieskończoność*. W ujęciu Weyla zawęża się ono do nieskończoności potencjalnej. Nieskończoność potencjalna nie jest obiektem matematycznym, takim jak liczby. Odniesienie do takiej nieskończoności może być wyeliminowane z dyskursu matematycznego. Na przykład, korzystając z definicji granicy możemy pozbyć się odniesienia do nieskończoności z wyrażenia

a) $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \infty$,

[5] H. Weyl, *Philosophy of Mathematics and Natural Science*, Atheneum, New York 1963, s. 42, tłumaczenie własne. Przez pytanie o istnienie należy tu rozumieć pytanie o istnienie obiektów spełniających jakąś arytmetyczną własność, na przykład nierozstrzygnięte do dziś pytanie, czy istnieje największa liczba pierwsza k taka, że $(k-2)$ też jest liczbą pierwszą.

podczas gdy nie można w ten sposób pozbyć się odniesienia do liczby 1 w wyrażeniu

b) $\lim_{x \to 0} f(x) = 1$.

Mówienie o nieskończoności jest w wypadku nieskończoności potencjalnej jedynie *façon de parler*. W (a) stwierdzamy tylko, że funkcja $f(x)$ przyjmuje *nieograniczenie* dużą, choć *skończoną* wartość. Inaczej przedstawia się sprawa z nieskończonością aktualną, choćby wtedy, gdy mówimy o nieskończonej mocy zbioru liczb rzeczywistych. Eliminacja odniesienia do nieskończoności nie jest wówczas możliwa.[6] Wracając do pierwszego argumentu Weyla, byłby on poprawny, jeśli udałoby się wykazać, że tylko pojęcie *nieskończoności potencjalnej* jest poprawne. Sugestia ta idzie jednak w przeciwnym kierunku niż obecne teorie matematyczne i praktyka matematyczna. Co więcej, zwolennicy nieskończoności aktualnej mogliby w argumencie Weyla znaleźć — paradoksalnie — obronę własnego stanowiska. Zgodnie ze sławnym *dictum* Bertranda Russella, niemożliwość przeliczenia zbioru wszystkich liczb naturalnych jest jedynie *niemożliwością medyczną*. Zwolennik aktualnej nieskończoności może więc odpowiedzieć, że — owszem — z jakichś względów nie możemy przeglądnąć zbioru liczb naturalnych; nieskończoność występuje jednak prawie wszędzie, na przykład w każdym naszym ruchu.

Pozostaje więc drugi argument, z którym zresztą wiąże się całkiem długa historia badań. Przez bowiem blisko pięćdziesiąt lat poszukiwano maszyn nieskończonościowych — lub raczej badano możliwość ich istnienia — które działałyby na innej zasadzie niż biegacz. Wymyślono więc: dzwonek brzęczący nieskończenie wiele razy w ciągu minuty, migotającą w podobny sposób żarówkę, maszynę, która wydrukuje w skończonym czasie całe rozwinięcie dziesiętne liczby π, i wiele innych.[7] Żadnej jednak z takich struktur nie da się zrealizować. Wymagałyby one innych praw fizycznych lub (aktualnie) nieskończonych wielkości fizycznych. Są za to możliwe logicznie, tzn. ich funkcjonowanie można pogodzić z prawami logiki i matematyki klasycznej. Tak więc jedynymi procesami podejrzanymi o to, że są maszynami nieskończonościowymi, są zjawiska ruchu. W tej sytuacji możliwe są dwa stanowiska. Pierwsze zgadza się, że ruch jest maszyną nieskończonościową. Drugie stanowisko powiada natomiast, że jeśli nasza fizyka jest poprawna, to nie może być w przyrodzie maszyn nieskończonościowych. Jeśli zastosowanie matematyki klasycznej do opisu czasu i przestrzeni rzeczywiście prowadzi do uznania ruchu za maszynę nieskończonościową, to albo należy zrewidować matematykę, albo jej stosowanie w fizyce. [8] W niniejszej pracy przyjmujemy to właśnie stanowisko.

---

[6] Por. rozważania M. Dummetta o nieskończoności w jego *Elements of Intuitionism*, Clarendon Press, Oxford 1977, s. 55-65.

[7] Przegląd tych pomysłów podaje A. Grünbaum w książce *Modern Science and Zeno's Paradoxes*, Allen and Unwin, London 1967, s. 78 nn.

