Jan Łukasiewicz

Z "Elementów logistyki"

Filozofia Nauki 6/3/4, 179-206

1998

Filozofia Nauki
Rok VI, 1998, Nr 3-4 (23-24)

ARCHIWUM

Jan Łukasiewicz

Z Elementów logistyki

W latach 1946–1947 w Dublinie Jan Łukasiewicz przygotowywał dla wydawnictwa Les Presses Universitaires podręcznik Elementy logistyki. *O przygotowywaniach tych wspomina sam autor w liście z 29 marca 1946 roku do o. Józefa M. Bocheńskiego. Podręcznik ten, później nazywany* Elementami logiki matematycznej, *miał zawierać – jak wynika z listu Łukasiewicza z 24 czerwca i 4 września 1946 roku do o. Bocheńskiego – następujące rozdziały:*

I. „Wstęp"
II. „Rachunek zdań"
III. „Dowód zupełności i niesprzeczności rachunku zdań"
IV. „Teoria kwantyfikatorów"
V. „Teoria predykatów z teorią tożsamości"
VI. „Sylogistyka Arystotelesa"
VII. „Zastosowania logiki do teorii liczb naturalnych"

a także rozdział „Logiki wielowartościowe" (zob. list z 27 kwietnia 1947 roku do o. Bocheńskiego). Rozdział VI rozrósł się następnie do wielkiej monografii Sylogistyka Arystotelesa z punktu widzenia współczesnej logiki formalnej *(I wyd. ang., Oxford 1951).*

Nie wiadomo, czy tekst całego podręcznika został ukończony; niejasny – jeśli nie wręcz zagadkowy – jest w ogóle los większości manuskryptów, które pozostawił po sobie Łukasiewicz w mieszkaniu w Dublinie. Z pewnych informacji, jakie udało się nam uzyskać, wynika, że do 29 kwietnia 1963 roku znajdowały sie one w Strong Room w Royal Irish Academy, a następnie zostały przekazane do Manchester University.

W każdym razie trzy fragmenty Elementów *znajdują się w Archiwum Uniwersytetu Warszawskiego, przekazane tam niedawno przez P. Halinę Rajewską, kuzynkę Reginy z Barwińskich Łukasiewiczowej.*

Publikujemy niżej te trzy fragmenty. Wejdą one do przygotowywanego przez Jacka J. Jadackiego tomu pism Łukasiewicza Logika i metafizyka.

Redakcja

I. O SYSTEMIE IMPLIKACYJNYM[1]

1. SYSTEMEM IMPLIKACYJNYM nazywa się ta część dwuwartościowej teorii dedukcji, w której jako jedyny funktor występuje znak implikacji „*C*". Tezami systemu są wszystkie wyrażenia sensowne systemu, sprawdzone przez zamieszczoną obok matrycę, przy czym elementem wyróżnionym jest 1.

C	0	1
0	1	1
1	0	1

Zbiór tez implikacyjnych jest zamknięty ze względu na reguły podstawiania i odrywania. Zbiór ten jest nadto NASYCONY, czyli nie może być rozszerzony bez sprzeczności.[2] Innymi słowy, jeśli dodamy do tego zbioru jakiekolwiek wyrażenie niesprawdzone przez matrycę, to otrzymamy zbiór wszystkich wyrażeń sensownych.

Aksjomatyzowalność systemu implikacyjnego stwierdził w pracy, wydanej wspólnie ze mną w r. 1930, Alfred TARSKI.[3] Dowód jego nie został jednak ogłoszony drukiem, i nie pamiętam już dzisiaj, na jakiej opierał się idei. Inny dowód aksjomatyzowalności systemu, pierwszy i jak się zdaje jedyny ogłoszony drukiem, podał w r. 1936 Mordchaj WAJSBERG.[4] Idea dowodu jego jest następująca. Autor wykazuje naprzód, że z przedłożonego zupełnego układu aksjomatów można wyprowadzić wszystkie tezy, zawierające zmienne JEDNEGO tylko kształtu, i dowodzi następnie, że jeśli z układu wynikają wszystkie tezy, zawierające zmienne k różnych kształtów, to wynikają z niego i wszystkie tezy, zawierające $k+1$ różnych kształtów.

Dowód aksjomatyzowalności, przedstawiony niżej przeze mnie, tym się różni redakcyjnie od dotychczasowych tzw. «dowodów zupełności», że nie przyjmuję w nim za punkt wyjścia gotowego już układu aksjomatów, lecz przygotowuję dopiero utworzenie takiego układu, zakładając pewną liczbę tez, sprawdzonych matrycowo. Idea dowodu jest następująca. Wprowadzam pojęcie wyrażenia elementarnego i wykazuję, że każde wyrażenie sensowne systemu, nie będące zmienną ani wyraże-

[1] Rękopis ten oznaczony jest – na pierwszej stronie u góry – jako PRACA NR 1, i obejmuje 14 ponumerowanych stron [JJJ].

[2] Wprowadzam termin „nasycony" zamiast dotychczas używanego a wieloznacznego terminy „zupełny".

[3] J. ŁUKASIEWICZ i A. TARSKI, „Badania nad rachunkiem zdań. Untersuchungen über den Aussagenkalkül", *Sprawozdania z posiedzeń Towarzystwa Naukowego Warszawskiego,* XXIII. 1930, Wydział III, s. 43. Na stronicy tej w twierdzeniu 29 podany jest układ aksjomatów systemu implikacyjnego, znany później jako układ „TARSKI–BERNAYS", i w konsekwencji stwierdzona jest aksjomatyzowalność systemu. Por. także przypisek.

[4] M. WAJSBERG, „Metalogische Beiträge", *Wiadomości Matematyczne,* t. XLIII, Warszawa 1936, s. 154–157. Dowód zawiera się w §4 pt. „Allgemaines Schema eines Vollständigkeitsbeweises für Axiomensysteme des *C*-Kalküls". Por. także przypisek.

niem elementarnym, można sprowadzić równoważnie na podstawie niewielkiej liczby tez i przy pomocy skończonej liczby kroków dowodowych, tj. podstawień i oderwań, do zbioru wyrażeń elementarnych. Wykazuję następnie, że każde wyrażenie elementarne, sprawdzone przez matrycę, można wyprowadzić z niewielkiej liczby tez przy pomocy skończonej liczby kroków dowodowych. Liczba tez, potrzebnych do dowodu, wynosi 12. Nie są one wszystkie od siebie niezależne, nie tworzą więc niezależnego układu aksjomatów, ale dają podkład aksjomatyczny systemu, ułatwiający utworzenie aksjomatyki niezależnej.

2. Dowód aksjomatyzowalności rozpoczynam od utworzenia dwóch pęków tez pomocniczych. Stwierdzam przede wszystkim, że każde wyrażenie sensowne systemu implikacyjnego, nie będące zmienną, można przedstawić w postaci:

$$C\varepsilon_1 C\varepsilon_2 \ldots C\varepsilon_n \sigma$$

przy czym $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ są to dowolne wyrażenia sensowne systemu, n jest liczbą naturalną, w wypadku granicznym równą 1, a σ jest zmienną. Wyrażenia $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ będę nazywał pierwszym, drugim, ..., n-tym poprzednikiem końcowego następnika σ.

Zakładam naprzód dwie najprostsze tezy systemu implikacyjnego – prawo tożsamości T_1 i prawo symplifikacji T_2:

T_1 Cpp

T_2 $CpCqp$

Z praw tych otrzymujemy przez podstawianie i odrywanie pęk tez następujących:

$T_2\ p/Cpp,\ q/q_1 \times Ct_1 - T_{1.1}$

$T_{1.1}$ Cq_1Cpp

$T_2\ p/Cq_1Cpp,\ q/q_2 \times CT_{1.1} - T_{1.2}$

$T_{1.2}$ Cq_2q_1Cpp

$T_2\ p/Cq_2Cq_1Cpp,\ q/q_3 \times CT_{1.2} - T_{1.3}$

$T_{1.3}$ $Cq_3Cq_2Cq_1Cpp$

....

$T_2\ p/Cq_{n-1} \ldots Cq_2Cq_1Cpp,\ q/q_4 \times CT_{1.(n-1)} - \mathrm{T}_{1.n}$

$T_{1.n}$ $Cq_nCq_{n-1}, \ldots Cpp$

Budowa tych tez jest zupełnie przejrzysta: dzięki prawu symplifkacji możemy do prawa tożsamości dołączać kolejno coraz to nowe poprzedniki: $q_1, q_2, q_3, \ldots q_{n-1}, q_n$.

Zakładam dalej prawo komutacji T_3 i prawo sylogizmu w drugiej postaci T_4:

T_3 $CCpCqrCqCpr$

T_4 $CCqrCCpqCpr$

Z praw tych otrzymujemy przez podstawianie i odrywanie drugi pęk tez:

$T_4\ q/CpCqr,\ r/CqCpr,\ p/s_1 \times CT_3 - T_{3.1}$

$T_{3.1}$ $CCs_1CpCqrCs_1CqCpr$

$T_4\ q/Cs_1CpCqr,\ r/Cs_1CqCpr,\ p/s_2 \times Ct_{3.1} - T_{3.2}$

$\mathrm{T}_{3.2}$ $CCs_2Cs_1CpCqrCs_2Cs_1CqCpr$

$T_4\ q/Cs_2Cs_1CpCqr,\ r/Cs_2Cs_1CqCpr,\ p/s_3 \times CT_{3.2} - T_{3.3}$

$T_{3.3}$ $CCs_3Cs_2Cs_1CpCqrCs_3Cs_2Cs_1CqCpr$

....

T_4 $q/Cs_{n-1} \ldots Cs_2Cs_1CpCqr$, $r/Cs_{n-1} \ldots$
Cs_2Cs_1CqCpr, $p/S_n \times Ct_{3.(n-1)} - T_{3n}$

$T_{3.n}$ $CCs_nCs_{n-1} \ldots Cs_2Cs_1CpCqrCs_nCs_{n-1} \ldots Cs_2Cs_1CqCpr$

I tutaj budowa tez jest zupełnie przejrzysta: dzięki prawu sylogizmu możemy jednocześnie do poprzednika i do następnika prawa komutacji dołączać kolejno coraz to nowe poprzedniki: s_1, s_2, s_3, ..., s_{n-1}, s_n.

PRAWO KOMUTACJI I TEZY DRUGIEGO PĘKU POZWALAJĄ NAM W WYRAŻENIACH KSZTAŁTU $C\varepsilon_1C\varepsilon_2 \ldots C\varepsilon_n\sigma$ PRZESUNĄĆ RÓWNOWAŻNIE POPRZEDNIKI ε_1, ε_2, ..., ε_n O DOWOLNĄ ILOŚĆ MIEJSC NA PRAWO LUB NA LEWO. Jak to się robi, wyjaśnię wprzód na przykładzie.

