Tomasz Bigaj

Uwagi o logice trójwartościowej

Filozofia Nauki 5/3, 113-121

1997

Artykuł został zdigitalizowany i opracowany do udostępnienia w internecie przez Muzeum Historii Polski w ramach prac podejmowanych na rzecz zapewnienia otwartego, powszechnego i trwałego dostępu do polskiego dorobku naukowego i kulturalnego. Artykuł jest umieszczony w kolekcji cyfrowej bazhum.muzhp.pl, gromadzącej zawartość polskich czasopism humanistycznych i społecznych.

Tekst jest udostępniony do wykorzystania w ramach dozwolonego użytku.

MUZEUM HISTORII POLSKI

Filozofia Nauki
Rok V, 1997, Nr 3(19)

Tomasz Bigaj

Uwagi o logice trójwartościowej

Jak powszechnie wiadomo, logika trójwartościowa Jana Łukasiewicza powstała jako rezultat rozważań o charakterze filozoficznym, dotyczących zagadnienia determinizmu. Fakt filozoficznego ugruntowania logiki trójwartościowej miał dla Łukasiewicza ogromne znaczenie. Pisał on na przykład: „Gdyby nie istniał choćby cień możliwości, że [...] trzecia wartość da się jakoś zinterpretować intuicyjnie, to logika trójwartościowa byłaby prawdopodobnie nie powstała" (Łukasiewicz 1994, s. 234). W niniejszym artykule chciałbym zająć się nie tyle problemem, czy wprowadzenie trzeciej wartości logicznej jest wystarczająco uzasadnione (np. filozoficznym założeniem indeterminizmu), ile pytaniem o to, w jaki sposób możliwe jest przejście od przyjęcia istnienia trzeciej wartości do konkretnej postaci logiki trójwartościowej, którą przyjął Łukasiewicz. Sądzę bowiem, że tu właśnie kryje się największa zagadka interpretacyjna logicznej konstrukcji Łukasiewicza. Zgadzam się przy tym z tezą Ludwika Borkowskiego, który stwierdził, że w problemie intuicyjnej interpretacji logiki trójwartościowej należy odróżnić dwie kwestie: (1) zagadnienie wyprowadzalności tabelek dla trójwartościowych spójników z dokładnie sformułowanych założeń odpowiadających intencjom Łukasiewicza oraz (2) zagadnienie, czy uzyskany system nie budzi zastrzeżeń natury filozoficznej (Borkowski 1990, s. 428). Postaram się pokazać, że trójwartościowa logika w formie, jaką nadał jej twórca, nie spełnia zasadniczego warunku: nie jest mianowicie zgodna z założeniami filozoficznymi, które — jak się twierdzi — legły u podstaw jej konstrukcji.

Przypomnijmy na wstępie podstawowe pojęcia i założenia logiki trójwartościowej. Przyjmuje się w niej, że oprócz prawdy i fałszu zdania mogą przyjmować trzecią wartość logiczną — tzw. możliwość. Zdania takie to te, które odnoszą się do przyszłych, jeszcze niezdeterminowanych zdarzeń. Z kolei zdanie prawdziwe to zdanie, które głosi zajście zdarzenia w danym momencie zdeterminowanego, a fałszywe —

głosi zajście zdarzenia, którego niezajście jest zdeterminowane. Założenia te nie wystarczą jednak jeszcze do skonstruowania logiki trójwartościowej — potrzebne są mianowicie reguły, określające, w jaki sposób wartość logiczna zdań złożonych zależy od wartości ich składników. Łukasiewicz podaje te reguły w postaci następujących matryc dla spójników odpowiednio: negacji, koniunkcji, alternatywy i implikacji. Dodatkowo matryce poniższe obejmują nowe, nieklasyczne spójniki modalne: jest konieczne, że (w zapisie Łukasiewicza *Lp*) i jest możliwe, że (*Mp*).