[8] Jeśli rozumiem, Weyl opowiada się za pierwszym członem tej alternatywy. Filozofowie badający, czy można zrekonstruować fizykę zastępując w jej teoriach matematykę klasyczną — matematyką intuicjoni-

Trzeba się więc zająć pytaniem, czy nałożenie na przestrzeń struktury klasycznego kontinuum prowadzi do uznania ruchu za proces nieskończonościowy. Podstawowym pojęciem w argumencie Weyla jest „oddzielna całość" (*chopped off whole*), którego treści matematycznej nie wyjaśnia. Musimy więc poprzestać na intuicjach. Co więcej, powinniśmy wyraźnie rozgraniczyć dwa zagadnienia: odcinek kontinuum a jego «pododcinki» — i kontinuum a jego elementy. Zacznijmy od pierwszego i zastanówmy się nad pojęciem *oddzielnych całości*.

W jakim sensie mówimy, że przedmiot materialny składa się z oddzielnych całości? Przypuśćmy, że mamy pręt żelazny, który rozdzielamy (przecinamy) na dwa mniejsze pręty. Te mniejsze pręty są teraz zapewne oddzielnymi całościami. Można je odsunąć, między nimi znajduje się teraz coś innego. Każdy z mniejszych prętów jest ograniczony w miejscu przecięcia, «lewy» pręt ma prawą ściankę powstałą w miejscu przecięcia, a «prawy» — lewą. Reasumując: (1) między oddzielnymi całościami może się coś znajdować i (2) obie całości mają *ostatnią* warstwę (ściankę) w miejscu cięcia. Własności tych nie mają jednak odcinki otrzymane w wyniku przecięcia kontinuum liczb rzeczywistych, o ile potoczne pojęcie *ostatniej warstwy* przetłumaczymy na język matematyczny. Takie cięcie spełnia bowiem aksjomat Dedekinda (zwany zasadą ciągłości). Jeśli podzielimy ogół liczb rzeczywistych na dwie niepuste klasy P i Q, tak aby każda liczba należała do dokładnie jednej klasy i każda liczba z klasy P była mniejsza od każdej liczby z klasy Q, to zachodzi jedno z dwóch: albo istnieje największą liczba klasy P i nie ma najmniejszej liczby klasy Q, albo istnieje najmniejsza liczba klasy Q i nie ma największej liczby klasy P.[9] Zasada ciągłości wyklucza więc to, że między dwoma otrzymanymi w wyniku cięcia klasami znajduje się jakaś «luka», oraz że obie klasy są domknięte (ten drugi warunek wyraża się czasem mówiąc, że nie ma «skoku»). Jeśli więc pojęcie „oddzielnej całości" sprecyzujemy w wyżej opisany sposób, to nie ma powodu aby sądzić, że odcinki, które po kolei pokonuje Achilles, są oddzielnymi całościami.[10]

Inaczej przedstawia się sprawa, gdy rozważymy relacje kontinuum - jego ewentualne elementy. Obie klasyczne konstrukcje kontinuum liczb rzeczywistych, przez przekroje Dedekinda i przez ciągi Cauchy'ego[11], zakładają, że takie kontinuum jest *zbiorem* liczb rzeczywistych. Czy poszczególne liczby rzeczywiste są oddzielnymi całościami? Pytania tego nie da się teraz zrozumieć jako pytania o spełnianie zasadę ciągłości, ponieważ mówi ona o odpowiednio skonstruowanych podzbiorach kontinuum, a nie o

---

styczną, szli drugim tropem.

[9] Por. F. Leja, *Rachunek różniczkowy i całkowy*, PWN, Warszawa 1978, s. 23.

[10] Por. dyskusję w książce H. Rasiowej *Wstęp do matematyki współczesnej*, PWN, Warszawa 1968, s. 135-136.

[11] Klasycznie dowodzi się, że konstrukcje te są równoważne, por. K. Kuratowski, *Rachunek różniczkowy i całkowy*, PWN, Warszawa 1979, s. 12 - 17. Szkic konstrukcji Dedekinda można znaleźć w: G.M. Fichtenholz, *Rachunek różniczkowy i całkowy*, t.1, PWN, Warszawa 1994, s. 5-19. Konstrukcję Cantora przedstawia K. Maurin w *Analizie*, cz. I, PWN, Warszawa 1973, s. 25-27.