W tezie $T_{1.3}$ czwartym z kolei poprzednikiem jest p. Przesuńmy ten poprzednik na lewo na miejsce trzecie, drugie i pierwsze. Zaczniemy od tezy $T_{3.2}$, bo w poprzedniku tej tezy zmienna q, za którą podstawiamy p, jest właśnie czwartym z kolei poprzednikiem, w następniku zaś trzecim. Otrzymujemy przez podstawianie i odrywanie:

$T_{3.2}$ s_2/q_3, s_1/q_2, p/q_1, q/p, $r/p \times CT_{1.3}-\mathrm{I}$

I $Cq_3Cq_2CpCq_1p$

W wyrażeniu tym poprzednik p znajduje się na trzecim miejscu. Zastosujemy więc do tego wyrażenia tezę $T_{3.1}$, bo w poprzedniku tej tezy zmienna q, za którą podstawimy p, jest trzecim z kolei poprzednikiem, w następniku zaś drugim. Otrzymujemy przez podstawianie i odrywanie:

$T_{3.1}$ s_1/q_3, p/q_2, q/r, $r/Cq_1p \times C\mathrm{I}-\mathrm{II}$

II $Cq_3CpCq_2Cq_1p$

W wyrażeniu tym p znajduje się na drugim miejscu. Zastosujmy teraz prawo komutacji T_3:

T_3 p/q_3, q/p, $r/Cq_2Cq_1p \times C\mathrm{II}-\mathrm{III}$

III $CpCq_3Cq_2Cq_1p$

Poprzednik p znalazł się na pierwszym miejscu. Chcąc go z powrotem przesunąć na prawo na drugie, trzecie i czwarte miejsce, trzeba użyć tych samych tez $T_{3.2}$, $T_{3.1}$ i T_3 w porządku odwrotnym:

T_3 q/q_3, $r/Cq_2q_1p \times C\mathrm{III}-\mathrm{II}$

II $Cq_3CpCq_2Cq_1p$

$T_{3.1}$ s_1/q_3, q/q_2, $r/Cq_1p \times C\mathrm{II}-\mathrm{I}$

I $Cq_3Cq_2CpCq_1p$

$T_{3.2}$ s_2/q_3, s_1/q_2, q/q_1, $r/p \times CT-T_{1.3}$

$T_{3\text{-}1}$ $Cq_3Cq_2Cq_1Cpp$

Mówiąc ogólnie, jeśli chcemy poprzednik znajdujący się w wyrażeniu $C\varepsilon_1C\varepsilon_2 \ldots C\varepsilon_n\sigma$ na miejscu pierwszym, przesunąć na prawo na miejsce k-te dla $k>2$, musimy użyć kolejno tez T_3, $T_{3.1}$, ..., $T_{3(k-2)}$; chcąc go zaś przesunąć na odwrót – na lewo z miejsca k-tego na miejsce pierwsze, trzeba użyć tych samych tez w porządku odwrotnym: $T_{3(k-2)}, ..., T_{3.1}, T_3$. Jeśliby chodziło o przesunięcie nie z pierwszego, lecz z i-tego miejsca na k-te, dla $1 < i < k$, lub odwrotnie – z k-tego na i-te, to trzeba by użyć tez $T_{3(i-1)}, T_{3.i}, ..., T_{3(k-2)}$ w porządku prostym lub odwrotnym.

3. Wyrażenia sensowne kształtu $C\varepsilon_1 C\varepsilon_2 ... C\varepsilon_n \sigma$, w których każdy z poprzedników $\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_n$ jest bądź zmienną, bądź implikacją prostą, czyli taką implikacją, której poprzednik i następnik jest zmienną, nazywam ELEMENTARNYMI. Prawo tożsamości *Cpp*, prawo symplifikacji *CpCqp*, prawo sylogizmu *CCqrCCpqCpr*, a także wyrażenia, nie będące tezami, jak *Cpq* lub *CpCCqrCpr*, są wyrażeniami elementarnymi.

KAŻDE WYRAŻENIE SENSOWNE KSZTAŁTU $C\varepsilon_1 C\varepsilon_2 ... C\varepsilon_n \sigma$, NIE BĘDĄCE WYRAŻENIEM ELEMENTARNYM, MOŻNA PRZY ZAŁOŻENIU PRZESUWALNOŚCI POPRZEDNIKÓW I PRZY POMOCY CO NAJWYŻEJ DWÓCH RODZAJÓW PRZEKSZTAŁCEŃ SPROWADZIĆ RÓWNOWAŻNIE W SKOŃCZONEJ LICZBIE KROKÓW DOWODOWYCH DO ZBIORU WYRAŻEŃ ELEMENTARNYCH. Pierwsze z tych przekształceń ma wygląd następujący:

(A) $CC\alpha C\beta\gamma\delta \sim CC\alpha\gamma\delta, CC\beta\gamma\delta$

Znaku „$\sim$" używam na oznaczenie równoważności dedukcyjnej. Wzór (A) orzeka tedy, że z wyrażenia $CC\alpha C\beta\gamma\delta$, przy czym $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ są dowolnymi wyrażeniami sensownymi, można wyprowadzić zarówno $CC\alpha\gamma\delta$, jak $CC\beta\gamma\delta$, i na odwrót z wyrażeń $CC\alpha\gamma\delta$ i $CC\beta\gamma\delta$, wziętych łącznie, można wyprowadzić $CC\alpha\beta\gamma\delta$. Przekształcenie to zakłada trzy tezy systemu implikacyjnego:

T_5 *CCCpCqrsCCprs*

T_6 *CCCpCqrsCCqrs*

T_7 *CCCprsCCCqrsCCpCqrs*

Podstawiając w tych tezach p/α, q/β, r/γ i s/δ, i zakładając $CC\alpha C\beta\gamma\delta$, otrzymujemy przez odrywanie na mocy T_5 i T_6 wyrażenia $CC\alpha\gamma\delta$ oraz $CC\gamma\delta$, zakładając zaś $CC\alpha\gamma\delta$ i $CC\beta\gamma\delta$, otrzymujemy na mocy T_7 przez dwukrotne odrywanie $CC\alpha C\beta\gamma\delta$.

Przekształcenie (A) pozwala nam każde wyrażenie kształtu $C\varepsilon_1 C\varepsilon_2 ... C\varepsilon_n \sigma$, w którym pierwszy poprzednik ε_1 jest implikacją o następniku złożonym, a więc ma budowę $C\alpha\beta\gamma$, sprowadzić równoważnie do dwóch wyrażeń, w których następnik ten jest prostszy. Np. wyrażenie *CCCpqCqCrsCrCqs*, w którym pierwszy poprzednik *CCpqCqCrs* ma następnik złożony *CqCrs*, jest według (A) dedukcyjnie równoważne dwom wyrażeniom *CCCpqCrsCrCqs* i *CCqCrsCrCqs*, a w wyrażeniach tych następnik pierwszego poprzednika *Crs* jest prostszy od pierwotnego następnika *CqCrs*. Ponieważ jednak i ten następnik jest jeszcze złożony, przeto do otrzymanych dwóch wyrażeń możemy znów zastosować przekształcenie (A), otrzymując z pierwszego wyrażenia *CCpqsCrCqs* i *CCrsCrCqs*, a z drugiego *CCqsCrCqs* i znowu *CCrsCrCqs*. Tutaj już we wszystkich wyrażeniach następnik pierwszego poprzednika jest zmienną. Wobec tego, że równoważność dedukcyjna jest relacją przechodnią, dochodzimy do wyniku, iż wyrażenie *CCCpqCqCrsCrCqs* jest dedukcyjnie równoważne zbiorowi wyrażeń *CCCpqsCrCqs*, *CCrsCrCqs* i *CCqsCrCqs*. Mówiąc ogólnie, jeżeli zabieg (A) powtórzymy dostateczną, lecz zawsze skończoną ilość razy, to możemy każde wyrażenie kształtu $C\varepsilon_1 C\varepsilon_2 \ldots C\varepsilon_n\sigma$, w którym pierwszy poprzednik jest implikacją o następniku złożonym, przekształcić równoważnie na zbiór takich wyrażeń, iż w każdym z nich następnik pierwszego poprzednika jest już zmienną. O ile w wyrażeniach tego zbioru któryś z dalszych poprzedników $\varepsilon_2, \varepsilon_3, \ldots, \varepsilon_n$ jest znowu implikacją o następniku złożonym, to przesuwamy taki poprzednik na lewo na miejsce pierwsze, i stosujemy do niego znów taką serię przekształceń. W ten sposób możemy ostatecznie każde wyrażenie kształtu $C\varepsilon_1 C\varepsilon_2 \ldots C\varepsilon_n\sigma$ sprowadzić równoważnie w skończonej liczbie kroków dowodowych do zbioru takich wyrażeń, w których wszystkie poprzedniki są bądź zmiennymi, bądź implikacjami, których następniki są zmiennymi, a tylko ich poprzedniki mogą być jeszcze złożone.

Tych właśnie złożonych poprzedników dotyczy drugie przekształcenie równoważne:

(B) $CCC\alpha\beta\pi\delta \sim CC\beta\pi\alpha\delta,\ C\pi\delta$

Wzór (B) orzeka, że z wyrażenia $CCC\alpha\beta\pi\delta$, przy czym α, β i δ są dowolnymi wyrażeniami sensownymi, a π dowolną zmienną, można wyprowadzić zarówno $CC\beta\pi C\alpha\delta$, jak $C\pi\delta$, i na odwrót – z wyrażeń $CC\beta\pi C\alpha\delta$ i $C\pi\delta$, wziętych łącznie, można wyprowadzić $CCC\alpha\beta\pi\delta$. Ponieważ przekształcenie (B) stosujemy do wyrażeń, na których zostało już wykonane przekształcenie (A), dlatego przyjmujemy, że π, jako następnik pierwszego poprzednika, jest zmienną. By uzyskać podstawę dla przekształcenia (B), musimy założyć trzy dalsze tezy systemu implikacyjnego:

T_8 *CCCCpqrsCCqrCps*

T_9 *CCCCpqrsCrs*

T_{10} *CCCqrCpsCCrsCCCpqrs*

Podstawiając w tych tezach p/α, q/β, r/π i s/δ, i zakładając $CCC\alpha\beta\pi\delta$, otrzymujemy przez odrywanie na mocy T_8 i T_9 wyrażenia $CC\beta\pi C\alpha\delta$ i $C\pi\delta$, zakładając zaś $CC\beta\pi\alpha\delta$ i $C\pi\delta$ otrzymujemy na mocy T_{10} przez dwukrotne odrywanie $CCC\alpha\beta\pi\delta$.

Przekształcenie (B) pozwala nam każde wyrażenie kształtu $C\varepsilon_1 C\varepsilon_2 \ldots C\varepsilon_n\sigma$, w którym pierwszy poprzednik ε_1 jest implikacją o poprzedniku złożonym, sprowadzić równoważnie do dwóch wyrażeń prostszych. Zakładając mianowicie, że ε_1 ma budowę $CC\alpha\beta\pi$, otrzymujemy dzięki przekształceniu (B) z wyrażenia $CCC\alpha\beta\pi Cq_2 \ldots Cq_n\sigma$ dwa wyrażenia: $CC\beta\pi C\alpha C\varepsilon_1 \ldots C\alpha_n\sigma$ i $C\pi Cq_2 \ldots Cq_n\sigma$. W drugim z tych wyrażeń pierwszy poprzednik π jest zmienną, nie mamy więc potrzeby zajmować się nim dalej. W pierwszym zaś wyrażeniu, zamiast pierwotnego poprzednika $CC\alpha\beta\pi$, mamy dwa nowe poprzedniki, $C\beta\pi$ oraz α, przy czym pierwszy z nich $C\beta\pi$ ma poprzednik β prostszy od pierwotnego $C\alpha\beta$, drugi zaś α może być złożony, ale w każdym razie jest prostszy od pierwotnego $CC\alpha\beta\pi$. O ile β jest nadal złożone, czyli jest implikacją, stosujemy ponownie zabieg (B), otrzymując wyrażenia o jeszcze prostszych poprzednikach. Np. wyrażenie *CCCpCqrsCCsqq*, w którym pierwszy poprzednik *CCpCqrs* jest implikacją o poprzedniku złożonym *CpCqr*, sprowadzamy równoważnie na mocy