$\wedge$	1	1/2	0
1	1	1/2	0
1/2	1/2	1/2	0
0	0	0	0

$\vee$	1	1/2	0
1	1	1	1
1/2	1	1/2	1/2
0	1	1/2	0

$\rightarrow$	1	1/2	0
1	1	1/2	0
1/2	1	1	1/2
0	1	1	1

p	$\sim p$
1	0
1/2	1/2
0	1

p	Lp
1	1
1/2	0
0	1

p	Mp
1	1
1/2	1
0	0

Niestety Łukasiewicz nigdzie nie zadeklarował jasno powodów, dla których przyjął takie a nie inne rozstrzygnięcia w kwestii analizy semantycznej spójników prawdziwościowych rachunku trójwartościowego. Jego wypowiedzi w tej sprawie są niezwykle enigmatyczne. Np. pisał: „Poszukiwane równości [dla spójnika implikacji — TB] otrzymałem na podstawie wnikliwych rozważań, które były dla mnie mniej lub więcej oczywiste" (Łukasiewicz 1961, s. 153-154). A przy innej okazji stwierdził, że „kierował się pewnymi intuicjami i chęcią zachowania pewnych praw logiki dwuwartościowej (prawo tożsamości, prawa dotyczące warunków prawdziwości okresu warunkowego, prawa transpozycji)" (Łukasiewicz 1994, s. 239).

Niezależnie od motywów, które kierowały Łukasiewiczem, w rezultacie swoich analiz uzyskał on logikę różną od klasycznej, tzn. logikę, której zestaw tautologii nie pokrywa się z tautologiami klasycznymi. Dokładniej, każda formuła tautologiczna rachunku trójwartościowego jest tautologią klasyczną, ale nie na odwrót. Najbardziej spektakularnymi przykładami praw logiki, nie obowiązujących w logice Łukasiewicza, jest zasada sprzeczności czy zasada wyłączonego środka — ale także np. jedna z form prawa sylogizmu hipotetycznego: $[(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)] \rightarrow (p \rightarrow r)$. Charakterystyczne jest, że — być może wyłączając zasadę sprzeczności — nie znajdujemy u Łukasiewicza żadnej argumentacji za tym, że właśnie takie a nie inne prawa logiki klasycznej nie powinny obowiązywać dla zdań o niezdeterminowanej przyszłości. Do tej sprawy powrócimy jeszcze w dalszym ciągu rozważań.

Lukę pomiędzy założeniem trójwartościowości a konkretną postacią rachunku logicznego usiłował wypełnić Jerzy Słupecki (Słupecki 1964). Podał on mianowicie sposób zrekonstruowania rachunku trójwartościowego, formalizując uprzednio w pewnym języku ontologiczne założenia Łukasiewicza. Omówmy pokrótce konstrukcję Słupeckiego. Założył on mianowicie, że na zbiorze zdarzeń Z (zarówno teraźniejszych, jak i przyszłych) można określić następujące operacje: sumę ($\cup$), iloczyn ($\cap$) i dopełnienie ($'$), spełniające aksjomaty algebry Boole'a. Dodatkową relacją, określoną na Z, jest relacja przyczynowa, którą Słupecki charakteryzuje formalnie przy pomocy pięciu aksjomatów. Wreszcie trzecim założeniem jest założenie o istnieniu podziału zbioru Z na trzy podzbiory: zdarzeń zdeterminowanych pozytywnie, zdeterminowanych negatywnie i niezdeterminowanych.

Aby można było mówić o logice, należy wprowadzić pewien język, opisujący scharakteryzowane wyżej zdarzenia. Słupecki przyjmuje założenie, że każde zdanie tego języka opisuje jakieś zdarzenie ze zbioru Z. Następnie definiuje on negację, alternatywę i koniunkcję zdań, jako zdania opisujące odpowiednio: boole'owskie dopełnienie, sumę i iloczyn zdarzeń. Ostatnie założenie Słupeckiego wprowadza charakterystykę wartości logicznych. Zdanie jest prawdziwe, gdy opisuje zdarzenie, mające przyczynę; fałszywe — gdy opisuje zdarzenie, którego dopełnienie ma przyczynę; i nieokreślone — gdy zdarzenie, które ono opisuje nie ma w ogóle jeszcze przyczyny.

Przy pomocy tych założeń Słupecki udowadnia następnie, że matryce dla scharakteryzowanych powyżej spójników — alternatywy, koniunkcji i negacji — pokrywają się z matrycami Łukasiewiczowskimi. Zatem, jeśli założenia sformułowane przez Słupeckiego faktycznie pokrywają się z filozoficznymi przesłankami twórcy logiki trójwartościowej, to istotnie można powiedzieć, że konkretna postać rachunku logicznego ma intuicyjną podbudowę filozoficzną.