jego elementach. Gdy mówimy jednak o zbiorze i jego elementach, to intuicyjnie rozumiemy, że obiekty, które traktujemy jako elementy, są pierwotne wobec zbioru. Matematyk o inklinacjach konstruktywistycznych powiedziałby, że jest to kwestią naszej decyzji, czy ujmiemy takie obiekty w zbiór, czy nie. Możemy więc zrozumieć, że na gruncie klasycznej teorii poszczególne liczby rzeczywiste są oddzielnymi całościami, ponieważ są elementami zbioru kontinuum. Paradoks Zenona znowu okazuje się poważną trudnością. Jeśli opis prostej w przestrzeni fizycznej przy pomocy liczb rzeczywistych sprowadza się do tego, że (dosłownie) każdemu fizycznemu punktowi przestrzeni odpowiada jedna liczba rzeczywista i *vice versa*, to ruch polega na przejściu przez nieprzeliczalnie wiele fizycznych punktów. Co więcej, ponieważ punkty te są oddzielnymi całościami, zjawisko ruchu polega na wykonaniu nieprzeliczalnej liczby operacji (znalezienia się w danym punkcie fizycznym) w skończonym czasie. Ruch nie byłby więc tylko procesem nieskończonościowym, takim jak opisane wyżej maszyny nieskończonościowe, ale procesem *nieprzeliczalnym*.

Jakie jest wyjście z trudności sygnalizowanej przez tak zinterpretowany paradoks o Achillesie i żółwiu? Jedno podejście polega na rewizji klasycznych konstrukcji kontinuum, zmierzającej do pokazania, że kontinuum nie jest zbiorem. Za takim rozwiązaniem opowiadali się między innymi Weyl, L. E. J. Brouwer i A. Heyting.[12] Można jednak argumentować, że tak radykalna reakcja jest zbyteczna i twierdzić, że pomyłka leży w *zastosowaniu* matematyki do opisu ruchu, a nie w matematyce. Zakładaliśmy bowiem powyżej, że w takim opisie istnieje wzajemna jednoznaczność między terminami matematycznymi (liczba rzeczywista) a terminami fizycznymi (punkt przestrzeni fizycznej) *desygnującymi* przedmioty fizyczne. Taka jednoznaczność nie ma miejsca, a przynajmniej jest wątpliwa, na gruncie bardziej zaawansowanych teorii. Na przykład, w matematycznym aparacie mechaniki kwantowej odwołujemy się do wektorów w przestrzeni Hilberta, acz wątpliwe jest, aby każdy taki wektor mógł reprezentować stan fizyczny układu. Sprzeciwiają się temu tzw. zasady superselekcji. Idąc więc tym tropem, można by argumentować, że adekwatny opis nie zakłada wzajemnej jednoznaczności terminów matematycznych i terminów denotujących obiekty czy stany fizyczne. Zwolennik takiego podejścia odpowiedziałby, że ruch odbywa się po prostej, którą parametryzujemy jako kontinuum liczbowe, nie pytaj jednak, co w przestrzeni fizycznej odpowiada danej liczbie rzeczywistej. To, czy taka odpowiedź rozwiązuje paradoks, czy tylko go omija, zostawiam do namysłu Czytelnika.

[12] O intuicjonistycznej teorii kontinuum pisałem we wspomnianej pierwszej części tej pracy.

III. STRZAŁA

Trzeci argument był już wyżej wspomniany, że mianowicie wypuszczona strzała stoi w miejscu. Wynika to z supozycji, że czas skład się z szeregu „teraz". Jeśli się tego nie założy, wniosek nie wyniknie.[13]

Rozumowanie Zenona jest błędne; twierdzi on mianowicie, że skoro wszystko znajduje się w stanie spoczynku, albo w ruchu, i że jest w spoczynku, gdy zajmuje równą sobie przestrzeń, a to, co jest w ruchu, znajduje się zawsze w jakimś „teraz", wobec tego strzała wypuszczona z łuku stoi w miejscu. To nieprawda, bo czas bynajmniej nie składa się z niepodzielnych „teraz", tak jak i żadna inna wielkość.[14]

To, co się porusza, nie porusza się ani w tym miejscu, w którym się znajduje, ani w tym, w którym się nie znajduje.[15]

Powyższy paradoks doczekał się wielu interpretacji. Jedną z przyczyn tego stanu rzeczy są greckie sformułowania, które tłumaczone na współczesny język ujawniają swoją wieloznaczność. Podstawowym zwrotem, na którym spoczywa ciężar argumentacji jest greckie κατα το ισον, występujące w warunku na spoczynek ciała. Dokładnie należałoby je tłumaczyć następująco:

„[...] wszystko [...] jest w spoczynku ilekroć tkwi wedle równości". [16]

Angielscy badacze oddają powyższe sformułowanie pisząc:

„[...] everything always rests when it is against what is equal".[17]

Sformułowania takie uświadamiają nam, jak daleką drogę przebyły nauki przyrodnicze od czasu Arystotelesa. Jak więc oddać dawne pojęcia we współczesnym języku, tak aby definicja spoczynku była poprawna, albo przynajmniej «zdroworozsądkowa poprawna»? Nasuwają się dwie możliwe interpretacje:

1. Według pierwszej, warunek spoczynku należałoby sformułować następująco:

Ciało materialne pozostaje w spoczynku tylko wtedy, gdy «przystaje» do zajmowanego przez siebie miejsca w przestrzeni.