(B) do wyrażeń *CCCqrsCpCCsqq* i *CsCCsqq*. Z wyrażeń tych wystarczy rozpatrzyć pierwsze. Widzimy, że w wyrażeniu tym w miejsce pierwotnego poprzednika *CCpCqrs* zjawiły się dwa poprzedniki, *CCqrs* i *p*, przy czym pierwszy z tych poprzedników, o który tu właśnie chodzi, *CCqrs*, jest implikacją o poprzedniku *Cqr*, prostszym od pierwotnego *CpCqr*. Ponieważ jednak i ten poprzednik *CCqrs* jest nadal jeszcze implikacją o poprzedniku złożonym, przeto musimy powtórzyć zabieg (B), otrzymując tym razem z wyrażenia *CCCqrsCpCCsqq* dwa wyrażenia elementarne, *CCrsCCpCCsqq* i *CsCpCCsqq*, których już dalej rozkładać nie potrzebujemy. Wyrażenie *CCCpCqrsCCsqq* przekształciliśmy w ten sposób równoważnie na zbiór wyrażeń elementarnych, *CCrsCqCpCCsqq*, *CsCpCCsqq* i *CsCCsqq*. Mówiąc ogólnie, jeżeli zabieg (B) powtórzymy dostateczną, lecz zawsze skończoną ilość razy, to możemy każde wyrażenie kształtu $C\varepsilon_1 C\varepsilon_2 \ldots C\varepsilon_n \sigma$ przekształcić równoważnie na zbiór takich wyrażeń, iż w każdym z nich pierwszy poprzednik jest bądź zmienną, bądź prostą implikacją. O ile α, występujące w poprzedniku $CC\alpha\beta\pi$, jest wyrażeniem złożonym, to przesuwamy je na pierwsze miejsce i stosujemy do niego naprzód zabieg (A), jeżeli następnik tego wyrażenia jest złożony, natępnie zaś zabieg (B), o ile poprzednik jego jest złożony. Tak samo postępujemy z dalszymi nowymi poprzednikami, które mogą się zjawić wskutek stosowania zabiegu (B). W ten sposób dochodzimy do zbioru wyrażeń, w których wszystkie poprzedniki, wcześniejsze od ε_2, są albo zmiennymi, albo implikacjami prostymi. O ile któryś z dalszych poprzedników $\varepsilon_2, \varepsilon_3, \ldots, \varepsilon_n$ jest implikacją o poprzedniku złożonym, to przesuwamy taki poprzednik na pierwsze miejsce i stosujemy do niego taką samą serię przekształceń, co poprzednio. Postępując w ten sposób, możemy każde wyrażenie sensowne kształtu $C\varepsilon_1 C\varepsilon_2 \ldots C\varepsilon_n \sigma$, w którym dzięki uprzednio dokonanemu przekształceniu (A) nie było już poprzedników o następnikach złożonych, sprowadzić równoważnie w skończonej liczbie kroków dowodowych do zbioru wyrażeń elementarnych.

4. Z dotychczasowego przedstawienia okazuje się, że dzięki ośmiu tezom, T_3–T_{10}, możemy każde wyrażenie sensowne, nie będące zmienną ani wyrażeniem elementarnym, sprowadzić równoważnie do zbioru wyrażeń elementarnych, czyli takich wyrażeń kształtu $C\varepsilon_1 C\varepsilon_2 \ldots C\varepsilon_n \sigma$, w których poprzedniki $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ są bądź zmiennymi, bądź implikacjami prostymi, przy czym końcowy następnik σ jest zmienną. Tezy T_3 i T_4 pozwalają na przesuwanie poprzedników, tezy T_5–T_7 są podstawą przekształcenia (A), a tezy T_8–T_{10} uzasadniają przekształcenie (B). Obecnie wykażemy, że każde wyrażenie elementarne, sprawdzone przez matrycę, możemy wyprowadzić przy pomocy skończonej liczby kroków dowodowych z niewielkiej liczby tez, należących do systemu.

Badamy w tym celu w wyrażeniach elementarnych przede wszystkim te poprzedniki, które są zmiennymi. O ile znajdzie się wśród nich poprzednik, równokształtny z końcową zmienną σ, to wyrażenie takie jest sprawdzone przez matrycę i możemy je zawsze wyprowadzić z tez T_1–T_4 przy pomocy skończonej liczby kroków dowodowych. Jeśli bowiem ostatni poprzednik ε_n jest równokształtny z σ i wyrażenie ma postać $C\varepsilon_1 C\varepsilon_2 \ldots C\varepsilon_n C\sigma\sigma$, a w granicznym przypadku $C\sigma\sigma$, to należy ono do pierwszego pęku tez, opartego na prawach tożsamości i symplifikacji, albo jest wprost prawem tożsamości. Jeśli zaś któryś z innych poprzedników jest równokształtny z σ, to możemy go przy pomocy drugiego pęku tez, opartego na prawach komutacji i sylogizmu, przesunąć na ostatnie miejsce na prawo, otrzymując znowu wyrażenie kształtu $C\varepsilon_1 C\varepsilon_2 \ldots C\varepsilon_n C\sigma\sigma$, należące do pierwszego pęku tez.

O ile w badanym wyrażeniu elementarnym żaden z poprzedników, będących zmiennymi, nie jest równokształtny z końcową zmienną σ, to szukamy, czy istnieje wśród nich taki poprzednik, który byłby równokształtny z poprzednikiem jakiejś implikacji prostej, występującej w wyrażeniu. Badamy innymi słowy, czy znajdują się wśród poprzedników $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ dwa wyrażenia kształtu π i $C\sigma\sigma$, przy czym π i σ są zmiennymi. Jeśli znajdują się takie wyrażenia, to przesuwamy, o ile potrzeba, $C\pi\sigma$ na miejsce pierwsze, π zaś na miejsce drugie, i stosujemy następujące przekształcenie równoważne:

(C) $CC\pi\rho C\pi\alpha \sim C\rho C\pi\alpha$

Wzór (C) orzeka, że z wyrażenia $CC\pi\rho C\pi\alpha$, przy czym π i ρ są tutaj dowolnymi zmiennym, a α dowolnym wyrażeniem sensownym, można wyprowadzić $C\rho C\pi\alpha$, i na odwrót – z $C\rho C\pi\alpha$ można wyprowadzić $CC\pi\rho C\pi\alpha$. Przekształcenie (C) zakłada dwie dalsze i ostatnie już tezy systemu implikacyjnego:

T_{11} *CCpqCprCqCpr*

T_{12} *CCqCprCCpqCpr*

Podstawiając w tych tezach p/π, q/ρ i r/α, i zakładając $CC\pi\rho C\pi\alpha$ otrzymujemy przez odrywanie na mocy tezy T_{11} wyrażenie $C\rho C\pi\alpha$, zakładając zaś $C\rho C\pi\alpha$ otrzymujemy przez odrywanie na mocy tezy T_{12} wyrażenie $CC\pi\rho C\pi\alpha$.

Dzięki przekształceniu (C) powstaje z wyrażenia elementarnego nowe wyrażenie elementarne, równoważne poprzedniemu, ale tym od niego różne, że zamiast implikacji $C\pi\rho$ występuje jako pierwszy poprzednik zmienna ρ. Jeśli zmienna, oznaczona przez ρ, jest równokształtna z końcową zmienną σ, wtedy wyrażenie można wyprowadzić z tez T_1–T_4, jak pokazaliśmy wyżej. Jeśli nie jest równokształtna, to szukamy, czy istnieje wśród poprzedników obok zmiennej ρ wyrażenie $C\rho\tau$, i jeśli tak jest, stosujemy znowu przekształcenie (C). Jak się to robi, zobaczymy na przykładzie. Z wyrażenia elementarnego *CCpqCpCCqrr* otrzymujemy dzięki przekształceniu (C) wyrażenie równoważne *CqCpCCqrr*, w którym zamiast poprzednika *Cpq* występuje poprzednik *q*. Ponieważ zmienna *q* nie jest równokształtna z końcową zmienną *r*, a obok *q* występuje w wyrażeniu poprzednik *Cqr*, przeto przekształcamy przez przesunięcie wyrażenie *CqCpCCqrr* na wyrażenie *CCqrCqCpr* i stosując ponownie zabieg (C) otrzymujemy wyrażenie *CrCqCpr*. Tutaj już nowy poprzednik *r* jest równokształtny ze zmienną końcową i wyrażenie można wyprowadzić z tez

T_1–T_4. Opisane badania porwadzimy dopóty, dopóki nie zajdzie jeden z następujących przypadków: albo otrzymamy wyrażenie, w którym jakiś poprzednik, będący [...].[5]

[...] σ, podstawić π. W przytoczonym przykładzie należy więc za q i za r podstawić *Cpp*, a za s i t podstawić p, skutkiem czego powstaje wyrażenie *CCpCppCCppCCppCCppp*. Poprzedniki, będące zmiennymi, przechodzą w *Cpp*, poprzedniki zaś, będące implikacjami prostymi, przechodzą bądź w *CpCpp*, bądź w *Cpp*, zależnie od tego, czy następnik w tych implikacjach jest, czy nie jest równokształtny z jakąś zmienną, za którą podstawiliśmy *Cpp*. Poprzedniki we wszystkich implikacjach prostych otrzymują postać p, bo założyliśmy poprzednio, że w wyrażeniu badanym nie ma żadnego poprzednika, będącego zmienną, który byłby równokształtny z poprzednikiem jakiejś implikacji prostej. Otóż *Cpp* jest przyjętym przez nas prawem tożsamości, a *CpCpp* jest podstawieniem prawa symplifikacji *CpCqp*. W badanym wyrażeniu możemy tedy wszystkie poprzedniki oderwać, otrzymując jako wynik końcowy zmienną p.

Wykazaliśmy w ten sposób, że każde wyrażenie elementarne, sprawdzone przez matrycę, można wyprowadzić przez skończoną liczbę podstawień i oderwań z sześciu co najwyżej tez systemu implikacyjnego, tzn. z tez T_1–T_4 i T_{11}–T_{12}. Ponieważ zaś każde wyrażenie sensowne tegoż systemu, nie będące zmienną ani wyrażeniem elementarnym, możemy bez względu na to, czy jest, czy nie jest sprawdzone przez matrycę, sprowadzić równoważnie na podstawie tez T_8–T_{10} do zbioru wyrażeń elementarnych, przeto każde wyrażenie elementarne, sprawdzone przez matrycę, możemy wyprowadzić przy pomocy skończonej liczby kroków dowodowych z dwunastu tez: T_1–T_{12}, należących do systemu. Tezy te tworzą zatem aksjomatyczną podstawę systemu.

II. DOWÓD AKSJOMATYZOWALNOŚCI IMPLIKACYJNO-NEGACYJNEGO RACHUNKU ZDAŃ[6]

1. W niniejszym rozdziale podaję dowód, że wszystkie tezy implikacyjno-negacyjnego rachunku zdań, sprawdzone przez obok stojącą matrycę – tez takich jest nieskończenie wiele – można wyprowadzić przy pomocy reguł podstawiania i odrywania ze skończonej liczby tez tegoż rachunku.

C	0	1	*N*
1*	1	2	2
2	1	1	1

[5] W zachowanym rękopisie brakuje połowy następnej – tj. 13 – strony [JJJ].

[6] Rękopis ten oznaczony jest – na pierwszej strony u góry – jako PRACA NR 2, i obejmuje 23 ponumerowane strony. Pierwsza opatrzona jest datą: 13.03.1947 [JJJ].