Konstrukcja Słupeckiego ma jednak pewne wady. Po pierwsze, zawiera defekt formalny, który — choć łatwy do usunięcia — daje wiele do myślenia. Otóż przyjęte założenie o tym, że struktura Z jest algebrą Boole'a, jest za mocne, i w koniunkcji z pozostałymi warunkami prowadzi do sprzeczności.[1] W algebrze Boole'a występuje bowiem element maksymalny (oznaczmy go przez 1) $1 = f \cup f'$. Niech teraz zdarzenie f_1 będzie zdeterminowane pozytywnie, a zdarzenie f_2 — niezdeterminowane. Ponieważ $f_1 \cup f_1' = 1$, więc z pewnego założenia charakteryzującego relację przyczynowości (założenie to ma postać równoważności głoszącej, że pewne zdarzenie jest przyczyną sumy zdarzeń zawsze i tylko wtedy, gdy jest przyczyną co najmniej jednego z tych zdarzeń) wynika, że zdeterminowane będzie również zdarzenie «pewne», czyli 1. Ale ponieważ także $1 = f_2 \cup f_2'$, więc na podstawie tego samego założenia dostajemy, że

[1] Zwróciłem na to uwagę w swojej nieopublikowanej pracy z 1987 r. Precyzyjniejsze ujęcie tego problemu wraz z jego rozwiązaniem znajduje się w pracy (Nowak 1988).

albo f_2, albo f_2' są zdeterminowane, co przeczy założeniu. Trudność tę łatwo usunąć, przyjmując, że Z jest nie algebrą Boole'a, lecz kratą de Morgana. Znamienne jest jednak, że musimy przyjąć, iż operacja $f \cup f$ na zdarzeniach niezdeterminowanych prowadzi do innego wyniku niż analogiczna operacja na zdarzeniach zdeterminowanych.

Druga wada konstrukcji Słupeckiego polega na tym, że nie uwzględnia ona spójnika implikacji. Jak wiadomo, w rachunku trójwartościowym spójnik implikacji nie jest definiowalny przy pomocy koniunkcji, alternatywy i negacji — w szczególności klasyczna formuła $\sim p \vee q$ nie definiuje implikacji w sensie Łukasiewiczowskim. Jest interesujące, że Słupeckiemu nie udało się podać operacji na zbiorze zdarzeń, która byłaby analogonem implikacji — zatem jego konstrukcja jest niezupełna, a jej sukces mocno wątpliwy. W dalszych rozważaniach okaże się, że implikacja Łukasiewiczowska jest źródłem również innych problemów.

Przejdźmy obecnie do analizy samego rachunku logicznego Łukasiewicza. Przedstawię teraz dwa zarzuty, jakie można podnieść przeciwko temu rachunkowi. Pierwszy z nich został sformułowany już na kongresie filozoficznym w Zurychu w 1938 r., gdzie Łukasiewicz przedstawił swoje odkrycie. Ma on postać następującą: jeśli zdanie p ma wartość 1/2, to w systemie Łukasiewicza zdanie $p \vee \sim p$ (jak również zdanie $p \wedge \sim p$) jest nieokreślone. Przeczy to jednak naszej intuicji, że już dzisiaj jest przesądzone — niezależnie od tego, jaka będzie wartość zdania p — że powyższa alternatywa jest prawdziwa, a koniunkcja fałszywa, i to koniecznie. Innymi słowy — nie widać powodu, dla którego logiczna zasada wyłączonego środka i zasada sprzeczności miałaby tracić ważność przez wprowadzenie zdań niezdeterminowanych.

Ludwik Borkowski uważa ten zarzut za nie do odparcia (Borkowski 1990). Uzupełniając zarzut dodaje on, że tezą logiki trójwartościowej Łukasiewicza jest formuła: $(Mp \wedge Mq) \rightarrow M(p \wedge q)$, która «głosi», że jeśli dwa zdania są możliwe, to ich koniunkcja jest również możliwa. Jednakże jeśli np. zdanie p jest równoważne negacji q, to teza ta wydaje się w oczywisty sposób fałszywa.