Przyjmujemy tutaj, że dwa obiekty przystają do siebie, jeśli mają ten sam kształt i te same rozmiary. Podobnie interpretują paradoks G.S. Kirk, J.E. Raven i M. Schofield. Niestety, proponowana definicja spoczynku nie jest poprawna. Nie ma powodu, aby sądzić, że poruszające się ciało zmienia kształt lub rozmiary. Uznajemy wręcz obecnie, że kształt i rozmiary są mało istotne i można od nich abstrahować, zajmując się ruchem punktu materialnego.

---

[13] Arystoteles, *Fizyka*, 239 b 30-3, tł. K. Leśniak.

[14] Arystoteles, *Fizyka*, 239 b 3-9, tł. K. Leśniak.

[15] Diogenes Laertios, *Żywoty i poglądy słynnych filozofów*, PWN, Warszawa 1968, IX 12, tł. I. Krońska.

[16] Za analizę filologiczną jestem wdzięczny profesor Marii Dzielskiej.

[17] G.S.Kirk, J. E. Raven, M. Schofield, *The Presocratic Philosophers*, Cambridge University Press, Cambridge 1984, s. 273.

2. Druga interpretacja (podobna do rozumowania G. Vlastosa)[18] przyjmuje takie oto określenie spoczynku:

Ciało materialne spoczywa tylko wtedy, gdy pozostaje w tym samym miejscu.

Abstrahując od rozciągłości ciała możemy teraz przyjąć następującą definicję:

W przedziale czasowym $[T_0, T_1]$ punkt materialny spoczywa tylko wtedy, gdy pozostaje w tym samym punkcie przestrzeni.

Rozumowanie Zenona przedstawia się więc następująco:

1) Punkt materialny znajduje się albo w ruchu, albo w spoczynku.

2) W okresie $[T_0, T_1]$ punkt materialny spoczywa tylko wtedy, gdy pozostaje w tym samym punkcie przestrzeni.

3) Jeśli punkt materialny jest w ruchu, to zawsze znajduje się w jakimś «teraz».

4) Ilekroć punkt materialny znajduje się w jakimś «teraz», tylekroć pozostaje wtedy w tym samym punkcie przestrzeni.

5) Punkt materialny spoczywa w każdym «teraz».

6) Poruszający się punkt materialny spoczywa.

Przez „teraz" trzeba rozumieć nierozciągłą chwilę, zwaną dalej „momentem". W powyższym rozumowaniu nie zakłada się jakiejś szczególnej teorii czasu — Zenon nie wypowiada się, czy czas składa się z momentów, czy też tylko dają się one w nim wyodrębnić. Dlatego *dictum* Arystotelesa: „czas bynajmniej nie składa się z niepodzielnych teraz", czy stwierdzenie Bergsona: „nigdy z [...] momentów czasu nie stworzy się czasu, tak jak z punktów matematycznych nie ułoży się linii"[19] nie pomagają w rozwiązaniu problemu.

Szukając błędu w rozumowaniu Zenona (tak jak je zinterpretowaliśmy powyżej) można pójść trzema drogami. Pierwsza to zmiana definicji spoczynku. Tak próbował usunąć trudność Arystoteles. Z drugiej strony, nie jest oczywiste, że z tego, iż w każdym momencie jakiegoś okresu strzała jest w spoczynku, wynika, że strzała spoczywa w ciągu tego okresu (B. Russell, K. Ajdukiewicz). Wreszcie trzecie rozwiązanie polegałoby na wykazaniu, że przy definicjach ruchu i spoczynku, które przypisujemy Zenonowi, oba te stany nie wykluczają się, nie są stanami «sprzecznymi». Najbardziej obiecujące wydaje się podejście pierwsze, dlatego nim się zajmiemy. Przesłanka (3) w powyższym rozumowaniu zakłada, że w każdej fazie ruchu strzała jest w jakimś momencie. Możemy to potraktować jako przyznanie, że struktura czasu (przestrzeni jednowymiarowej) jest opisana przez kontinuum liczb rzeczywistych R^1. Z kolei przesłankę (4) można sformułować jako postulat istnienia funkcji $x(t)$ odwzorowującej przedział czasu na odcinek przestrzenny.[20] Powyższe założenia tak pozwalają sformułować Zenonowe definicje ruchu i spoczynku:

[18] G. Vlastos, „Zeno", w: *The Encyclopedia of Philosophy*, The Macmillan Co. and the Free Press, New York 1967, vol. 8.