Ta skończona liczba tez, która wystarcza do udowodnienia wszystkich innych tez implikacyjno-negacyjnych, stanowi zatem aksjomatyczną podstawę rachunku, a każdy układ niezależnych od siebie tez, z których wynika owa podstawa aksjomatyczna, jest zupełnym i niezależnym układem aksjomatów rachunku implikacyjno-negacyjnego. Dowód aksjomatyzowalności wykazuje zatem, że zbiór tez, sprawdzonych przez powyższą matrycę, jest NASYCONY, to znaczy, że nie można go bez sprzeczności rozszerzyć przez dodanie do niego wyrażenia sensownego, nie sprawdzonego przez wspomnianą matrycę. O ile bowiem dodamy do naszego zbioru tez tego rodzaju wyrażenie, to otrzymujemy wszystkie wyrażenia sensowne, a więc i zmienną „*p*".

Idea dowodu jest następująca. Przy pomocy skończonej liczby równoważnych przekształceń, opartych na skończonej liczbie tez sprawdzonych matrycowo, sprowadzam każde wyrażenie sensowne do zbioru tak zwanych WYRAŻEŃ ELEMENTARNYCH. Przez wyrażenie elementarne rozumiem zaś wyrażenie kształtu

$$C\alpha_1 C\alpha C\alpha_3 \ldots C\alpha_n \sigma,$$

w którym poprzedniki „α_1", „α_2", „α_3", ... „α_n" są bądź zmiennymi, bądź negacjami zmiennych, a wyrażenie „σ" jest zmienną, różną od zmiennych, występujących w poprzednikach. Wyrażenia elementarne albo są tezami, i wtedy łatwo je udowodnić, albo nie są tezami, i wtedy łatwo jest wykazać, że dołączone do układu aksjomatów dają zmienną „*p*", a więc wszystkie wyrażenia sensowne. Jeśli wszystkie wyrażenia elementarne, do których sprowadziliśmy badane wyrażenie sensowne, są tezami, wtedy i badane wyrażenie jest tezą, i może być udowodnione na mocy tez, będących podstawą przekształceń; o ile zaś choć jedno wyrażenie elementarne nie jest tezą, to i badane wyrażenie nie jest tezą, i dołączone do układu aksjomatów daje wszystkie wyrażenia sensowne.

2. Przechodzę do przedstawienia przekształceń, potrzebnych do sprowadzenia każdego wyrażenia sensownego w rachunku implikacyjno-negacyjnym do zbioru wyrażeń elementarnych. Powiadam, że wyrażenie „α" jest DEDUKCYJNIE RÓWNOWAŻNE wyrażeniu „β", w znakach „$\alpha \sim \beta$", gdy zarówno „$C\alpha\beta$", jak „$C\beta\alpha$" są tezami. Tak samo wyrażenie „α" jest dedukcyjnie równoważne dwom wyrażeniom „β" i „γ", gdy tezami są wyrażenia „$C\alpha\beta$", „$C\alpha\gamma$" oraz $C\beta C\gamma\alpha$".

Pierwsze przekształcenie jest następujące:

(A) $\alpha \sim CN\alpha\sigma$

[gdzie] „α" jest dowolnym wyrażeniem sensownym, [a] „σ" jest zmienną, nie występującą w „α". O ile „α" ma już kształt „$CN\alpha\sigma$", to przekształcenia tego można nie wykonywać. Przekształcenie (A) opiera się na następujących dwóch tezach:

I *CpCNpq*

II *CCNppp*

Dzięki tezie I otrzymujemy, mając dane „α":

1 α
 I p/a q/σ $\times$ $C1-2$
2 $CN\alpha\sigma$

Dzięki tezie II otrzymujemy, mając dane wyrażenie „$CN\alpha\sigma$":

1 $CN\alpha\sigma$
 II $p/CN\alpha\sigma$ $\times$ $C1$ $\sigma/\alpha-2$
2 α

Ponieważ „σ" jest zmienną, nie występującą w „α", przeto podstawiając za „σ" wyrażenie „α" nie zmieniamy w niczym wyrażenia „$N\alpha$", i możemy użyć tezy II. Dzięki przekształceniu (A) możemy każde wyrażenie sensowne sprowadzić równoważnie do implikacji „$CN\alpha\sigma$", i chodzi teraz tylko o to, by wykazać, że każdą taką implikację możemy sprowadzić do zbioru wyrażeń elementarnych.

Ażeby to wykazać, podamy trzy dalsze przekształcenia dedukcyjnie równoważne, dzięki którym każdą implikację „$C\alpha\beta$" możemy wyrazić za pomocą zbioru implikacji, w których poprzednik jest zmienną lub negacją zmiennej. Są to następujące przekształcenia:

(B) $CNN\alpha\beta \sim C\alpha\beta$
(C) $CNC\alpha\beta\gamma \sim Cp\alpha CN\beta\gamma$
(D) $CC\alpha\beta\gamma \sim CN\alpha\gamma, C\beta\gamma$

Opierają się one na następujących tezach, które można sprawdzić matrycowo:

III	$CCNNpqCpq$	
IV	$CCpqCNNpq$	III i IV dotyczą przeksztacenia (B).
V	$CCnCpqrCpCNqr$	
VI	$CCpCNqrCNCpqr$	V i VI dotyczą przekształcenia (C).
VII	$CCCpqrCNpr$	
VIII	$CCCpqrCqr$	VII, VIII i IX dotyczą przekształcenia (D).
IX	$CCnprCCqrCCpqr$	

Dzięki tezie III otrzymujemy z wyrażenia „$CNN\alpha\beta$" wyrażenie „$C\alpha\beta$":

1 $CNN\alpha\beta$
 III p/α q/β $\times$ $C1-2$
2 $C\alpha\beta$

Dzięki tezie IV otrzymujemy – na odwrót – z wyrażenia „$C\alpha\beta$" wyrażenie „$CNN\alpha\beta$":

1 $C\alpha\beta$
 IV p/α q/β $\times$ $C1-2$
2 $CCC\alpha\beta$

Dzięki tezie V otrzymujemy z wyrażenia „$CNC\alpha\beta\gamma$" wyrażenie „$C\alpha CN\beta\gamma$":

1 $CNC\alpha\beta\gamma$
 V p/α q/β r/γ $\times$ $C1-2$
2 $C\alpha CN\beta\gamma$

Dzięki tezie VI otrzymujemy – na odwrót – z wyrażenia „$C\alpha CN\beta\gamma$" wyrażenie „$CNC\alpha\beta\gamma$":

1 $C\alpha CN\beta\gamma$

VI p/α q/β r/γ $\times$ $C1-2$

2 $CNC\alpha\beta\gamma$

Dzięki tezie VII otrzymujemy z wyrażenie „$CC\alpha\beta\gamma$" wyrażenie „$CN\alpha\gamma$":

1 $CC\alpha\beta\gamma$

VII p/α q/β r/γ $\times$ $C1-2$

2 $CN\alpha\gamma$

Dzięki tezie VIII otrzymujemy z wyrażenie „$CC\alpha\beta\gamma$" wyrażenie „$C\alpha\gamma$":

1 $CC\alpha\beta\gamma$

VIII p/α q/β r/γ $\times$ $C1-2$

Dzięki tezie IX otrzymujemy – na odwrót – z wyrażeń „$CN\alpha\gamma$" i „$C\beta\gamma$" wyrażenie „$CC\alpha\beta\gamma$":

1 $CN\alpha\beta$

2 $C\beta\gamma$

IX p/α r/γ q/β $\times$ $C1-C2-3$

3 $CC\alpha\beta\gamma$

Wszystkie wyrażenia sensowne rachunku implikacyjno-negacyjnego można podzielić na trzy kategorie: zmienne, negacje i implikacje. Tak samo wszystkie negacje można podzielić na trzy kategorie: negacje zmiennej, negacje negacji i negacje implikacji. Implikacji, których poprzednik jest zmienną, nie potrzebujemy przekształcać. Implikacji, których poprzednik jest negacją zmiennej, także nie potrzebujemy przekształcać. Implikacje, których poprzednik jest negacją negacji, a więc zaczyna się od dwóch „N", przekształcamy na mocy wzoru (B), usuwając obie negacje. Implikacje, których poprzednik jest negacją implikacji, przekształcamy na mocy wzoru (C) na takie wyrażenie, w którym zawierają się dwa poprzedniki, ale żaden z nich nie jest już implikacją zanegowaną. Implikacje wreszcie, w których poprzednikiem jest implikacja, przekształcamy dzięki wzorowi (D) na dwa wyrażenia, w których poprzedniki nie są już implikacjami. Stosując te zabiegi tyle razy, ile potrzeba, musimy ostatecznie sprowadzić wyrażenie „$CN\alpha\sigma$" do wyrażenia, lub zbioru wyrażeń – bo przez przekształcenie (D) otrzymujemy z jednego wyrażenia dwa wyrażenia – takich, w których pierwszy poprzednik jest już albo zmienną, albo negacją zmiennej. O ile bowiem miałby inną postać, to zawsze możemy do niego zastosować któreś z przekształceń (B), (C) lub (D). Należy zauważyć, że przez żadne z tych przekształceń nie przedłuża się wyrażenia pierwotnego; przeciwnie, skraca się ono przez przekształcenie (B) i (D), a tylko przez przekształcenie (C) uzyskuje się z jednego poprzednika „$NC\alpha\beta$" dwa poprzedniki „α" i „$N\beta$", ale krótsze od pierwotnego poprzednika, tak że liczba liter w wyrażeniu badanym pozostaje ta sama.

Po przeprowadzeniu tych przekształceń otrzymujemy wyrażenia kształtu:

$C\pi C\alpha_1 C\alpha_2 \ldots C\alpha_n \sigma$ lub $CN\pi C\alpha_1 C\alpha_2 \ldots C\alpha_n \sigma$,

przy czym „π" jest zmienną, nie występującą w żadnym poprzedniku. W pierwotnym wyrażeniu „$CN\alpha\beta$" znajdował się tylko jeden poprzednik „$N\alpha$"; obecnie liczba poprzedników mogła się powiększyć o nieokreśloną liczbę dzięki wielokrotnemu możliwemu zastosowaniu przekształcenia (C). Owe poprzedniki „α_1", „α_2", ..., „α_n" mogą to być zmienne lub negacje zmiennych, ale mogą być również złożone w dowolny zresztą sposób. Dalsze przekształcenia polegają na tym, by każdy z takich złożonych poprzedników przenieść na pierwsze miejsce i zredukować go przy pomocy przekształceń (B), (C) i (D) do zmiennej lub negacji zmiennej.