Borkowski proponuje następującą poprawę rachunku Łukasiewicza. Trzeba mianowicie pogodzić ze sobą dwa fakty: to, że alternatywa (oraz koniunkcja) dwóch zdań nieokreślonych «zazwyczaj» jest nieokreślona, z tym, że alternatywa zdania nieokreślonego z jego negacją jest jednak zawsze prawdziwa, a koniunkcja — fałszywa. Borkowski zauważa, że pogodzenie tych intuicji możliwe jest tylko na gruncie rachunku czterowartościowego. Wprowadza on zatem dwie wartości pośrednie pomiędzy prawdą a fałszem (oznaczmy je np. przez a i b), oraz przyjmuje następujące założenia: (1) jeśli zdanie ma wartość a, to jego negacja ma wartość b; (2) jeśli zdanie ma wartość b, to jego negacja ma wartość a; (3) alternatywa dwóch zdań o wartości a ma wartość a, a alternatywa zdań o wartości b ma wartość b (i to samo dla koniunkcji); (4) alternatywa zdań, z których jedno ma wartość a a drugie b, ma wartość 1, a koniunkcja 0. Łatwo sprawdzić, że w takim rachunku wspomniany wyżej paradoks nie zachodzi.

Rozwiązanie Borkowskiego trudno jednakże uznać za zadowalające. Po pierwsze, ma ono charakter rozwiązania *ad hoc*. Autor nigdzie nie wyjaśnia, na czym miałaby polegać intuicyjna różnica pomiędzy dwiema różnymi wartościami pośrednimi[2]. Po drugie — i ważniejsze — propozycja Borkowskiego obarczona jest równie poważnymi mankamentami, co konstrukcja Łukasiewicza. Rozpatrzmy bowiem dwa niezwiązane ze sobą treściowo zdania p i q, mające pośrednią wartość logiczną, tzn. odnoszące się do niezdeterminowanych zdarzeń z przyszłości. Łatwo zauważyć, że z dwóch formuł: $p \vee q$ oraz $p \vee \sim q$, jedna musi być — w myśl założeń Borkowskiego — prawdziwa. Albo bowiem zdania p i q mają tę samą wartość logiczną, albo nie. Jeśli zachodzi pierwsze — to zdania p i $\sim q$ mają różną wartość logiczną, a zatem $p \vee \sim q$ jest prawdziwe. Jeśli drugie — to $p \vee q$ musi być prawdziwe. Jednakże, jeśli tylko stany rzeczy opisywane przez p i q są niezależne, to zawsze może się zdarzyć, że jedna bądź druga alternatywa okaże się fałszem. Wniosek ten jest zatem równie nieakceptowalny, co wniosek, że zdanie $p \vee \sim p$ w logice Łukasiewicza nie zawsze jest prawdziwe.

Borkowski nie uratował więc logiki Łukasiewicza przed sformułowanym wyżej zarzutem. Nie jest to jednak zarzut jedyny. Drugi problem, który chciałbym teraz przedstawić, można by nazwać mianem „paradoksu implikacji". Otóż zgodnie z intuicyjną interpretacją wartości logicznych, w logice Łukasiewicza zdania logicznie nieokreślone — odnoszące się do niezdeterminowanej przyszłości — w odpowiednim momencie czasu «ulegną realizacji», tzn. zostaną określone bądź jako prawdziwe, bądź jako fałszywe. Ten fakt jest powszechnie znany i — jak sądzę — akceptowany. Można go wyrazić w skrócie, mówiąc, że zdania w logice Łukasiewicza mogą zmienić wartość logiczną z 1/2 na 1 lub z 1/2 na 0. Zaskakujące jest jednak, że w logice Łukasiewicza można skonstruować bardzo proste zdanie, które zmienia swoją wartość logiczną z prawdy na fałsz. Weźmy bowiem dwa zdania p i q nieokreślone w momencie t, które w momencie t' zrealizują się następująco: p stanie się prawdziwe, a q fałszywe. Rozpatrzmy teraz implikację $p \rightarrow q$. Zgodnie z tabelką, implikacja, której poprzednik i następnik są zdaniami nieokreślonym, jest prawdziwa. Zatem w chwili t implikacja ma wartość 1. Jednakże w chwili t' staje się ona — co oczywiste — fałszywa. Sądzę, że ten prosty przykład stoi w jaskrawej sprzeczności z powszechnie przyjmowaną interpretacją filozoficzną logiki trójwartościowej. Znaczy on bowiem ni mniej, ni więcej, że pewien fakt ze zdeterminowanego pozytywnie może stać się zdeterminowany negatywnie. Powstaje więc palące pytanie: co stało się z przyczyną tego faktu, która istniała w czasie t? Czyżby według Łukasiewicza można było po Orwellowsku zmieniać przeszłość?