[19] H. Bergson, *Myśl i ruch. Dusza i ciało*, PWN, Warszawa 1963, s. 124, tł. P. Beylin, K. Błeszyński.

[20] Taka funkcja umożliwia ogólne ujęcie ruchu wyrażone przez zdanie „W chwili t ciało znajduje się w

Def.1 Punkt materialny spoczywa w okresie $[T_0, T_1]$ zawsze i tylko wtedy, gdy w każdym momencie t z przedziału $[T_0, T_1]$ $x(t) = x(T_0)$

Def.2 Punkt materialny porusza się w okresie $[T_0, T_1]$ zawsze i tylko wtedy, gdy dla każdego momentu t_1 z przedziału $[T_0, T_1]$ istnieje moment t_2 z tegoż przedziału, taki że $x(t_1) \neq x(t_2)$.

Definicje te prowadzą do wniosku, że jeśli jakiś przedział składa się z jednego momentu, czyli ma postać $[T_0, T_0]$, to punkt materialny spoczywa w tym przedziale. Wydaje się więc, że spoczywa też w każdym rozciągłym przedziale składającym się z przedziałów punktowych, choć z drugiej strony przeczy temu definicja 1. Arystoteles usuwał powyższą trudność przyjmując, że w nierozciągłej chwili «teraz» nie ma ani ruchu, ani spoczynku.[21] Można więc przyjąć, że poprawiał powyższe definicje w następujący sposób:

Def.1′ Punkt materialny spoczywa w okresie $[T_0, T_1]$, gdzie $T_0 < T_1$, zawsze i tylko wtedy, gdy w każdego momentu t z przedziału $[T_0, T_1]$ $x(t) = x(T_0)$

Def.2′ Punkt materialny porusza się w okresie $[T_0, T_1]$, gdzie $T_0 < T_1$, zawsze i tylko wtedy, gdy dla każdego momentu t_1 z przedziału $[T_0, T_1]$ istnieje moment t_2 z tegoż przedziału, taki że $x(t_1) \neq x(t_2)$.

Powyższe definicje nie pozwalają zdefiniować ani ruchu, ani spoczynku w nierozciągłej chwili czasu, co zgadza się ze stanowiskiem Arystotelesa, że w nierozciągłym momencie czasu *nie ma* ani ruchu, ani spoczynku. Te można analizować jedynie w rozciągłych przedziałach czasu.

Miarą ruchu jest prędkość. Na podstawie przyjętych definicji łatwo wprowadzić prędkość *średnią* w niezerowym okresie. Nie da się jednak wprowadzić prędkości *chwilowej* — ta mogła być wprowadzona dopiero po odkryciu matematycznych pojęć granicy i pochodnej funkcji. Korzystając z tych pojęć można poprawić definicje spoczynku i ruchu w następujący sposób:

Def.1″ Punkt materialny spoczywa w chwili T w miejscu $x_0 = x(T)$ tylko wtedy, gdy $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(T) = 0$

Def.2″ Punkt materialny znajduje się w ruchu w chwili T w miejscu $x_0 = x(T)$ tylko wtedy, gdy $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(T) \neq 0$

Powyższe definicje (dotyczące wielkości chwilowych) wraz z definicjami «arystotelesowskimi» (dotyczącymi wielkości średnich) zgodne są z następującymi intuicjami: Jeśli w każdym momencie jakiegoś okresu obiekt znajduje się w spoczynku, to znajduje się w spoczynku w tym czasu. Jeśli przedmiot w jakimś okresie się poruszył,

miejscu $x(t)$". Abstrahujemy więc od tego, czy ciało mija miejsce, osiąga go, przebywa w nim, czy też je opuszcza w danej chwili. Tym samym taka koncepcja kieruje się przeciw rozwiązaniom fenomenologów, które (jak rozumiem) opierają się na powyższych rozróżnieniach.

[21] Arystoteles, *Fizyka* 239 a 23 - 239 b 4.

to w jakichś momentach czasu z tego okresu był w ruchu. Paradoks Zenona jest więc rozwiązany — w żaden sposób nie umniejsza to jednak wielkości jego autora. Starał się on pokazać starożytnym i późniejszym uczonym, że nie mają dobrej koncepcji ruchu, która obejmowałaby zarówno ruch chwilowy jak i ruch w rozciągłym okresie.