Do tego celu służą trzy dalsze i ostatnie już przekształcenia:

(E) $C\alpha C\beta\gamma \sim C\beta C\alpha\gamma$

(F) $C\delta C\alpha C\beta\gamma \sim CC\beta C\alpha\gamma$

(G) $C\alpha C\beta\gamma \sim CNC\alpha N\beta\gamma$

Opierają się one na następujących tezach:

X	*CCpCqrCqCpr*	dotyczy przekształcenia (E).
XI	*CCsCpCqrCsCqCpr*	XI dotyczy przekształcenie (F).
XII	*CCpCqrCNCpNqr*	XII i XIII dotyczą przekształcenia (G).
XIII	*CCNCpNqrCpCqr*	

Dzięki tezie X z wyrażenia „$C\alpha C\beta\gamma$" otrzymujemy wyrażenie „$C\beta C\alpha\gamma$" i – na odwrót – z drugiego wyrażenia pierwsze:

1	$C\alpha C\beta\gamma$	1	$C\beta C\alpha\gamma$
	X p/α q/β r/γ $\times$ $C1-2$		X p/β q/α r/γ $\times$ $C1-2$
2	$C\beta C\alpha\gamma$	2	$C\alpha C\beta\gamma$

Dzięki tezie XI z wyrażenia „$C\delta C\alpha C\beta\gamma$" otrzymujemy wyrażenie „$C\delta C\beta C\alpha\beta$" i – na odwrót – z drugiego wyrażenia pierwsze:

1	$C\delta C\alpha C\beta\gamma$	1	$C\delta C\beta C\alpha\gamma$
	XI s/δ p/a q/β r/γ $\times$ $C1-2$		XI s/δ p/β q/α r/γ $\times$ $C1-2$
2	$C\delta C\beta C\alpha\gamma$	2	$C\delta C\alpha C\beta\gamma$

Dzięki tezie XII otrzymujemy z wyrażenia „$C\alpha C\beta\gamma$" wyrażenie „$CNC\alpha N\beta\gamma$":

1 $C\alpha C\beta\gamma$

XII p/α q/β r/γ $\times$ $C1-2$

2 $CNC\alpha N\beta\gamma$

Dzięki tezie XIII otrzymujemy – na odwrót – z wyrażenia „$CNC\alpha N\beta\gamma$" wyrażenie „$C\alpha C\beta\gamma$":

1 $CNC\alpha N\beta\gamma$

XIII p/α q/β r/γ $\times$ $C1-2$

2 $C\alpha C\beta\gamma$

Przekształcenie (G) podobne jest do przekształcenia (C), i różni się od niego tylko tym, że negacja przy wyrażeniu „β" znajduje się na innym miejscu. Przekształcenie to można by sprowadzić do przekształceń (B), (C) i (D) w następujący sposób:

(E) $C\alpha C\beta\gamma \sim C\beta C\alpha\gamma$

(B) $C\beta C\alpha\gamma \sim CNN\beta C\alpha\gamma$ (pisząc „$NN\beta$" zamiast „α" i „$C\alpha\gamma$" zamiast „β")

(E) $CNN\beta C\alpha\gamma \sim C\alpha CNN\beta\gamma$ (pisząc „$NN\beta$" zamiast „β")

(C) $C\alpha CNN\beta\gamma \sim CNC\alpha N\beta\gamma$ (pisząc „$N\beta$" zamiast „β")

Ponieważ relacja równoważności dedukcyjnej jest symetryczna i przechodnia, przeto wynika z powyższych wzorów, że wyrażenie „$C\alpha C\beta\gamma$" jest dedukcyjnie równoważne wyrażeniu „$CNC\alpha N\beta\gamma$". Postępowanie to przedłużałoby jednak w praktyce przekształcanie wyrażeń; wolałem przeto przyjąć wyrażenie (G) jako osobne przekształcenie.

Na podstawie przekształceń (E), (F) i (G), opartych na tezach X–XIII, można w wyrażeniach kształtu:

$$C\alpha_1 C\alpha C\alpha_3 \ldots C\alpha_n\beta$$

każdy poprzednik, znajdujący się na dowolnym miejscu i, czyli „α_i", przesunąć równoważnie na pierwsze miejsce. By przesunąć „α_2" na pierwsze miejsce, wystarczy zastosować przekształcenie (E). By przesunąć „α_3" na pierwsze miejsce, należy naprzód zastosować przekształcenie (F), dzięki któremu „α_3" przechodzi z trzeciego miejsca na drugie, a potem przekształcenie (E), które „α_3" przesuwa z drugiego miejsca na pierwsze. Gdy chodzi o poprzedniki, znajdujące się na dalszych miejscach, to trzeba wprzód zastosować przekształcenie (G). W jaki sposób to się robi, okaże najlepiej przykład. Przypuśćmy, że chodzi nam o przesunięcie w wyrażeniu

$$C\alpha_1 C\alpha_2 C\alpha_3 C\alpha_4 C\alpha_5\beta$$

poprzednika „α_5" na pierwsze miejsce. Stosujemy przekształcenie (G), otrzymując

$$C\alpha_1 C\alpha_2 C\alpha_3 C\alpha_4 C\alpha_5\beta \sim CNC\alpha_1 N\alpha_2 C\alpha_3 C\alpha_4 C\alpha_5\beta$$

Przez to przekształcenie „α_5" znalazło się na czwartym miejscu, gdyż z dwóch pierwszych poprzedników utworzyliśmy jeden. Ponawiamy przekształcenie (G):

$$CNC\alpha_1 N\alpha_2 C\alpha_3 C\alpha_4 C\alpha_5\beta \sim CNCN\alpha_1 N\alpha_2 N\alpha_3 C\alpha_4 C\alpha_5\beta$$

Teraz „α_5" znalazło się na trzecim miejscu. Ale nie stosujemy jeszcze przekształcenia (E), które przeniosłoby „α_5" na pierwsze miejsce, bo nie chcemy, by w wyrażeniu znajdował się poprzednik złożony „$NCNC\alpha_1 N\alpha_2 N\alpha_3$". Stosujemy więc znowu przekształcenie (G), ale tym razem w odwrotnym kierunku, otrzymując:

$$CNCNC\alpha_1 N\alpha_2 N\alpha_3 C\alpha_5 C\alpha_4\beta \sim CNC\alpha_1 N\alpha_2 C\alpha_3 C\alpha_5 C\alpha_4\beta$$

Wyrażenie „α_5" znalazło się znowu na trzecim miejscu, ale możemy zastosować przekształcenie (F), przenosząc to wyrażenie na drugie miejsce:

$$CNC\alpha_1 N\alpha_2 C\alpha_3 C\alpha_4 C\alpha_5\beta \sim CNC\alpha_1 N\alpha_2 C\alpha_5 C\alpha_3 C\alpha_4\beta$$

Do nowego wyrażenia stosujemy ponownie przekształcenie (G) w odwrotnym kierunku:

$$CNC\alpha_1 N\alpha_2 C\alpha_5 C\alpha_3 C\alpha_4\beta \sim C\alpha_1 C\alpha_2 C\alpha_5 C\alpha_3 C\alpha_4\beta$$

Teraz już z łatwością otrzymujemy dzięki (F):

$$C\alpha_1 C\alpha_2 C\alpha_5 C\alpha_3 C\alpha_4\beta \sim C\alpha_1 C\alpha_5 C\alpha_2 C\alpha_3 C\alpha_4\beta$$

a dzięki (E):

$$C\alpha_1 C\alpha_5 C\alpha_2 C\alpha_3 C\alpha_4\beta \sim C\alpha_5 C\alpha_1 C\alpha_2 C\alpha_3 C\alpha_4\beta$$

Zabieg ten wydawać się może komuś niepotrzebnie długim i nużącym. Ale jest to, jak mi się wydaje, jedyny sposób, by móc przesunąć poprzednik z dowolnego miejsca na miejsce pierwsze lub dowolnie bliższe, nie zmieniając przy tym innych poprzedników ani ich porządku, przy pomocy trzech tylko przekształceń, opartych na czterech tylko tezach. Wyrażenia „$NC\alpha_1N\alpha_2$" i „$NCNC\alpha_1N\alpha_2N\alpha_3$" użyte były tylko przejściowo i zniknęły w przekształceniu ostatecznym.

Dzięki przekształceniom (E), (F) i (G) można w wyrażeniach kształtu:

$$C\alpha_1C\alpha_2C\alpha_3 \ldots C\alpha_n\sigma$$

każdy złożony poprzednik przenieść na pierwsze miejsce i zastosować do niego przekształcenia (B), (C) i (D), rozkładając go na wyrażenia proste. Zabiegi te można stosować tak długo, aż wreszcie każdy z poprzedników stanie się bądź zmienną, bądź negacją zmiennej, przy czym ostatni wyraz „σ" pozostaje zmienną, nie występującą w żadnym poprzedniku, bo żadne przekształcenie wyrazu tego nie dotyka.[7] W ten sposób każde wyrażenie kształtu „$CN\alpha\sigma$", a więc i każde wyrażenie sensowne „α", można sprowadzić równoważnie do zbioru wyrażeń elementarnych.[8]

3. Łatwo jest rozstrzygnąć, kiedy wyrażenie elementarne jest tezą, a kiedy nie. Tezą jest ono wtedy i tylko wtedy, gdy wśród poprzedników jego znajdują się dwa wyrażenia kształtu „π" i „$N\pi$", przy czym „π" jest oczywiście zmienną. Wówczas przesuwamy dzięki przekształceniom (E), (F) i (G) poprzednik „π" na pierwsze miejsce, a poprzednik „$N\pi$" na drugie, otrzymując wyrażenie kształtu:

$$C\pi CN\pi\beta$$

które jest podstawieniem tezy I. Jeśli nie ma natomiast wśród poprzedników wyrażenia elementarnego żadnych dwóch wyrażeń kształtu „π" i „$N\pi$", wtedy podstawiamy za wszystkie zmienne w poprzednikach niepoprzedzone negacją wyrażenie „$CpCNpq$", a za zmienne – poprzedzone negacją wyrażenie „$NCpCNpq$". Ostatni wyraz „σ" pozostaje bez zmiany, bo jest różny od wszystkich poprzedników. Poprzedniki „$CpCNpq$" odrywamy od razu jako tezy; w poprzednikach „$NNCpCNpq$" opuszczamy dwa „N" dzięki przekształceniu (B), po czym odrywamy je również, uzyskując jako wynik końcowy zmienną, oznaczoną przez „σ". Wyrażenie elementarne prowadzi więc w tym przypadku do sprzeczności.

Tak więc na mocy trzynastu tylko tez, I–XIII, możemy każde wyrażenie sensowne, o ile jest tezą, udowodnić, o ile zaś nie jest tezą, to możemy wykazać, że dołączone do zbioru tez daje wszystkie wyrażenia sensowne. Droga, jaką musimy obrać, by uzyskać ten czy ów wynik, jest w każdej swej fazie, jak najdokładniej wyznaczona, tak że rozważania powyższe nie tylko podają dowód, iż implikacyjno-negacyjny rachunek zdań jest aksjomatyzowalny i nasycony, ale umożliwiają również efektywne rozstrzygnięcie w każdym indywidualnym przypadku.

4. By jeszcze bardziej uprzystępnić te rozważania czytelnikowi, przytaczam dwa przykłady.

---

[7] Nad wyrazem „dotyka" jest dopisany – ręką autora – wyraz „sięga" [JJJ].

[8] Następny paragraf opatrzony jest datą: 14.03.1947 [JJJ].

