Michał Heller

Osobliwości kosmologiczne i geometria nieprzemienna

Filozofia Nauki 5/3, 5-14

1997

Filozofia Nauki
Rok V, 1997, Nr 3(19)

Michał Heller

Osobliwości kosmologiczne i geometria nieprzemienna

1. Wprowadzenie

Niniejszy artykuł jest dalszym ciągiem artykułu „Początek i koniec wszechświata w zamkniętym modelu Friedmana",[1] który będę krótko nazywać „pierwszym artykułem". Zreferowałem w nim nieoczekiwane wyniki, jakie udało się uzyskać w niemal zamkniętej — tak przynajmniej mogło się wydawać — teorii klasycznych osobliwości w ogólnej teorii względności. Wyniki te zostały uzyskane dzięki wykorzystaniu nowej metody matematycznej (polegającej na zastosowaniu geometrii przestrzeni ustrukturalizowanych). Już po opublikowaniu wspomnianego artykułu udało się uzyskać jeszcze bardziej interesujące wyniki w teorii klasycznych osobliwości. I tym razem było to możliwe dzięki zastosowaniu nowej, jeszcze bardziej radykalnej, metody matematycznej. Metody tej dostarczyła tzw. geometria nieprzemienna (niekomutatywna). Okazało się, że jest ona kolejnym uogólnieniem teorii przestrzeni ustrukturalizowanych. Jej zastosowanie do badania klasycznych osobliwości w ogólnej teorii względności nie tylko pozwoliło głębiej zrozumieć strukturę osobliwości, ale otworzyło także nowe perspektywy w badaniach dotyczących natury grawitacji i czasoprzestrzeni. Co więcej, przestrzenie nieprzemienne okazują się bardzo interesujące z filozoficznego punktu widzenia. Mają one bowiem wiele cech zwykłych przestrzeni, ale na ogół w opisie ich nie pojawiają się pojęcia zakładające możliwość lokalizacji, a więc takie pojęcia, jak pojęcie punktu lub jego otoczeń. Sprawa na pewno wymaga filozoficznego namysłu.

---

[1] *Filozofia Nauki*, 2, 1994, nr 3-4, s. 7-17

2. Paradoksy początku i końca Wszechświata

Zacznijmy od krótkiego przypomnienia treści pierszego artykułu. Matematycznie zadowalające zdefiniowanie osobliwości w ogólnej teorii względności napotyka na poważne trudności. Ich źródłem jest fakt, że w osobliwości załamują się struktury, w jakie wyposażona jest gładka rozmaitość czasoprzestrzenna, a bez pomocy tych struktur nie można wykorzystać do badania osobliwości zwykłych metod geometrycznych. Próbą wyjścia z tej sytuacji jest potraktowanie osobliwości nie jako elementów czasoprzestrzeni, lecz jako elementów jej brzegu. Spośród kilku znanych konstrukcji brzegu czasoprzestrzeni najbardziej elegancka okazała się konstrukcja zaproponowana przez B. Schmidta.[2] Przypomnijmy ją pokrótce.

Niech M będzie czasoprzestrzenią. Konstruujemy wiązkę reperów (czyli lokalnych układów odniesienia) nad czasoprzestrzenią π: $F(M) \to M$, gdzie $F(M)$ jest przestrzenią wszystkich reperów nad M, a π rzutowaniem, przypisującym danemu reperowi jego punkt zaczepienia w czasoprzestrzeni M. Wszystkie repery zaczepione w tym samym punkcie czasoprzestrzeni $x \in M$ tworzą włókno nad x, które oznacza się przez $\pi^{-1}(x)$. Jeden reper przekształca się w drugi reper, należący do tego samego włókna, za pomocą przekształcenia Lorentza. Zbiór wszystkich przekształceń Lorentza tworzy grupę, tzw. grupę Lorentza. Mówimy, że grupa Lorentza L jest grupą strukturalną wiązki reperów nad czasoprzestrzenią M. Okazuje się, że przeniesienie równoległe (koneksja) w M definiuje dodatnio określoną metrykę w $F(M)$. Wykorzystując tę metrykę, konstruujemy uzupełnienie Cauchy'ego $\overline{F(M)}$ przestrzeni $F(M)$. Przestrzeń ilorazowa $\overline{M} = \overline{F(M)}/L$ jest czasoprzestrzenią M, do której został dołączony brzeg $\partial_b M$, zwany *b-brzegiem* lub *brzegiem Schmidta*. Mamy $\overline{M} = M \cup \partial_b M$, przy czym M jest zbiorem gęstym i otwartym w $\overline{M}$. Wszystkie osbliwości danej czasoprzestrzeni M należą do jej b-brzegu $\partial_b M$.