Myślę, że to, co zostało do tej pory powiedziane w wystarczającym stopniu uzasadnia następujące tezy: (1) trójwartościowy rachunek logiczny w wersji Łukasiewicza nie

[2] W szczególności, nie można twierdzić, że różnica ta polega na różnym prawdopodobieństwie wystąpienia odpowiednich zdarzeń, chociażby dlatego, że jeśli prawdopodobieństwo wystąpienia zdarzenia opisanego przez zdanie p jest 1/2, to takie samo jest prawdopodobieństwo zdarzenia $\sim p$.

da się wyprowadzić z intuicyjnych założeń filozoficznych, gdyż (2) jest on z tymi założeniami sprzeczny. Aby wzmocnić nieco tę ostatnią tezę, chciałbym rozważyć ogólnie następującą kwestię: czy założenie trójwartościowości daje podstawę do tego, aby kwestionować którąkolwiek z klasycznych tez logicznych? Sądzę, że nie, a jako argumentu można użyć *mutatis mutandis* argumentacji z zarzutu dotyczącego zdania $p \vee \sim p$. Jeśli rozpatrzymy zdanie, będące podstawieniem dowolnej tautologii klasycznego rachunku logicznego, to jasne jest przecież, że jest ono prawdziwe w dowolnej chwili czasu, niezależnie od tego, czy i jak zdeterminowane są zdania proste wchodzące w jego skład. Prawda ta zagwarantowana jest znaczeniem, jakie przypisujemy klasycznym spójnikom logicznym. Widać, że Łukasiewicz przypisał spójnikom swojej logiki inny, nieklasyczny sens, ale jest zupełnie niejasne, dlaczego tak zrobił i jaki to ma związek z przyjęciem zasady trójwartościowości w miejsce zasady dwuwartościowości.

Być może pewne światło na intuicje Łukasiewicza może rzucić przypomnienie słynnego fragmentu z *Hermeneutyki* Arystotelesa, poświęconego analizie zdań „Jutro odbędzie się bitwa morska" i „Jutro nie odbędzie się bitwa morska". Arystoteles, jak wiadomo, wysuwa tam przypuszczenie, że żadne z powyższych zdań nie może mieć określonej klasycznej wartości logicznej, co zdaje się sugerować, że występował on przeciwko zasadzie wyłączonego środka. Rozpatrzmy bowiem zdanie:

(a) Już dziś prawdą jest, że (jutro odbędzie się bitwa morska lub jutro nie odbędzie się bitwa morska),

które jest uszczegółowieniem zdania $p \vee \sim p$. Zdanie to, na gruncie klasycznego rachunku logicznego, jest równoważne zdaniu:

(b) Dziś prawdą jest, że jutro odbędzie się bitwa morska lub dziś prawdą jest, że jutro nie odbędzie się bitwa morska.

Zdanie (b) jest natomiast fałszywe w świetle przytoczonego wyżej założenia o niezdeterminowaniu zdarzenia, polegającego na odbyciu się bitwy morskiej. Można stąd więc wyciągnąć wniosek o fałszywości zdania (a) i — co za tym idzie — niespełnieniu logicznej zasady wyłączonego środka.

Jednakże nie jest to wniosek nie do odparcia. Można równie dobrze kwestionować równoważność zdań (a) i (b) argumentując, że wynika ona właśnie z zasady dwuwartościowości, którą się tutaj podważa. Odrzucając zasadę dwuwartościowości, odrzucamy tym samym ową równoważność, tzn. możemy utrzymywać, że (b) jest fałszywe, podczas gdy (a) — nadal prawdziwe. Znamienne jest, że Łukasiewicz nie wybrał tego rozwiązania, tzn. uznał równoważność (a) i (b), a zatem był zmuszony uznać (a) za fałszywe. Podkreślam jednak, że nie jest to rozwiązanie, które by wynikało z koniecznością z założenia o istnieniu trzech wartości logicznych.