Pierwszym przykładem jest teza, którą należy udowodnić, sprowadzając ją dzięki przekształceniom (A)–(G) do prawdziwych wyrażeń elementarnych i wywodząc ją następnie z tych wyrażeń dzięki tezom I–XIII. Załóżmy mianowicie, że

$$\alpha = CNCNCpNqrNCqNp$$

Łatwo jest sprawdzić matrycowo, że w naszym przypadku „α" jest tezą. Ponieważ nie ma ona kształtu „$CN\alpha\beta$", przeto stosujemy do niej naprzód przekształcenie (A):

$$\text{(A)}\ CNCNCpNqrNCqNp \sim CNCNCNCpNqrNCqNps$$

Otrzymane wyrażenie jest implikacją, której poprzednik jest negacją implikacji o poprzedniku „*NCNCpNqr*" i o następniku „*NCqNp*". Musimy więc zastosować do niego przekształcenie (C):

$$\text{(C)}\ CNCNCNCpNqrNCqNps \sim CNCNCpNqrCNNCqNps$$

Nowe wyrażenie jest także implikacją, której poprzednik jest negacją implikacji o prostszym już poprzedniku „*NCpNq*" i jeszcze prostszym następniku „*r*". Stosujemy więc znowu przekształcenie (C):

$$\text{(C)}\ CNCNCpNqrCNNCqNps \sim CNCpNqCNrCNNNCqNps$$

Stosujemy raz jeszcze przekształcenie (C):

$$\text{(C)}\ CNCpNqCNrCNNCqNps \sim CpCNNqCNrCNNCqNps$$

Poprzednik wyrażenia, które otrzymaliśmy w ten sposób, jest już zmienną. Szukamy dalszych poprzedników złożonych. Jako drugi poprzednik występuje „*NNq*". Jest to poprzednik złożony (nie jest zmienną ani negacją zmiennej), więc przenosimy go na pierwsze miejsce dzięki przekształceniu (E):

$$\text{(E)}\ CpCNNqCnrCNNCqNps \sim CNNqCpCNrCNNCqNps$$

W nowym wyrażeniu poprzednik implikacji zaczyna się od dwóch „*N*"; stosujemy zatem przekształcenie (B):

$$\text{(B)}\ CNNqCpCNrCNNCqNps \sim CqCpCNrCNNCqNps$$

Obecnie zarówno pierwszy poprzednik, jak i drugi, i trzeci, są to bądź zmienne, bądź negacje zmiennych. Poprzednik złożony znajduje się dopiero na czwartym miejscu. Musimy go przenieść na pierwsze miejsce. Stosujemy tedy przekształcenie (G), które przez złączenie dówch pierwszych poprzedników w jeden nowy, choć złożony poprzednik, umniejsza liczbę poprzedników:

$$\text{(G)}\ CqCpCnrCNNCqNps \sim CNCqNqNpCNrCNNCqNps$$

Teraz poprzednik złożony znajduje się już na trzecim miejscu. Dzięki przekształceniu (F) można go przesunąć na drugie miejsce:

$$\text{(F)}\ CNCqNpCNrCNNCqNps \sim CNCqNpCNNCqNpCNrs$$

Do uzyskanego w ten sposób wyrażenia nie stosujemy przekształcenia (E), bo nie chcemy mieć na drugim miejscu poprzednika złożonego. Stosujemy ponownie przekształcenie (G), ale w odwrotnym kierunku, przenosząc w ten sposób wyrażenie „*NNCqNp*" z powrotem na trzecie miejsce, ale pozbywając się złożonego poprzednika na miejscu pierwszym:

$$\text{(G)}\ CNCqNpCNNCqNpCNrs \sim CqCpCNNCqNpCNrs$$

Do nowego wyrażenia możemy zastosować naprzód przekształcenie (F), a następnie (E):

(F) *CqCpCNNCqNpCNrs* ~ *CqCNNCqNpCpCNrs*

(E) *CqCNNCqNpCpCNrs* ~ *CNNCqNpCqCpCNrs*

Poprzednik „*NNCqNp*", który w wyrażeniu „*CqCpCNrCNNCqNps*" znajdował się na czwartym miejscu, przesunęliśmy na pierwsze miejsce, przy czym inne poprzedniki pozostały bez zmiany. Ponieważ poprzednik ten zaczyna się od dwóch „*N*", przeto stosujemy przekształcenie (B):

(B) *CNNCqNpCqCpCNrs* ~ *CCqNpCqCpCNrs*

W wyrażeniu otrzymanym poprzednik jest implikacją; musimy więc do niego zastosować przekształcenie (D):

(D) *CCqNpCqCpCNrs* ~ *CNqCqCpCNrs, CNpCqCpCNrs*

Jesteśmy u kresu przekształceń, gdyż oba wyrażenia, któreśmy otrzymali, są już wyrażeniami elementarnymi. Przez dedukcyjnie równoważne przekształcenia sprowadziliśmy zatem nasze pierwotne wyrażenie „α" do zbioru dwóch wyrażeń elementarnych.

Oba te wyrażenia elementarne są oczywiście tezami. Trzeba je jednak sprowadzić do wyrażeń kształtu „*C*π*CN*πβ". Zrobimy to, stosując do wyrażenia pierwszego przekształcenie (E), a do drugiego przekształcenia (F) i (E):

(E) *CNqCqCpCNrs* ~ *CqCNqCpCNrs*

(F) *CNpCqCpCNrs* ~ *CNpCpCqCnrs*

(E) *CNpCpCqCNrs* ~ *CpCNpCqCNrs*

Obecnie można przeprowadzić formalny dowód przez podstawianie i odrywanie naszego pierwotnego wyrażenia „α", biorąc za punkt wyjścia wyrażenia elementarne, sprowadzone do kształtu „*C*π*CN*πβ", oraz posługując się tezami, na których oparło się przekształcenia (A)–(G). Nie będziemy jednakowoż [używać] wszystkich tych tez, lecz użyjemy jedynie tych, które w każdym przekształceniu prowadzą od wyrażenia po prawej stronie ku wyrażeniu, znajdującemu się po lewej stronie. Nie musimy się bowiem opierać na równoważnościach, lecz wystarczą nam implikacje. Wywód formalny przedstawia się w następujący sposób:

I *q*/*CqCNrs* × 1

1 *CpCNpCqCNrs*

X *q*/*Np r*/*CqCNrs* × *C*1–2

2 *CNpCpCqCNrs*

XI *s*/*Np r*/*CNrs* × *C*2–3

3 *CNpCqCpCNrs*

I *p*/*q r*/*CpCNrs* × 4

4 *CqCNqCpCNrs*

X *p*/*q q*/*Nq r*/*CpCNrs* × *C*4–5

5 *CNqCqCpCNrs*

IX *p*/*q r*/*CqCpCNrs q*/*Np* × *C*5–*C*3–6

6 *CCqNpCqCpCNrs*
IV *p/CqNp q/CqCpCNrs* × *C*6 – 7
7 *CNNCqNpCqCpCNrs*
X *p/NNCqNp r/CpCnrs* × *C*7 – 8
8 *CqCNNCqNpCpCNrs*
XI *s/q p/NNCqNp q/p r/CNrs* × *C*8 – 9
9 *CqCpCNNCqNpCNrs*
XII *p/q q/p r/CNNCqNpCNrs* × *C*9 – 10
10 *CNCqNpCNNCqNpCNrs*
XI *s/NCqNp p/NNCqNp q/Nr r/s* × *C*10 – 11
11 *CNCqNpCNrCNNCqNps*
XIII *p/q q/CpCNrCNNCqNps* × *C*12 – 13
12 *CqCpCNrCNNCqNps*
IV *p/q q/CpCNrCNNCqNps* × *C*12 – 13
13 *CNNqCpCNrCNNCqNps*
X *p/NNq q/p r/CNrCNNCqNps* × *C*13 – 14
14 *CpCNNqCNrCNNCqNps*
VI *q/Nq r/CNrCNNCqNps* × *C*14 – 15
15 *CNCpNqCNrCNNCqNps*
VI *p/NCpNq q/r r/CNNCqNps* × *C*15 – 16
16 *CNCNCpNqrCNNCqNps*
VI p/*NCNCpNqr q/NCqNp r/s* × *C*16 – 17
17 *CNCNCNCpNqrNCqNps*
17 *s/CNCNCpNqrNCqNp* × 18
18 *CNCNCNCpNqrCNqNpCNCNCpNqrNCqNp*
II *p/CNCNCpNqrNCqNp* × *C*18 – 19
19 *CNCNCpNqrNCqNp*

Dowód został przeprowadzony przy pomocy dziewięciu tez spośród podanych czternastu, to jest przy pomocy tez: I, II, IV, VI, IX, X, XI, XII i XIII. Pozostałe tezy – III, V, VII i VIII – zużytkujemy w następnym przykładzie.

Jako drugi przykład wybieram wyrażenie, które nie jest tezą, które zatem dołączone do zbioru tez daje sprzeczność, czyli wszystkie wyrażenia sensowne. Zakładam mianowicie, że:

$$\alpha = CCpqNCCpqq$$

Wyrażenie to traktuję tak samo, jak wyrażenie „α" w poprzednim przykładzie. Ponieważ nie jest kształtu „*N*ασ", przeto stosuję naprzód przekształcenie (A):

(A) *CCpqNCCpqq* ~ *CNCCpqNCCpqqr*

Otrzymane wyrażenie ma w poprzedniku negację implikacji, przeto przekształcam ją dalej na podstawie równoważności (C):

(C) *CNNCCpqNCCpqqr* ~ *CCpqCNNCCpqqr*

Stosuję dalej przekształcenie (D), wobec tego, że poprzednik jest implikacją:

(D) *CCpqCNNCCpqqr* ~ *CNpCNNCCpqqr*, *CqCNNCCpqqr*

Żadne z dwóch wyrażeń, uzyskanych przez rozkład, nie jest elementarne. Celem dalszej analizy wybieram wyrażenie pierwsze, przenosząc poprzednik, znajdujący się na drugim miejscu, na pierwsze miejsce:

(E) *CNpCNNCCpqqr* ~ *CNNCCpqqCNpr*

Do otrzymanego wyrażenia stosuję przekształcenie (B):

(B) *CNNCCpqqCNpr* ~ *CCCpqqCNpr*

i rozkładam wyrażenie, znajdujące się po prawej stronie, według wzoru (D):

(D) *CCCpqqCNpr* ~ *CNCpqCNpr*, *CqCNpr*

Na tym można analizę zakończyć, bo rzut oka na drugie wyrażenie, uzyskane z rozkładu, poucza, że wyrażenie to jest elementarne i nie jest tezą. Jeśli zaś choć jedno wyrażenie elementarne nie jest tezą, to i pierwotne wyrażenie, z którego uzyskaliśmy takie wyrażenie elementarne, nie może być tezą.

Obecnie należy przeprowadzić wywód formalny, że z wybranego przez nas wyrażenia „α", nie będącego tezą, wyprowadzić można zmienną „*p*", a więc wszystkie wyrażenia sensowne. Gdy w poprzednim przykładzie zaczynaliśmy wywód od końca, idąc kolejno w górę od wyrażeń po prawej stronie ku wyrażeniom po stronie lewej, to w tym przykładzie musimy zacząć od początku, to znaczy od wyrażenia „α", które przyjmujemy jako hipotetyczną tezę, i idąc zgodnie z przekształceniami od wyrażeń po lewej stronie ku wyrażeniom po stronie prawej, dotrzeć wreszcie musimy do wyrażenia elementarnego, nie będącego tezą. Wywód zatem przebiega w następujący sposób:

1 *CCpqNCCpqq*
I *p*/*CCpqNCCpqq* *q*/*r* × *C*1 – 2
2 *CNCCpqNCCpqqr*
V *p*/*Cpq* *q*/*NCCpqq* × *C*2 – 3
3 *CCpqCNNCCpqqr*
VII *r*/*CNNCCpqqr* × *C*3 – 4
4 *CNpCNNCCpqqr*
X *p*/*Np* *q*/*NNCCpqq* × *C*4 – 5
5 *CNNCCpqqCNpr*
III *p*/*CCpqq* *q*/*CNpr* × *C*5 – 6
6 *CCCpqqCNpr*
VIII *p*/*Cpq* *r*/*CNpr* × *C*6 – 7
7 *CqCNpr*
7 *q*/*CpCNpq* × *C*I – 8
8 *CNpr*
8 *p*/*NCpCNpq* *r*/*p* × 9
9 *CNNCpCNpqp*
III *p*/*CpCNpq* *q*/*p* × *C*9 – 10
10 *CCpCNpqp*

10 $\times$ $C1-11$
11 p

Dowód został przeprowadzony przy pomocy sześciu tez spośród podanych trzynastu, to jest przy pomocy tez I, III, V, VII, VIII i X. Wśród nich znajdują się te wszystkie cztery tezy, które nie były potrzebne w wywodzie poprzednim.

5. Zbiór trzynastu tez, które wystarczają do udowodnienia wszystkich innych tez rachunku implikacyjno-negacyjnego, stanowi aksjomatyczną podstawę tego rachunku. Nie jest to jeszcze układ aksjomatów, nie składa się bowiem z tez od siebie niezależnych, a układ aksjomatów winien być niezależny; wskazuje nam jednakowoż jasną i prostą drogę, jak wyszukać układ aksjomatów. Jeśli bowiem z jakiegoś zbioru niezależnych od siebie tez będziemy mogli przez podstawianie i odrywanie wywieść tezy od I do XIII, to taki zbiór tez będzie układem aksjomatów rachunku implikacyjno-negacyjnego.