Pamiętamy z pierwszego artykułu, że entuzjazm, z jakim przyjęto konstrukcję Schmidta, załamał się się, gdy okazało się, że osobliwość początkowa i osobliwość końcowa w zamkniętym modelu Friedmana stanowią jedyny (ten sam!) punkt brzegu Schmidta i, co więcej, czasoprzestrzeń zamkniętego modelu ze swoim b-brzegiem nie spełnia aksjomatu Hausdorffa, czyli z topologicznego punktu widzenia cała czasoprzestrzeń z brzegiem redukuje się do jednego punktu![3] Sytuację udało się wyjaśnić dzięki technikom rozwiniętym w tzw. teorii przestrzeni ustrukturalizowanych. Pojęcie przestrzeni ustrukturalizowanej jest znacznym uogólnieniem pojęcia gładkiej rozmaitości. Jak wiadomo, gładką rozmaitość można zdefiniować jako parę $(M, C^\infty(M))$, gdzie $C^\infty(M)$ jest algebrą gładkich funkcji na zbiorze M; natomiast przestrzeń ustrukturalizo-

[2] „A New Definition of Singular Points in General Relativity", *General Relativity and Gravitation*, 1, 1971, s. 269-280.

[3] Por. prace: B. Bosshard, „On the b-Boundary of the Closed Friedman-Model", *Communications of Mathematical Physics* 46, 1976, s. 263-268; R. A. Johnson, „The Bundle Boundary in Some Special Cases", *Journal of Mathematical Physics* 18, 1977, s. 898-902.

waną definiuje się jako parę $(M, \mathcal{C})$, gdzie M jest przestrzenią topologiczną, a $\mathcal{C}$ snopem algebr funkcyjnych określonych na M i z definicji uznanych za gładkie. Żąda się przy tym spełnienia dodatkowego aksjomatu postulującego zamkniętość snopa $\mathcal{C}$ ze względu na składanie funkcji należących do tego snopa z funkcjami euklidesowymi. Aksjomatu tego nie będziemy tu omawiać.[4] Snop $\mathcal{C}$ nazywa się *strukturą różniczkową przestrzeni ustrukturalizowanej.*

Okazało się[5], że czasoprzestrzeń zamkniętego modelu Friedmana z osobliwościami można przedstawić jako przestrzeń ustrukturalizowaną i, co więcej, zabieg ten ujawnia źródło wykrytych uprzednio patologii. Istota problemu polega na tym, że tylko funkcje stałe należące do struktury różniczkowej (czyli do snopa $\mathcal{C}$) czasoprzestrzeni zamkniętego modelu Friedmana da się przedłużyć do b-brzegu tej czasoprzestrzeni (czyli do osobliwości); inne funkcje należące do $\mathcal{C}$ takiego przedłużenia nie mają. I właśnie ten fakt pociąga za sobą zlepianie się osobliwości początkowej i końcowej w zamkniętym modelu Friedmana i inne patologie jego czasoprzestrzeni z b-brzegiem. Ponieważ jednak struktura różniczkowa czasoprzestrzeni tego modelu z b-brzegiem (składająca się tylko z funkcji stałych) jest snopem, możemy zawsze nasze rozważania ograniczyć do «wnętrza» modelu, czyli do czasoprzestrzeni bez jej b-brzegu[6] i wówczas natychmiast w strukturze różniczkowej pojawiają się wszystkie funkcje (nie tylko stałe) zapewniające jej normalne funkcjonowanie (szczegóły por. w pierwszym artykule). Mówiąc obrazowo, wszystko jest w porządku, jak długo pozostajemy we wnętrzu czasoprzestrzeni; gdy tylko «dotykamy» osobliwości (tzn. przedłużamy strukturę różniczkową do brzegu czasoprzestrzeni), natychmiast występują patologie. To właśnie ta cecha modelu skłoniła mnie (w pierwszym artykule) do zaproponowania następującej, dydaktycznej jedynie, interpretacji: Załóżmy, że Demiurg stwarza świat według zamkniętego modelu Friedmana. Stwarzając, musi niejako dotykać osobliwości początkowej. A zatem z jego punktu widzenia początek świata (osobliwość początkowa) i koniec świata (osobliwość końcowa) są tym samym zdarzeniem, historia kosmiczna nie dzieje się, wszystko zlepia się do jednego punktu (cała historia dzieje się w jednym «teraz»). Ale z punktu widzenia ziemskiego obserwatora, który nie «dotyka» osobliwości, czas płynie, historia dzieje się, a początek świata i jego koniec są dwoma różnymi, lecz całkowicie niedostępnymi, punktami brzegu czasoprzestrzeni.