* * *

Na zakończenie chciałbym naszkicować zarys pewnego rachunku trójwartościowego, który — jak sądzę — nieco konsekwentniej realizuje filozoficzne intuicje Łukasiewicza. Przyjmijmy zatem następujące założenia. Niech $p_1, p_2, \dots p_n, \dots$ będą zdaniami, odnoszącymi się do pewnych jednostkowych, wzajemnie niezależnych zdarzeń przyszłych. Zakładamy, że każde zdanie ma jedną z trzech wartości logicznych. Następująca procedura umożliwia określenie wartości logicznej zdań złożonych.

Niech $\alpha(p_1, p_2, \dots, p_n)$ będzie dowolnym zdaniem złożonym ze zdań prostych $p_1, p_2, \dots, p_n$ przy pomocy klasycznych spójników logicznych. Jeśli zdania $p_1, p_2, \dots, p_n$ mają klasyczne wartości logiczne (0, 1), to wartość α będzie obliczona tak samo, jak w logice klasycznej. Jeśli natomiast pewne zdania $p_{i_1}, \dots, p_{i_k}$ mają wartość 1/2, to postępujemy następująco. Rozpatrujemy mianowicie wszystkie możliwe podstawienia klasycznych wartości logicznych za zdania $p_{i_1}, \dots, p_{i_k}$ (wszystkie możliwe realizacje dziś jeszcze niezdeterminowanych zdarzeń — zauważmy, że potrzebne jest tutaj założenie o wzajemnej niezależności tych zdarzeń) i obliczamy klasycznie wartości zdania α w każdym wypadku. Jeśli rezultat będzie zawsze taki sam (np. zawsze 0), to taka też będzie wartość końcowa zdania α. Jeśli natomiast wyniki będą różne, to przypisujemy zdaniu α wartość trzecią — 1/2.

Zilustrujmy to przykładem. Niech zdanie α będzie zdaniem $(p \vee q) \rightarrow p$. Klasyczne podstawienia pominiemy i rozpatrzymy tylko następujących pięć podstawień: (1) $p = 1/2$ $q = 1$; (2) $p = 1/2$ $q = 0$; (3) $p = 1$ $q = 1/2$; (4) $p = 0$ $q = 1/2$; (5) $p = 1/2$ $q = 1/2$. Dla podstawienia (1) możliwe są dwie «realizacje»: (1a) $p = 1$ $q = 1$ i (1b) $p = 0$ $q = 1$. Łatwo policzyć, że w wypadku (1a) zdanie α ma wartość 1, a w wypadku (1b) — 0. Zatem dla podstawienia (1) $\alpha = 1/2$. Podstawienie (2) rozbija się na (2b) $p = 1$ $q = 0$ i (2b) $p = 0$ $q = 0$, które dają zawsze 1, a więc $\alpha = 1$. Dalej: (3a) $p = 1$ $q = 1$ i (3b) $p = 1$ $q = 0$ i dla obu podstawień $\alpha = 1$. (4a) $p = 0$ $q = 1$, (4b) $p = 0$ $q = 0$. Dla (4a) $\alpha = 0$, dla (4b) $\alpha = 1$, a więc ostatecznie $\alpha = 1/2$. I w ostatnim wypadku (5) łatwo sprawdzić, że skoro formuła α nie jest tautologią ani kontrtautologią logiki klasycznej, to muszą istnieć realizacje, przy których zdanie α będzie prawdziwe, i realizacje, przy których będzie ono fałszywe. Zatem $\alpha = 1/2$. Rezultaty obliczeń można umieścić w tabelce:[3]

p	q	$(p \vee q) \rightarrow p$
1/2	1	1/2
1/2	0	1
1	1/2	1
0	1/2	1/2
1/2	1/2	1/2

Przekonajmy się, że w naszym rachunku znikają trudności, jakimi obciążona jest zwykła logika trójwartościowa. To, że formuły $p \vee \sim p$ i $\sim (p \wedge \sim p)$ pozostaną prawdziwe

[3] Pozostawiam do sprawdzenia Czytelnikowi, że w rachunku Łukasiewicza wyniki podstawień (4) i (5) będą inne — w obu wypadkach wartość logiczna formuły α będzie równa 1.