IV. STADION (RUCHOME SZEREGI)

Czwarty argument odnosi się do ciał poruszających się na stadionie z jednakową szybkością w przeciwnych kierunkach, w szeregach utworzonych z równej ilości tych ciał o jednakowych rozmiarach; jeden z tych szeregów zajmuje przestrzeń od końca stadionu do punktu środkowego, a drugi od punktu środkowego do początku stadionu. Sądzi, iż z tego wynika wniosek, że połowa danego czasu jest równa jego podwojonemu okresowi. Paralogizm ten opiera się na założeniu, że ciało w tym samym czasie i z tą samą szybkością mija zarówno ciało będące w ruchu, jak i o takich samych rozmiarach ciało spoczywające. To jednak jest fałsz. Niech np. AA... *będą ciałami nieruchomymi o równych masach,* BB... *ciałami odpowiadającymi ilościowo i rozmiarami* AA... *a zajmującymi najpierw pozycje od początku stadionu do środka* AA..., ΓΓ... *zaś ciałami, zajmującymi najdalsze miejsce, równymi, co do ilości, wielkości i szybkości* BB. *Z tego wynika, że, po pierwsze, skoro* BB... *i* ΓΓ... *mijają się nawzajem, pierwsze* B *osiągnie ostatnie* Γ *w tym samym momencie, gdy pierwsze* Γ *osiagnie ostatnie* B. *Po drugie, w tym samym momencie pierwsze* Γ *minęło wszystkie* AA..., *podczas gdy pierwsze* B *przebyło tylko połowę* AA... *i wskutek tego zajęło tylko połowę czasu zajmowanego przez pierwsze* Γ, *gdyż każde z nich zajmuje równy czas przy mijaniu każdego* A. *Po trzecie: w tym samym czasie wszystkie* B *minęły wszystkie* Γ, *bo pierwsze* Γ *i pierwsze* B *osiągną równocześnie przeciwne krańce stadionu, gdyż [jak twierdzi Zenon] czas zużyty przez pierwsze* Γ *do przejścia wszystkich* BB... *jest równy czasowi przejścia wszystkich* AA..., *gdyż zużyty został równy czas przez pierwsze* B *i pierwsze* Γ *dla przejścia wszystkich* AA... *Takie jest rozumowanie, ale opiera się na wspomnianym błędnym założeniu.*[22]

[22] Arystoteles, *Fizyka* 239 b 33-17, tł. K. Leśniak, w: Arystoteles, *Dzieła zebrane*, t. 2, PWN, Warszawa 1990. Tłumaczenie tego fragmentu (choć tego samego autora) różni się istotnie od zamieszczonego w polskim wydaniu *Fizyki* z 1968 r., które jest po prostu niezrozumiałe. Nadal jednak niezrozumiałe (lub bezsensowne) jest zdanie zaczynające się od słów „Po drugie", i co więcej, różni się co do treści od tłumaczeń anglosaskich (np. Owena albo Kirka, Ravena, Schofielda), w których akapit ten jest sensowny i intuicyjnie prawdziwy. Po prostu, w polskim i angielskich tłumaczeniach mowa jest o INNYCH szeregach w tym fragmencie. Co więcej, filolodzy klasyczni, z którymi rozmawiałem, twierdzą, że poprawne są w tym punkcie tłumaczenia Anglosasów. Dlatego zamieszczam poniżej tłumaczenie Kirka, Ravena, Schofielda:

„The fourth is the one about equal bodies which move in opposite directions past equal bodies in a stadium at equal speed, the one row from the end of the stadium (towards us) and the other from the middle (away from us) — in which he thinks it follows that half of the time is equal to (its) double. The fallacy consists in requiring that things move at equal speed past a moving body and past a body at rest of equal magnitude take an equal time. But this is false. For example, let the stationary bodies be A, A...; let B, B... be those starting from the middle, equal in number and magnitude to them; let Γ, Γ... be those starting from the end, equal in number and magnitude to them (*sc.* the As), and equal in speed to the Bs. Now it follows that the first B and the first Γ are

Δ	A A A A B B B B ⟶ ⟵ Γ Γ Γ Γ	E

A = *ciała spoczywające,* B = *ciała poruszające się od* Δ *do* E, Γ = *ciała poruszające się od* E *do* Δ, Δ = *początek stadionu,* E = *koniec stadionu.*[23]