Czy wszakże niedostępność początkowej osobliwości jest rzeczywiście ostateczną cechą modelu kosmologicznego, czy — mimo wszystko — następstwem ciągle jeszcze zbyt «grubej» metody badania? Teoria przestrzeni ustrukturalizowanych jest ogólniejsza od tradycyjnych metod geometrii różniczkowej, ale być może jest jeszcze ciągle

[4] Teoria przestrzeni ustrukturalizowanych została zaproponowana w pracy: M. Heller, W. Sasin, „Structured Spaces and Their Application to Relativistic Physics", *Journal of Mathematical Physics* 36, 1995, s. 3644-3662.

[5] Tamże; por. również: M. Heller, W. Sasin, "Sheaves of Einstein Algebras", *International Journal of Theoretical Physics* 34, 1995, s. 387-398.

[6] Czasoprzestrzeń bez b-brzegu jest otwartym podzbiorem czasoprzestrzeni z b-brzegiem.

zbyt mało ogólna, by poradzić sobie ze «złośliwą» strukturą osobliwości kosmologicznych. I tu właśnie pojawiła się myśl, by do badania osobliwości zastosować metody geometrii nieprzemiennej.

3. Metody geometrii nieprzemiennej

Idea nieprzemienności najpierw ujawniła swoją skuteczność w mechanice kwantowej. Jak wiadomo, wielkości obserwowalne (obserwable) w matematycznej strukturze mechaniki kwantowej są reprezentowane przez operatory działające na przestrzeni Hilberta. Operatory te można «mnożyć» przez siebie, ale mnożenie to jest nieprzemienne (to znaczy jeżeli $\hat{A}$ i $\hat{B}$ są operatorami na przestrzeni Hilberta, to $\hat{A} \cdot \hat{B} \neq \hat{B} \cdot \hat{A}$). Co więcej, operatory te tworzą algebrę i algebra ta ma tak ważne i interesujące własności, że matematycy uznali za stosowne zdefiniować abstrakcyjną algebrę (niekoniecznie operatorów na przestrzeni Hilberta), zwaną C^*-algebrą (czytaj: algebrą C z gwiazdką), która własności te formalizuje. Okazało się także, że C^*-algebry mają ważne znaczenie dla wielu działów czystej matematyki. Geometria nieprzemienna jest naturalnym uogólnieniem teorii przestrzeni ustrukturalizowanych (choć historycznie powstała na innej drodze). Wystarczy tylko zamiast snopa $\mathcal{C}$ algebr funkcyjnych rozważać jakąś C^*-algebrę (nieprzemienną).[7] Okazuje się, że przy takim zastąpieniu wiele pojęć o fundamentalnym znaczeniu dla geometrii różniczkowej daje się uogólnić (choć niekiedy na kilka sposobów) do tego stopnia, że można mówić o *nieprzemiennej geometrii różniczkowej*. W ostatnich latach ta dziedzina matematyki rozwija się dynamicznie i znajduje coraz to nowe zastosowania w fizyce teoretycznej. Jest to głównie zasługą szkoły francuskiej pod kierunkiem Alaina Connesa.[8]

Charakterystyczną cechą geometrii nieprzemiennej jest to, że nadaje się ona do opisywania rozmaitych sytuacji, które z punktu widzenia tradycyjnej geometrii muszą być uznane za sytuacje patologiczne, m.in. do takich sytuacji, w których naruszony jest warunek Hausdorffa. Jest rzeczą zrozumiałą, że przy tak daleko idącym uogólnieniu niektóre klasyczne pojęcia ulegają załamaniu. Do najważniejszych tego rodzaju pojęć należą pojęcia związane z lokalizacją. I tak klasyczne pojęcia punktu, otoczenia punktu i inne pojęcia pochodne nie mają swoich jednoznacznych odpowiedników w geometrii nieprzemiennej. Sytuację tę analizowałem przy innej okazji[9]; obecnie będzie mnie interesować bardziej szczegółowy przypadek dotyczący czasoprzestrzeni relatywistycznych z osobliwościami.