niezależnie od wartości logicznej zdania p, wynika z ogólniejszego faktu, łatwego do pokazania. Mianowicie, każda tautologia klasycznego rachunku logicznego jest tautologią rachunku skonstruowanego powyżej. Sprawdźmy także, czy zniknął również paradoks implikacji. Jeśli rozpatrzymy zdanie $p \rightarrow q$, to widać, że dla podstawienia $p = 1/2$ $q = 1/2$ całość nie może być prawdziwa, gdyż może się zdarzyć, że p zrealizuje się pozytywnie, a q negatywnie. Inaczej sytuacja wygląda w wypadku formuły $p \rightarrow p$. Gdy p jest nieokreślone, to obie możliwe jego realizacje dają w rezultacie wartość 1, czyli formuła pozostaje tautologią. Paradoks implikacji zatem nie zachodzi.

Powyższe przykłady wskazują jednak na pewną niepokojącą własność tak określonego rachunku logicznego. Nie spełnia on mianowicie warunku ekstensjonalności (w silniejszej wersji), który głosi, że zamiana dowolnego zdania na inne, ale o tej samej wartości logicznej, nie zmienia wartości zdania złożonego. Istotnie, jeśli np. w zdaniu $p \vee \sim p$ — gdzie p ma wartość 1/2 — za p podstawimy jakieś inne zdanie q o tej samej wartości, to całość zmieni swoją wartość z 1 na 1/2. W konsekwencji przestaje także obowiązywać tutaj reguła podstawiania. Zauważmy jednak, że warunek ekstensjonalności można rozumieć słabiej: jako tezę, głoszącą, że dla dowolnej formuły złożonej α wartość logiczna α jest wyznaczona jednoznacznie przez przyporządkowanie wartości logicznych zdaniom prostym wchodzącym w skład α. Tak rozumiany warunek ekstensjonalności — w przeciwieństwie np. do logik modalnych — jest spełniony w przedstawionym tutaj rachunku.

Fakt, że zbiór tautologii omawianego rachunku trójwartościowego pokrywa się ze zbiorem tautologii klasycznych, może sugerować, że rachunek ten jest dość nieciekawy. Staje się on jednak ciekawszy, gdy poszerzymy go o funktory modalne „jest możliwe, że” (M) i „jest konieczne, że” (L). Reguła obliczania wartości logicznych zdań złożonych ulega wtedy następującej modyfikacji: dla danego podstawienia obliczamy osobno wartość logiczną każdej formuły objętej operatorem modalnym, a następnie stosujemy Łukasiewiczowskie matryce charakteryzujące funktory M oraz L. W ten sposób można się przekonać, że obowiązuje tutaj większość znanych praw logiki modalnej: $p \rightarrow Mp$; $Lp \rightarrow p$; $Lp \rightarrow Mp$; $L(p \rightarrow q) \rightarrow (Lp \rightarrow Lq)$. Obowiązuje co prawda krytykowana przez Borkowskiego formuła: $(Mp \wedge Mq) \rightarrow M(p \wedge q)$, ale nie obowiązuje jej podstawienie: $(Mp \wedge M\sim p) \rightarrow M(p \wedge \sim p)$.

Dalsza analiza tak skonstruowanego trójwartościowego, nieekstensjonalnego rachunku modalnego, wykracza poza główne zamierzenie tego artykułu. Do kwestii tej chciałbym jednak powrócić przy innej okazji.

Bibliografia

L. Borkowski

1990 - „W sprawie intuicyjnej interpretacji logiki trójwartościowej Łukasiewicza”, [w:] tegoż, *Studia logiczne*, Towarzystwo Naukowe KUL, Lublin, s. 426-433.

J. Łukasiewicz

1969 - „Uwagi filozoficzne o wielowartościowych systemach rachunku zdań", [w:] tegoż, *Z zagadnień logiki i filozofii*, PWN, Warszawa, s. 144-163.

1994 - „Geneza logiki trójwartościowej", *Filozofia Nauki*, 3-4(7-8), s. 232-240.

M. Nowak

1988 - „O możliwości interpretowania trójwartościowej logiki Łukasiewicza metodą J. Słupeckiego", *Acta Universitatis Lodziensis, Folia Philosophica*, 5, s. 3-13.

J. Słupecki

1964 - „Próba intuicyjnej interpretacji logiki trójwartościowej Łukasiewicza", [w:] *Rozprawy logiczne*, PWN, Warszawa, s. 185-191.