Podobnie jak i w wypadku poprzednich paradoksów, Arystoteles podaje dość obszerną propozycją rozwiązania paradoksu, natomiast streszcza go niezwykle krótko. Musimy więc odtwarzać paradoks, analizując proponowane rozwiązanie, zakładając przy tym, że Arystoteles rozumiał go poprawnie. Tak więc, jeśli wierzyć Stagirycie, Zenon udowadniał paradoksalne twierdzenie, że połowa czasu równa jest jego dwukrotności, przy czym miało ono wynikać z założenia, że poruszające się ciało w takim samym czasie mija równe co do wielkości ciała, z których jedno się porusza, a drugie jest w spoczynku. Będąc życzliwym wobec Zenona, trudno uwierzyć, że uznawał takie twierdzenie. Obserwacja gonitwy rydwanów albo wyścigu biegaczy musiała przecież skłaniać do przeciwnego wniosku. Co mogło więc skłonić Zenona do przyjęcia kontrowersyjnej tezy? Być może (mówiąc językiem współczesnym) Zenon testował jakąś koncepcję, która właśnie do takiego wniosku prowadziła. Jeśli dobrze rozumiem, koncepcja taka musi wyróżniać pewne prędkości. Wydaje się, że idea wyróżnionych prędkości narzuca się, jeśli przyjąć, że ruch ma charakter dyskretny, tzn. odbywa się w przestrzeni i w czasie składających się z niepodzielnych, lecz rozciągłych elementów - «atomów».[24] Ruch odbywa się wtedy w ten sposób, że w kolejnych «atomach» czasu ciało zajmuje kolejne «atomy» przestrzeni. Aby uprościć rozumowanie załóżmy, że ciało jest minimalnie małe, tzn. zajmuje dokładnie jeden «atom» przestrzenny. Przypuśćmy teraz, że jakieś ciało porusza się z prędkością równą jakiejś liczbie naturalnej

at the end at the same time, as they (*sc.* the Bs and Γ) move past each other. And it follows that the Γ (*sc.* the first Γ) has gone right past all of them (*sc.* the Bs), but the B (*sc.* the first B) past only half (what it passes, *sc.* the As): so the time is half, for each is alongside each for an equal time. And at the same time it follows that the first B has gone past all the Γs; for the first Γ and the first B will be at opposite ends at the same time, because both are an equal time alongside the As. This then is his argument, and it depends on the falsehood we have mentioned."

[23] Diagram Aleksandra zw. Symplicjuszem z jego *Fizyki,* 1016, 11. Za: G.S. Kirk, J.E. Raven, M. Schofield, *op. cit.*, s. 274-75.

[24] Niektórzy sądzą, że paradoks wymierzony był w geometrię Ksenokratesa, na gruncie której podobno kontinuum geometryczne składało się z rozciągłych, ale niepodzielnych elementów — patrz np. G.S.L. Owen, „Zeno and the Mathematicians", [w:] R.E. Furley, D.J. Allen, *Studies in Presocratic Philosophy*, vol. II, Allen and Unwin, London, s. 143-162.

różnej od 1. Znaczy to, że jeśli w danym momencie-atomie było ono, powiedzmy, w pierwszym miejscu (atomie) przestrzeni, to w następnym momencie jest w miejscu $m + 1$. Kiedy jednak było w miejscu drugim, trzecim, ..., m-tym? Na to pytanie nie ma odpowiedzi. Podobnie możemy rozważyć prędkość równą jakiemuś ułamkowi właściwemu o postaci $1/k$. Jeśli w momencie pierwszym ciało zajmuje miejsce pierwsze, to w momencie $m + 1$ jest w miejscu następnym. Gdzie jednak było w momencie drugim, trzecim, ..., m-tym? Na to pytanie też nie ma odpowiedzi. Wobec tego są pewne wyróżnione prędkości, mianowicie 1 albo –1, gdyż żadne inne prędkości nie pozwalają na sensowną odpowiedź na pytanie o czas i miejsce zdarzenia czy procesu. Nazwijmy łącznie oba te pytania „pytaniami o lokalizację". Oczywiście jest też i druga wyróżniona prędkość — 0, czyli spoczynek. Wniosek jest więc następujący: na gruncie «dyskretnej» koncepcji ruchu, jeśli chcemy zachować lokalizację zdarzeń i procesów, możemy dopuścić tylko trzy prędkości: 0, +1 i –1.