---

[7] Można także, jeszcze bardziej ogólnie, rozważać jakąkolwiek łączną algebrę nieprzemienną. W tym artykule ograniczę się jednak wyłącznie do C^*-algebr.

[8] Najbardziej znanym jego dziełem z tej dziedziny jest: *Noncommutative Geometry*, Academic Press, New York, 1995. Por. również: J. Madore, *Noncommutative Differential Geometry and Its Physical Applications*, Cambridge University Press, Cambridge, 1995.

[9] Por. J. Demaret, M. Heller, D. Lambert, „Local and Global Properties of the World", *Foundations of Science* 2, 1997, s. 137-176.

4. Konstrukcja nieprzemiennej geometrii czasoprzestrzeni z osobliwościami

Problem jest następujący: Niech będzie dana czasoprzestrzeń M jakiegoś relatywistycznego modelu z jej b-brzegiem $\partial_b M$. Jak wiemy, przestrzeń $\overline{M} = M \cup \partial_b M$ nie jest rozmaitością, ale można ją przedstawić jako przestrzeń ustrukturalizowaną. Czy można ją również opisać jako przestrzeń nieprzemienną? Otóż istnieje uniwersalna metoda konstruowania takiej nieprzemiennej przestrzeni.[10] Co więcej, w wypadku modeli relatywistycznych z osobliwościami metoda ta bezpośrednio nawiązuje do metody Schmidta konstruowania b-brzegu. Problem sprowadza się do tego, by nieco inaczej spojrzeć na uzupełnioną (w sensie Cauchy'ego) wiązkę reperów $\overline{F(M)}$ nad czasoprzestrzenią M.[11]

Zapomnijmy, że elementami przestrzeni $\overline{F(M)}$ są repery nad czasoprzestrzenią czyli lokalne układy odniesienia (i uogólnione repery we włóknach nad osobliwościami), rozważmy natomiast transformacje Lorentza, które przeprowadzają jeden reper w drugi (oczywiście w tym samym włóknie), czyli dwom reperom p i q odpowiada transformacja Lorentza γ przeprowadzająca reper p w reper q. Taką transformację od p do q wygodnie jest wyobrażać sobie jako strzałkę prowadzącą od p do q. W dalszym ciągu będziemy chętnie korzystać z tego wyobrażenia. Zbiór wszystkich tego rodzaju transformacji (strzałek) ma algebraiczną strukturę *grupoidu*. Po dokładną definicję grupoidu należy sięgnąć do oryginalnych prac matematycznych[12]; dla naszych celów wystarczy uświadomić sobie, że grupoid tym różni się od grupy, że działanie składania (mnożenia) elementów wykonalne jest tylko dla pewnych podzbiorów. W naszym wypadku przez złożenie strzałki od p do q i strzałki od q do r będziemy rozumieć strzałkę od p do r. Złożenie takie jest wykonalne oczywiście tylko w obrębie jednego włókna, tzn. nie da się złożyć strzałek należących do dwu różnych włókien. Tak skonstruowany grupoid będziemy oznaczać przez G.

Rozważmy teraz zbiór wszystkich strzałek, które kończą się na reperze q, czyli zbiór takich wszystkich transformacji Lorentza, które od jakiegokolwiek reperu (w danym włóknie) prowadzą do reperu q. Zbiór ten będziemy oznaczać przez G_q. Łatwo udowodnić, że zbiór ten pokrywa się z całą grupą Lorentza, a co za tym idzie ma on strukturę gładkiej rozmaitości. Pozostaje to w mocy nawet wówczas, gdy reper q jest jedynym uogólnionym reperem w zdegenerowanym włóknie nad osobliwością początkową lub końcową zamkniętego modelu Friedmana. (To samo dotyczy zbioru G^p wszystkich strzałek, które zaczynają się na reperze p.) Fakt ten ma kluczowe znaczenie w dalszej analizie struktury osobliwości; to on właśnie z osobliwości czyni obiekty

[10] Por. A. Connes, dz. cyt., s. 99 i nast.