Dziwnym trafem trzy spośród owych tez trzynastu wystarczają do udowodnienia wszystkich pozostałych. Są to tezy VII, VIII i IX. Stanowią one organiczną całość, którą ujęliśmy w równoważność dedukcyjną:

(D) $CC\alpha\beta\gamma \sim CN\alpha\gamma,\ C\beta\gamma$

Pod tym względem układ, złożony z tez VII, VIII i IX, jest, o ile mi wiadomo, jedyny, i przewyższa wszystkie inne znane mi układy aksjomatyczne, złożone jakby sztucznie z tez rozmaitego rodzaju. Nadmieniam, że zdołałem wykryć ten układ właśnie dzięki przedstawionemu wyżej dowodowi aksjomatyzowalności.

Przedstawiam obecnie wywód tez I–VI oraz X–XIII z układu VII, VIII i IX.

1 *CCCpqrCNpr* VII
2 *CCCpqrCqr* VIII
3 *CCNprCCqrCCpqr* IX
2 p/Cpq q/r r/Cqr $\times$ $C2-4$
4 *CrCqr*
4 r/Cpr $\times$ 5
5 *CCprCqCpr*
1 q/r $r/CqCpr$ $\times$ $C5-6$
6 *CNpCqCpr*
3 $r/CqCpr$ q/s $\times$ $C6-7$
7 *CCsCqCprCCpsCqCpr*
7 s/Cpr $\times$ $C5-8$
8 *CCpCprCqCpr*
4 r/p q/p $\times$ 9
9 *CpCpp*
8 r/p $\times$ $C9-10$
10 *CqCpp*
10 $q/CrCqr$ $\times$ $C4-11$

11 *Cpp*
11 *p*/*Cpq* × 12
12 *CCpqCpq*
1 *r*/*Cpq* × *C*12–13
13 *CNpCpq*
13 *q*/*r* × 14
14 *CNpCpr*
3 *r*/*Cpr* × *C*14–15
15 *CCqCprCCpqCpr*
2 *q*/*r* *r*/*CqCpr* × *C*5–16
16 *CrCqCpr*
15 *q*/*r* *p*/*q* *r*/*Cpr* × *C*16–17
17 *CCqrCqCpr*
7 *s*/*Cqr* × *C*17–18
18 *CCpCqrCqCpr* X
18 *p*/*CNpr* *q*/*Cqr* *r*/*CCpqr* × *C*3–19
19 *CCqrCCNprCCpqr*
19 *q*/*r* *r*/*CqCpr* *p*/*s* × *C*16–20
20 *CCNsCqCprCCsrCqCpr*
1 *p*/*q* *q*/*Cpr* *r*/*CCpqCpr* × *C*15–21
21 *CNqCCpqCpr*
20 *s*/*q* *q*/*Cpq* × *C*21–22
22 *CCqrCCpqCpr*
22 *q*/*CpCqr* *r*/*CqCpr* *p*/*s* × *C*18–23
23 *CCsCpCqrCsCqCpr* XI
18 *p*/*Np* *q*/*p* *r*/*q* × *C*13–24
24 *CpCNpq* I
24 *p*/*Np* × 25
25 *CNpCNNpq*
19 *q*/*r* *r*/*Cqr* × *C*4–26
26 *CCNpCqrCCprCqr*
26 *q*/*NNp* *r*/*q* × *C*25–27
27 *CCpqCNNpq* IV
27 *P*/*Np* *q*/*Cpq* × *C*13–28
28 *CNNNpCpq*
26 *p*/*NNp* *q*/*p* *r*/*q* × *C*28–29
29 *CCNNpqCpq* III
27 *q*/*p* × *C*11–30
30 *CNNpp*
3 *p*/*Np* *r*/*p* × *C*30–31
31 *CCqpCCNpqp*
31 *q*/*p* *C*11–32

32 *CCNppp* II

24 p/q q/r × 33

33 *CqCNqr*

22 r/CNqr × *C*33 – 34

34 *CCpqCpCNqr*

27 p/Cpq q/CpCnqr × *C*34 – 35

35 *CNNCpqCpCNqr*

20 s/NCpq q/p p/Nq × *C*35 – 36

36 *CCNCpqrCpCNqr* V

27 p/r q/Cqr × *C*4 – 37

37 *CNNrCqr*

34 p/NNr q/Cqr r/s × *C*37–38

38 *CNNrCNCqrs*

26 p/Nr q/NCqr r/s × *C*38 – 39

39 *CCNrsCNCqrs*

19 q/CNrs r/CNCqrs × *C*39 – 40

40 *CCNpCNNCqrsCCpCNrsCNCqrs*

34 p/Np q/Cpq × *C*13 – 41

41 *CNpCNCpqr*

40 q/p r/q s/r × *C*41 – 42

42 *CCpCNqrCNCpqr* VI

27 p/q q/r × 43

43 *CCqrCNNqr*

22 q/Cqr r/CNNqr × *C*43 – 44

44 *CCpCqrCpCNNqr*

22 q/CpCNqr r/CNCpqr p/s × *C*43 – 45

45 *CCsCpCNqrCsCNCpqr*

45 s/CpCqr q/Nq × *C*44 – 46

46 *CCpCqrCNCpNqr* XIII

22 q/CNNpq r/Cpq p/r × *C*29 – 47

47 *CCrCNNpqCrCpq*

*22 q/CrCNNpq r/CrCpq p/s C*47 – 48

48 *CCsCrCNNpqCsCrCpq*

36 q/Nq × 49

49 *CCNCpNqrCpCNNqr*

48 s/CNCpNqr r/p p/q q/r × *C*49 – 50

50 *CCNCpNqrCpCqr* XIII

III. METODY DOWODZENIA NIEZALEŻNOŚCI TEZ W TEORII DEDUKCJI[9]

Już pierwsi twórcy teorii dedukcji, Frege i Peirce, umieli wywodzić jedne tezy z tez innych przez podstawianie i odrywanie. Ani oni jednakowoż, ani ich natępcy, aż do autorów *Principia mathematica* i Hilberta włacznie, nie umieli wykazywać, że pewna teza z danych tez innych nie daje się tą drogą wyprowadzić. Nie mogli więc dowieść, że stworzone przez nich układy aksjomatów teorii dedukcji są niezależne, to znaczy, że żaden z tych aksjomatów nie daje się wyprowadzić przez podstawianie i odrywanie z pozostałych. Istotnie, żadna z historycznych aksjomatyk teorii dedukcji nie jest niezależna; w każdej znajduje się jeden aksjomat zbędny, wynikający z pozostałych. W aksjomatyce Fregego, która składa się z następujących sześciu aksjomatów:

1 *CpCqp*
2 *CCpCqrCCpqCpr*
3 *CCpCqrCqCpr*
4 *CCpqCNqNp*
5 *CpNNp*
6 *CNNpp*

aksjomat 3 jest zbędny, bo wynika z dwóch pierwszych. W aksjomatyce *Principiów*, składającej się z definicji:

$$Cpq = ANpq$$

oraz z pięciu aksjomatów:

1 *CAppp*
2 *CqApq*
3 *CApqCqp*
4 *CApAqrCqCpr*
5 *CCqrCQpqCpr*

aksjomat 4 jest zbędny, bo wynika z pozostałych. Wreszcie w aksjomatyce Hilberta,[10] składającej się z 6 aksjomatów:

1 *CpCqp*
2 *CCpCpqCpq*
3 *CCpCqrCqPpr*
4 *CCqrCCpqCpr*
5 *CpCNpq*
6 *CCpqCCNpqq*

aksjomat 2 wynika z 3, 5 i 6.

Dodatek: dowód aksjomatu *CApAqrAqApr* na podstawie pozostałych aksjomatów z *Principiach* oraz def[inicji] implikacji.

[9] Rękopis ten oznaczony jest – na pierwszej stronie u góry – jako PRACA NR 4, i obejmuje 8 ponumerowanych stron. Pierwsza strona opatrzona jest ponadto datą: 15.01.1947 [JJJ].

[10] *Math. Ann.* Bd 88, S. 153. Sprawdzić! (Uwaga Łukasiewicza [JJJ].)

1 *Cpq* = *ANpq* Df.
2 *CAppp*
3 *CqApq*
4 *CApqCqp*
5 *CCqrCapqApr*
5 *p*/*Np*, 1 1 *q*/*r* × 6
6 *CCqrCCpqCpr*
6 *q*/*Cqr* *r*/*CCpqCpr* *p*/*s* × *C*6–7
7 *CCsCqrCsCCpqCpr*
7 *s*/*Cqr* *q*/*Cpq* *r*/*Cpr* *p*/*s* *C*7–8
8 *CCqrCCsCpqCsCpr*
8 *q*/*Arr* × *C*2 *p*/*r* – 10
9 *CCsCpArrCsCpr*
9 *s*/*Cqr* *p*/*Arq* × *C*5 *p*/*r* – 10
10 *CCqrCArqr*
6 *q*/*Arq* *p*/*Aqr* × 11
11 *CCarqrCCAqrArqCAqrr*
6 *q*/*CArq* *r*/*CCAqrArqCAqrr* *p*/*Cqr* × *C*11–C10–12
12 *CCqrCCAqrCrqCAqrr*
6 *q*/*Apq* *r*/*Aqr* *p*/*q* × *C*4–*C*3–13
13 *CqAqp*
6 *q*/*Apr* *r*/*AqApr* × *C*3 *q*/*Apr* *p*/*q* – *C*13 *q*/*p* *p*/*r* – 14
14 *CpAqApr*
12 *q*/*p* *r*/*AqApr* × *C*14 – *C*4 *r*/*AqApr* – 15
15 *CApAqAprAqApr*
5 *q*/*r* *r*/*Apr* *p*/*q* × *C*3 *q*/*r* – 16
16 *CAqrAqApr*
5 *q*/*Aqr* *r*/*AqApr* × *C*16–17
17 *CApAqrApAqApr*
6 *q*/*ApAqApr* *r*/*AqApr* *p*/*ApAqr* × *C*15–C17–18
18 *CApAqrApr*

(Dowód może być skrócony.)

Tworzyć świadomie,[11] a nie tylko przypadkowo, niezależne układy aksjomatów teorii dedukcji można było dopiero z chwilą znalezienia metody, wykazującej niezależność jednych tez od drugich. Metodę taką ogłosił po raz pierwszy w r. 1926 Paul Bernays w pracy „Axiomatische Untersuchung des Aussagenkalküls der *Principia mathematica*".[12] Metoda ta, polegająca na tworzeniu matryc, była znana jeszcze przed jej ogłoszeniem [przed Bernaysa] w Warszawie, gdzie [...] dowodził[em]

[11] Strona, od której zaczyna się to zdanie, opatrzona jest datą: 16.01.1947 [JJJ].
[12] *Math. Ztschr*. B. 25, 1926.

niezależności niektórych tez od pewnych innych tez, posługując się swą logiką trójwartościową, Tarski zaś stosował w pewnych przypadkach metodę strukturalną, która rzuciła światło na wszelkie dowody niezależności, zarówno w logice, jak w matematyce.