Powróćmy do trzech równoległych szeregów niepodzielnych ciał o wielkościach równych «atomom» przestrzeni. Niech drugi rząd (ciał B na rysunku) porusza się względem pierwszego i równolegle doń z prędkością +1, zaś trzeci rząd (ciał Γ) porusza się względem pierwszego z szybkością –1. Z jaką prędkością porusza się drugi wobec trzeciego? To znaczy, jak wiele ciał Γ pokonuje rząd B w tym samym czasie, tzn. w atomie czasu? Oczywiście, odpowiedź brzmi: 2. Jeśli teraz zapytamy, po jakim czasie ciało B minie dokładnie jedno ciało Γ, to należałoby odpowiedzieć, że po 1/2. Czyli nasze atomy czasu nie były właściwie wybrane. Naprawdę bowiem atom czasu ma rozciągłość 1/2, a nie 1. Popatrzmy teraz na rysunek z innej strony. Załóżmy bowiem, że względna prędkość poruszających się w przeciwne strony rzędów B i Γ wynosi 1, i co więcej, obydwa one poruszają się z tą samą, choć przeciwnie skierowaną prędkością wobec znajdującego się w spoczynku rzędu A. Na pytanie, z jaką prędkością poruszający się rząd, powiedzmy rząd B, porusza się względem rzędu w spoczynku (A), wypadałoby odpowiedzieć: 1/2. Ale to znaczy, że po upływie dwóch atomów czasu B pokonało dopiero jeden atom przestrzenny. Biedząc się nad naszym ulubionym pytaniem — tj. pytaniem, ile atomów przestrzennych ciało B pokonało w czasie jednego atomu czasu — możemy udzielić następującej odpowiedzi: nie pytaj o to, bo źle wybrałeś rozmiary atomu czasu. Musi on być równy 2, a wtedy nie ma sensu pytać, co się stało w jego połowie. Raz więc atom czasu jest równy 2, innym razem 1/2. Jeśli się nie mylę, tego właśnie starał się dowieść Zenon.

Kończąc rozważania o „Poruszających się szeregach", przypatrzmy się jeszcze założeniom rozumowania Zenona, tak jak je zrekonstruowaliśmy. Oto one:

1) Czas i przestrzeń mają strukturę dyskretną: składają się z niepodzielnych choć rozciągłych elementów — atomów.

2) Ciało jest zlokalizowane przestrzene i czasowo.

3) Każdy z rzędów A, A..., B, B..., Γ, Γ... wyznacza równorzędny układ odniesienia.

4) Prędkości się dodają.

Argumentacja Zenona pokazuje, że wszystkich tych założeń nie da się pogodzić. W dyskretnej przestrzeni zachodzą różne zaskakujące rzeczy. Jeśli na przykład kwadrat zbudowany jest z miniaturowych płytek-atomów, wówczas tyle samo płytek znajduje się wzdłuż jego boku i wzdłuż jego przekątnej.[25] Choć dla wielu pomysł z dyskretną przestrzenią wydawał się kuszący, to jednak z powodu trudności z wprowadzeniem intuicyjnie poprawnych relacji metrycznych w takiej przestrzeni, nadal pozostaje tylko kuszącym pomysłem.[26]

V. PODSUMOWANIE

Zamiast podania wniosków, podsumuję krótko, jakie interpretacje paradoksów zaproponowałem i czy przy tych interpretacjach nadal są one antynomiczne. Sądzę więc, że „Achilles i żółw" dotyczy zastosowania koncepcji kontinuum liczbowego do opisu przestrzeni i czasu. Jeśli kontinuum liczbowe jest zbiorem, to ruch polega na wykonaniu nieprzeliczalnie wielu oddzielnych operacji, chyba że dałoby się jakoś pokazać, że opis fizycznej przestrzeni i czasu fizycznego przez kontinuum liczbowe nie jest «dosłowny». Twierdzę więc, że paradoks ten jest do dziś nierozwiązany. Paradoks „Strzała", tak jak go interpretuję, nie sprawia takiego kłopotu. Pokazywał dawniejszym badaczom, że nie mają koncepcji ruchu, która pozwalałaby mówić i o ruchu w danej chwili, i o ruchu w jakimś okresie. Dziś, mając pojęcie pochodnej i granicy funkcji, dajemy sobie z tym radę. Natomiast co do „Poruszających się szeregów", to są one nadal wyzwaniem dla tych, którzy uważają, że ruch odbywa się w sposób dyskretny.

Wielki był Zenon: bo wymyślił zagadki, nad którymi nadal, po dwu i pół tysiącu lat, możemy się głowić.

---

[25] H. Weyl, *op. cit*, s. 42.

[26] *Ibid.*