[11] W dalszym ciągu referuję wyniki pracy: M. Heller, W. Sasin, „Noncommutative Structure of Singularities in General Relativity", *Journal of Mathematical Physics*, 37, 1996, s. 5665-5671.

[12] Np. J. Renault, *A Groupoid Approach to C*-Algebras*, Lecture Notes in Mathematics, No. 725, P. de la Harpe (red.), Springer, Berlin 1979, s. 114-116.

dające się badać. W związku z tym można nawet mówić o zabiegu *desyngularyzacji* modelu.

Jednakże proces konstruowania nieprzemiennej przestrzeni obejmującej osobliwości relatywistyczne nie został jeszcze zakończony. W celu jego dopełnienia należy uczynić następny krok. Skonstruujmy mianowicie nad grupoidem G pewną nową wiązkę. Nie będziemy tu wnikać w szczegóły konstrukcji tej wiązki;[13] wystarczy pamiętać, że jest to wiązka liniowa, tzn. jej włókna są przestrzeniami jednowymiarowymi, i trywialna, tzn. ma ona strukturę iloczynu kartezjańskiego. Wiązkę tę oznaczmy przez $\Omega^{1/2}$.[14] Jeżeli pamiętamy, że grupoid G jest w istocie wiązką włóknistą reperów nad czasoprzestrzenią $\overline{M}$ z osobliwościami, to wiązka $\Omega^{1/2}$ jest już «drugim piętrem» (wiązką nad wiązką) nadbudowanym nad czasoprzestrzenią $\overline{M}$ z osobliwościami. Ponieważ wiązka $\Omega^{1/2}$ jest wiązką trywialną (a więc o szczególnie prostej strukturze), prowadzi ona dalej proces desyngularyzacji przestrzeni $\overline{M}$ (czyli czasoprzestrzeni z osobliwościami). Jest to często spotykana prawidłowość w matematyce: kolejne «wiązki nad wiązkami» mają coraz prostszą strukturę, aż wreszcie kolejna wiązka musi być trywialna.

I wreszcie ostani krok. Rozważmy zbiór wszystkich cięć wiązki $\Omega^{1/2}$ i oznaczmy go przez $\mathrm{Sec}(\Omega^{1/2})$. Cięcia te można mnożyć przez liczby zespolone, dodawać, a także mnożyć przez siebie, ale pod warunkiem, że mnożenie zdefiniuje się specjalnym wzorem (całkowym), zwanym w matematyce *konwolucją*; jest to mnożenie *nieprzemienne*. A więc zbiór $\mathrm{Sec}(\Omega^{1/2})$ cięć wiązki $\Omega^{1/2}$ jest *algebrą nieprzemienną*. Geometria wyznaczona przez tę algebrę będzie służyć za podstawę do zdefiniowania nieprzemiennej przestrzeni, która modelowałaby czasoprzestrzeń z osobliwościami. Aby to ostatecznie osiągnąć, trzeba zagwarantować, by algebra $\mathrm{Sec}(\Omega^{1/2})$ była C^*-algebrą (gdyż *a priori* nie musi nią być). W tym celu należy odwołać się do pojęcia reprezentacji algebry.

Po dokładną definicję reprezentacji należy sięgnąć do jakiegokolwiek podręcznika współczesnej algebry; dla naszych celów wystarczy pamiętać, że *reprezentacją* danej algebry $\mathbf{A}$ jest takie odwzorowanie algebry $\mathbf{A}$ w inną przestrzeń, (*scil.* przestrzeń reprezentacji), że zachowuje ono istotne cechy tej algebry (a więc dodawanie i mnożenie jej elementów przez siebie oraz mnożenie przez skalary). Często wygodniej jest badać przestrzeń reprezentacji niż samą algebrę $\mathbf{A}$. I tak jest w naszym wypadku.

Najpierw rozważmy zbiór G_q wszystkich strzałek, które kończą się na reperze q. Jak pamiętamy, zbiór ten jest gładką rozmaitością. Istnieje znana technika definiowania na rozmaitości funkcji, które tworzą przestrzeń Hilberta (tzw. funkcji całkowalnych z kwadratem). Oznaczmy tę przestrzeń przez $L^2(G_q)$ lub krócej przez $\mathfrak{H}$, a przestrzeń wszystkich (ograniczonych) operatorów działających na przestrzeni Hilberta $\mathfrak{H} = L^2(G_q)$

[13] Szczegóły te można znaleźć w IV rozdziale pracy cytowanej w przypisie 11.