Dowody niezależności, przeprowadzane w matematyce – klasycznym przykładem jest dowód niezależności pewnika Euklidesa o równoległych od innych aksjomatów geometrii – polegały, jak mówiono, na interpretacji. Terminom, występującym w jakiejś aksjomatyce, nadawano nowe znaczenia w ten sposób, by te nowe znaczenia sprawdzały wszystkie aksjomaty z wyjątkiem jednego, który nie był sprawdzony. Stąd wnioskowano, że ten niesprawdzony aksjomat jest niezależny od innych, opierając się milcząco na zasadzie logicznej, że ze zdań prawdziwych nie może wynikać [zdanie] fałszywe. Byłoby jednak błędem myśleć, że jest to jedyna metoda badania niezależności; jest ona, jak okaże się niebawem, szczególnym przypadkiem metody ogólniejszej, którą można było sformułować, opierając się na przykładach dowodów niezależności, zaczerpniętych z logiki.

Najbardziej charakterystyczna jest metoda strukturalna, znaleziona przez Tarskiego, ponieważ nie nasuwa żadnej myśli, mającej związek z interpretacją terminów.

Zasadnicza idea wszystkich dowodów niezależności jest następująca. W sformalizowanym systemie dedukcyjnym teza *A* jest wtedy i tylko wtedy niezależna od zbioru tez *B*, gdy każda teza zbioru *B* posiada pewną własność *W*, dziedziczną ze względu na reguły wnioskowania, przyjęte w systemie, a własności tej *A* nie posiada. Przez własność, dziedziczną ze względu na reguły wnioskowania, rozumiem taką własność, która z tez posiadających tę własność, przechodzi na wszystkie tezy, wywnioskowane z owych tez początkowych. Że własność jakaś jest dziedziczna ze względu na pewną określoną regułę wnioskowania, to musi być udowodnione. Własnością taką może być prawdziwość, bo przyjmujemy tylko takie reguły wnioskowania, które od prawdy prowadzą do prawdy. Stąd metoda interpretacji podpada pod sformułowaną wyżej ideę dowodów niezależności. Nie jest ona jednak jedyną; każda inna własność, dziedziczna ze względu na reguły wnioskowania, jest równie dobra. Własnością taką może być, jak okazał Tarski, jakaś własność strukturalna, to znaczy jakaś własność wzoru napisanego, wyrażającego daną tezę. Oto przykład z teorii dedukcji. Tezy „*Cpp*", „*CpCCpqq*", „*CCpqCCqrCpr*", „*CCpCqrCqCpr*", „*CCpCqrCqCpr*", mają tę wspólną własność strukturalną, że w każdej z nich każda zmienna powtarza się parzystą ilość razy. Można łatwo okazać, że własność ta jest dziedziczna ze względu na reguły wnioskowania, przyjmowane zwykle w teorii dedukcji, to jest ze względu na regułę podstawiania i odrywania. Jest bowiem rzeczą oczywistą, że jakiekolwiek podstawienie, wykonane na tych tezach, musi być wykonane parzystą ilość razy, a więc każda litera, zawarta w wyrażeniu podstawionym, musi występować parzystą ilość razy. Ale własność ta jest także dziedziczna ze względu na regułę odrywania, bo jeśli każda zmienna w wyrażeniu „*Cαb*" pojawia się parzystą ilość razy, i każda zmienna w „*α*" występuje parzystą ilość razy, to i w oderwanym „β" każda zmienna będzie występować parzystą ilość razy, gdyż liczba parzysta odjęta od parzystej, daje liczbę parzystą. Wynika z tego, że tezy takie, jak „*CpCqp*", „*CCCpqpp*", „*CCCpqqCCqpp*", „*CCpCpqCpq*" są wszystkie niezależne od podanego powyżej zbioru tez, w których każda zmienna występuje parzystą ilość razy, gdyż w tych ostatnio wymienionych tezach przynajmniej jedna zmienna występuje nieparzystą ilość razy.

Metodę[13] strukturalną dla badania niezależności można zwłaszcza wtedy z łatwością stosować, gdy mamy do czynienia nie ze zbiorem tez, lecz z pewną tylko tezą, i to tezą nieodrywalną, i chcemy wykazać, że z tezy tej nie wynika jakaś inna teza. Przez tezę NIEODRYWALNĄ rozumiem taką tezę, do której nie można zastosować reguły odrywania, której wszelkie konsekwencje mogą być zatem uzyskane tylko przez podstawianie. Jest rzeczą jasną, że wszystkie tezy, w których po początkowych literach „*C*" następuje nie zmienna, lecz negacja „*N*", np. „*CNNpp*", „*CCNppp*", „*CCCNpqrCpr*" itp., są nieodrywalne. Na to bowiem, by móc uzyskać jakąś konsekwencję przez odrywanie z tezy „*CNNpp*", trzeba by mieć dwa podstawienia tej tezy, „*CNN*αα" i „*CNN*ββ", i jedno z tych podstawień musiałoby być równokształtne z „*NN*α", co nie jest możliwe, bo teza zaczynająca się od „*N*" nie może być równokształtna z tezą, zaczynającą się od „*C*". Podobnie „*CCCN*ααα" musiałoby być równokształtne z jakimś wyrażeniem kształtu „*CN*ββ", a „*CCCN*αβγ*C*αγ" z jakimś wyrażeniem kształtu „*CCN*δεζ", co także nie jest możliwe (wyrażenie, zaczynające się od trzech „*C*", po czym następuje „*N*", nie może być równokształtne z wyrażeniem, zaczynającym się od dwóch „*C*" z następującym „*N*"). Istnieją tezy czysto implikacyjne, które są nieodrywalne. Najłatwiej stowierdzić to przy pomocy następującej metody, którą po raz pierwszy stosował Tarski.

Chcemy stwierdzić, że prawo Peirce'a „*CCCpqpp*" jest nieodrywalne. Postępujemy w następujący sposób. Gdyby prawo to było odrywalne, to musiałyby istnieć dwa podstawienia tego prawa, np. „*CCC*αβαα" i „*CCC*γδγγ" takie, że poprzednik drugiego podstawienia byłby równokształtny z pierwszym podstawieniem. Tylko wtedy bowiem moglibyśmy zastosować regułę odrywania. Oznaczmy równokształtnośc znakiem „≈", którym oznaczamy w geometrii przystawanie. Otrzymalibyśmy zatem wzór:

$$CC\gamma\delta\gamma \approx CC\alpha\beta\alpha\alpha$$

By wzór ten był spełniony, poprzednik jednego wyrażenia musi być równokształtny poprzednikowi drugiego wyrażenia, a następnik pierwszego wyrażenia następnikowi drugiego. Otrzymujemy zatem:

$$C\gamma\delta \approx CC\alpha\beta\alpha \text{ oraz } \gamma \approx \alpha$$

Z wyrażenia po lewej stronie otrzymujemy wreszcie na podstawie takiego samego rozważania następujące kongruencje:

$$\gamma \approx C\alpha\beta \text{ oraz } \delta \approx \alpha$$

[13] Zdanie to zostało opatrzone datą: 24.01.1947 [JJJ].

Z kongruencji $\gamma \approx \alpha$ i $\gamma \approx C\alpha\beta$ wynika, że $\alpha \approx C\alpha\beta$, co jest niemożliwe, bo część nie może być równokształtna z całością. Stąd wnioskujemy, że nie może być spełniona kongruencja: $CC\gamma\delta\gamma \approx CCC\alpha\beta\alpha\alpha$, wobec czego teza *CCCpqpp* jest nieodrywalna. Wszytkie jej konsekwencje są więc podstawieniami tej tezy. Otóż przez podstawienie teza *CCCpqpp* zmienić się może[14] dopiero na czwartym miejscu, a początkowe trzy „*C*" muszą pozostać bez zmiany. Stąd wynika, że tezy, nie zaczynające się od trzech „*C*", są niezależne od prawa Peirce'a, np. *CpCqp*, *CCpqCCqrCpr* itp.

Metoda strukturalna nie zawsze da się zastosować, ma jednak tę zaletę, iż nie ma nic wspólnego z metodą interpretacji, okazuje zatem, że metoda interpretacji nie jest jedyną metodą dowodzenia niezależności tez. Pewien związek z metodą interpretacyjną ma metoda matrycowa dowodzenia niezależności, która jako metoda ogólna ma szczególną wartość.

Metoda matrycowa polega na tym, że szuka się matrycy spełniającej wszystkie tezy zbioru *A* i dziedzicznej ze względu na reguły podstawiania oraz odrywania, a nie sprawdzającej jakiejś tezy *B*, której niezależność od zbioru *A* chcemy okazać. Mówimy, że dana matryca spełnia tezę *T*, jeśli przy wszystkich podstawieniach elementów matrycy – oznaczonych np. cyframi 1, 2, 3, ... – za zmienne, teza *T* przechodzi po redukcji zgodnie z matrycą w tzw. wartość wyróżnioną. Wartość tę oznaczamy zazwyczaj cyfrą 1, mogą być atoli matryce o większej liczbie wartości wyróżnionych. Elementy matrycy, oznaczone cyframi, nie mają żadnego zresztą znaczenia; są to tylko znaki, spełniające umowne równości, zaznaczone w matrycy. Matryca nazywa się normalną, jeśli w wierszu wyróżnionym w matrycy dla „*C*", to jest w implikacjach zaczynających się od wartości wyróżnionej, wartość implikacji jest tylko wtedy wyróżniona, gdy i następnik implikacji jest wyróżniony. Przykłady wyjaśnią, o co tu chodzi.

Załóżmy, że mamy zbadać metodą matrycową, iż układ aksjomatów:

1 *CCpqCCqrCpr*

2 *CCNppp*

3 *CpCNpq*

jest niezależny, to znaczy, że żaden z tych trzech aksjomatów nie wynika przy pomocy przyjętych w systemie reguł wnioskowania, tj. reguły podstawiania i odrywania. Budujemy trzy następujące matryce:

C	1	2	*N*
•1	1	2	1
2	1	1	1

C	1	2	*N*
1[1]	1	2	2
2	1	1	2

C	1	2	3	*N*
•1	1	3	3	3
2	1	3	1	1
3	1	1	1	1

Wszystkie trzy matryce są normalne, bo w wierszu 1 wartość implikacji równa się 1 tylko wtedy, gdy następnik równa się 1, czyli 1 stoi tylko w pionie, oznaczonym

[14] Strona, od której zaczyna się to słowo, opatrzona jest datą: 25.01.1947 [JJJ].

u góry przez 1. Matryce te są więc dziedziczne ze względu na regułę odrywania. Wyraz wyróżniony 1 oznaczony jest gwiazdką. Matryca pierwsza dowodzi niezależności aksjomatu 3 od dwóch pierwszych. Dwa pierwsze bowiem dają stale 1 przy wszelkich kombinacjach podstawień 1 i 2 za zmienne, trzeci zaś aksjomat daje dla $p/1$ i $q/2$: $C1CN12 = C1C12 = C12 = 2$. Matryca druga dowodzi niezależności aksjomatu 2 od 1 i 2; albowiem 1 i 3 są przez matrycę sprawdzone, a dla $p/2$ otrzymujemy z aksjomatu 2: $CCN222 = CC222 = C12 = 2$. Ostatnia wreszcie matryca okazuje, że aksjomat 1 jest niezależny od pozostałych. Aksjomaty 2 i 3 są bowiem sprawdzone przez matrycę, a z aksjomatu 1 otrzymujemy dla $p/2$ $q/3$ $r/2$: $CC23CC32C22 = C1C13 = C13 = 3$.

Metoda matrycowa ma pewien związek z metodą interpretacji; można bowiem przynajmniej w dwóch pierwszych matrycach przyjąć, że N oznacza raz *verum*, drugi raz *falsum*, a elementy matrycy 1 i 2 oznaczają odpowiednio prawdę i fałsz. Interpretacja taka w trzecim wypadku, gdy tam są trzy elementy matrycy, byłaby już trudniejsza i wymagałaby stworzenia jakiegoś systemu trójwartościowego.