[14] Symbol ten przypomina, że jest to wiązka pół-gęstości.

oznaczmy przez $\mathcal{B}(\mathfrak{H})$. Definiujemy teraz reprezentację naszej nieprzemiennej algebry $\mathrm{Sec}(\Omega^{1/2})$ w przestrzeni $\mathcal{B}(\mathfrak{H})$ jako odwzorowanie:

$$\pi_q : \mathrm{Sec}(\Omega^{1/2}) \to \mathcal{B}(\mathfrak{H}).$$

Oczywiście odwzorowanie to jest określone konkretnym wzorem, który tu pomijamy.[15] Zauważmy, że właściwie mamy tu wiele reprezentacji algebry $\mathrm{Sec}(\Omega^{1/2})$: po jednej reprezentacji dla każdego reperu q.

Teraz zamiast algebrą $\mathrm{Sec}(\Omega^{1/2})$ możemy się posługiwać przestrzenią $\pi_q(\mathrm{Sec}(\Omega^{1/2})) \subset \mathcal{B}(\mathfrak{H})$ czyli podalgebrą operatorów działających na przestrzeni Hilberta $\mathfrak{H} = L^2(G_q)$. Jak pamiętamy, to właśnie zbiór operatorów działających na przestrzeni Hilberta był punktem wyjścia do zdefiniowania C^*-algebr i jeżeli taki zbiór nie jest jeszcze C^*-algebrą, to doskonale wiadomo jak go uzupełnić do C^*-algebry. Uzupełnienie to stosujemy w naszym wypadku i otrzymujemy nieprzemienną C^*-algebrę operatorów działających na przestrzeni Hilberta $\mathfrak{H}$ jako reprezentację nieprzemiennej algebry $\mathrm{Sec}(\Omega^{1/2})$. Właśnie ta C^*-algebra definiuje nieprzemienną geometrię czasoprzestrzeni z osobliwościami.

5. Nieprzemienna struktura osobliwości

Algebry — czy to przemienne, czy nieprzemienne — są na ogół zbyt abstrakcyjnymi strukturami, by dało się na nich wykonywać konkretne rachunki. Do tego celu można się posłużyć reprezentacjami algebr. Jak pamiętamy, reprezentacja jest to (liniowe) odwzorowanie danej algebry — zachowujące istotne cechy algebry — w pewną inną przestrzeń (np. wektorową). Posługując się tą drugą przestrzenią (jeżeli została ona odpowiednio dobrana), można skuteczniej wykonywać potrzebne rachunki.

Okazuje się, że w rozważanym przez nas wypadku zawsze istnieje rodzina szczególnie wygodnych reprezentacji algebry $\mathrm{Sec}(\Omega^{1/2})$,[16] a mianowicie dla każdego reperu q,[17] istnieje odwzorowanie

$$\pi_q : \mathrm{Sec}(\Omega^{1/2}) \to \mathcal{B}(L^2(G_q))$$

przestrzeni $\mathrm{Sec}(\Omega^{1/2})$ w przestrzeń (ograniczonych operatorów) $\mathcal{B}(L^2(G_q))$, działających na elementy przestrzeni $L^2(G_q)$. Ta ostatnia przestrzeń wymaga objaśnienia. Ze zbiorem G_q spotkaliśmy się powyżej; pamiętamy, że jest to zbiór wszystkich strzałek kończących się w q. Wiemy także, że G_q jest zawsze gładką rozmaitością. Możemy więc na niej określić «dobrze zachowujące się» funkcje. Wśród tego rodzaju funkcji szczególne znaczenie mają tzw. funkcje całkowalne z kwadratem (są one m.in. dobrze znane z elementarnego kursu mechaniki kwantowej). To właśnie przestrzeń funkcji całkowalnych z kwadratem określonych na G_q oznaczyliśmy przez $L^2(G_q)$. Szczególnie sympatyczną okolicznością jest to, że zbiór $L^2(G_q)$ okazuje się przestrzenią Hilberta.

[15] Por. twierdzenie 4.1 w pracy cytowanej w przypisie 11.

[16] Por. A. Connes, dz. cyt., s. 102.

[17] Ściśle rzecz biorąc, reper q traktujemy tu jako element grupoidu G, tzn. jako strzałkę zaczynającą się i kończącą w q (czyli jako pętlę).

Każda więc reprezentacja π_q algebry Sec($\Omega^{1/2}$) odwzorowuje tę algebrę w rodzinę operatorów działających na przestrzeni Hilberta $L^2(G_q)$. Mówimy, że została w ten sposób określona reprezentacja algebry Sec($\Omega^{1/2}$) na przestrzeni Hilberta $L^2(G_q)$.[18] Konkretna postać reprezentacji π_q jest dana przez dosyć skomplikowany wzór całkowy, którego nie będziemy tu przytaczać.

Własności operatorów działających na przestrzeni Hilberta zostały bardzo dobrze zbadane. Wystarczy uświadomić sobie, że operatory takie w mechanice kwantowej przedstawiają własności obserwowalne (obserwable), a matematyczna struktura mechaniki kwantowej stanowi przedmiot żywych zainteresowań fizyków i matematyków od kilkudziesięciu lat.

Ale wróćmy do naszego przypadku. Mamy zatem dla każdego reperu q reprezentację π_q nieprzemiennej algebry Sec($\Omega^{1/2}$) na dobrze znanej przestrzeni. Gdy q jest reperem w dowolnym regularnym (nieosobliwym) punkcie czasoprzestrzeni, posługiwanie się reprezentacją π_q nie wnosi niczego nowego. W takim wypadku reper q jest znacznie prostszą konstrukcją matematyczną niż reprezentacja π_q i w ogóle nie widać potrzeby posługiwania się w takiej sytuacji reprezentacją π_q. Rzecz jednak ulega drastycznej zmianie, gdy q należy do «włókna osobliwego». Wówczas, jak wiadomo, natychmiast pojawiają się trudności ze zdefiniowaniem osobliwości i pojęcie *reperu nad osobliwością* traci sens, ale przestrzeń G_q jest nadal dobrze określona (zachowując strukturę gładkiej rozmaitości) i reprezentacja π_q nie tylko dobrze funkcjonuje, ale jest jedynym sposobem «zajrzenia» do struktury osobliwości.

Strategia ta funkcjonuje dobrze nawet wówczas, gdy mamy do czynienia z osobliwościami złośliwymi, np. w zamkniętym modelu Friedmana. Wówczas dla osobliwości początkowej i końcowej mamy dwie różne «przestrzenie pętli», nazwijmy je G_{q_1} i G_{q_2}, i dwie różne reprezentacje nieprzemiennej algebry Sec($\Omega^{1/2}$), a mianowicie reprezentację π_{q_1} i reprezentację π_{q_2}. Osobliwość początkowa i końcowa nie zlepiają się w jeden punkt brzegu osobliwego, lecz są opisywane przez dwie różne struktury matematyczne. Zwróćmy jednak uwagę, że ponieważ mamy tu do czynienia z reprezentacjami *algebry nieprzemiennej*, struktury te nie odpowiadają punktom. Nie możemy więc mówić o punkatch osobliwych. Osobliwości są *własnością globalną* modeli kosmologicznych; usiłowanie ich «umiejscowienia» jest zabiegiem bezsensownym.

6. Klasyczne osobliwości a kwantowa teoria grawitacji

Czasem tak bywa, że uboczny produkt jakiejś pracy może okazać się bardziej interesujący niż zamierzony cel podjętego badania. Kto wie, czy nie ma to miejsca w omawianym wypadku. Zamierzonym celem referowanych przeze mnie badań było rozwiązanie problemu klasycznej osobliwości w kosmologii relatywistycznej, ale w

[18] Choć ściśle rzecz biorąc π_q odwzorowuje algebrę Sec($\Omega^{1/2}$) nie w przestrzeń Hilberta $L^2(G_q)$, lecz w przestrzeń $B(L^2(G_q))$ operatorów działających na przestrzeni Hilberta $L^2(G_q)$.

trakcie pracy zupełnie nieoczekiwanie okazało się, że klasyczne osobliwości zdają się coś «wiedzieć» na temat kwantowych efektów grawitacji. W ten bowiem sposób można zinterpretować fakt, że osobliwości, które pojawiły się na gruncie ogólnej teorii względności, a więc klasycznej (niekwantowej) teorii grawitacji, są modelowane przez typowo kwantowo-mechaniczną strukturę, jaką jest rodzina (ograniczonych) operatorów na przestrzeni Hilberta. Co więcej, wydaje się, że związki struktury osobliwości z matematyką stosowaną w mechanice kwantowej sięgają jeszcze dalej.

Jak wiadomo, istnieje bardzo eleganckie (i nieco ogólniejsze od standardowego) ujęcie mechaniki kwantowej, a mianowicie ujęcie jej przy pomocy C^*-algebry. W tradycyjnym ujęciu przestrzenią fazową mechaniki kwantowej jest przestrzeń Hilberta $\mathfrak{H}$, a wielkości obserwowalne (obserwable) są elementami rodziny $\mathcal{B}(\mathfrak{H})$ (ograniczonych) operatorów działających na przestrzeni Hilberta $\mathfrak{H}$. Ale ponieważ obserwable odgrywają fundamentalną rolę w mechanice kwantowej, wydaje się naturalne, by za podstawową strukturę matematyczną mechaniki kwantowej uznać coś, co odpowiadałoby rodzinie obserwabli. Okazuje się, że matematycy taką strukturę znają od dość dawna (pojawia się ona w teorii przestrzeni Banacha) i, co więcej, rodzina $\mathcal{B}(\mathfrak{H})$ jest szczególnym (ale w pewnym sensie typowym) przypadkiem tej struktury; struktura ta nazywa się *C^*-algebrą*. Taką C^*-algebrę można uznać za podstawową strukturę mechaniki kwantowej; będzie to wówczas algebra obserwabli (elementami C^*-algebry są obserwable); natomiast przestrzeń fazową mechaniki kwantowej odzyskuje się jako przestrzeń funkcjonałów liniowych (dodatnich i odpowiednio unormowanych) na danej C^*-algebrze.

Warto wreszcie przypomnieć, że w wypadku zwykłej mechaniki kwantowej, czyli dla układów o skończonej liczbie stopni swobody, ujęcia przy pomocy przestrzeni Hilberta i przy pomocy C^*-algebry są równoważne. Ale ujęcie przy pomocy przestrzeni Hilberta nie nadaje się do opisu układów kwantowych o nieskończonej liczbie stopni swobody (czyli do kwantowej teorii pola), natomiast ujęcie przy pomocy C^*-algebry i w tym wypadku «pracuje» poprawnie.

Wróćmy jednak do naszego końcowego wyniku. Czasoprzestrzeń modelu kosmologicznego z osobliwościami można opisać przy pomocy C^*-algebry. Ponieważ jest to algebra nieprzemienna, traci się w tym opisie informację o punktach czasoprzestrzeni. Jest to cena, jaką trzeba zapłacić za możliwość analizowania struktury osobliwości. Ale nie jest to cena wygórowana. Możemy przecież zawsze ograniczyć C^*-algebrę $\mathrm{Sec}(\Omega^{1/2})$ tylko do regularnych (nieosobliwych) obszarów czasoprzestrzeni. Tak ograniczona algebra jest równoważna w sensie Mority[19] algebrze funkcji gładkich na czasoprzestrzeni, a ta ostatnia jest z kolei równoważna zwykłej geometrii na rozmaitości.

Jest to argument przemawiający za spójnością naszego modelu: w zawężeniu do regularnych obszarów czasoprzestrzeni model daje to, co dawać powinien. Ale jego

---

[19] Równoważność w sensie Mority odgrywa rolę izomorfizmu w teorii algebr nieprzemiennych.

atrakcyjność polega na większej ogólności: okazuje się, że czasoprzestrzeń z osobliwościami jest przestrzenią nieprzemienną, którą można badać metodami geometrii nieprzemiennej. Cel zamierzony na początku pracy został osiągnięty. Ale to, że osobliwości ulegają metodom matematycznym stosowanym w fizyce kwantowej, jest niespodzianką. Skąd klasyczne osobliwości «wiedzą» o kwantowej naturze świata? A może klasyczne osobliwości nie są wcale tak bardzo klasyczne? Niewykluczone, że w tej niespodziance tkwi informacja, którą warto by rozszyfrować. Będzie to zapewne tematem następnych prac.[20]

[20]Pierwsza praca, prowadząca w tym kierunku, już się ukazała; por. M. Heller, W. Sasin, „Groupoid Approach to Noncommutative Quantization of Gravity", *Journal of Mathematical Physics* 38, 1997, s. 5840-5853 (prrzypis dodany w korekcie).