Izabela Bondecka-Krzykowska

Dowody komputerowe a status epistemologiczny twierdzeń matematyki

Filozofia Nauki 7/3/4, 103-116

1999

Artykuł został zdigitalizowany i opracowany do udostępnienia w internecie przez Muzeum Historii Polski w ramach prac podejmowanych na rzecz zapewnienia otwartego, powszechnego i trwałego dostępu do polskiego dorobku naukowego i kulturalnego. Artykuł jest umieszczony w kolekcji cyfrowej bazhum.muzhp.pl, gromadzącej zawartość polskich czasopism humanistycznych i społecznych.

Tekst jest udostępniony do wykorzystania w ramach dozwolonego użytku.

MUZEUM HISTORII POLSKI

Filozofia Nauki
Rok VII, 1999, Nr 3—4(27—28)

Izabela Bondecka-Krzykowska

Dowody komputerowe a status epistemologiczny twierdzeń matematyki

Coraz powszechniejsze używanie komputerów w matematyce stawia na nowo problem istoty dowodu matematycznego, problem metod dopuszczalnych w matematyce i generalnie problem natury matematyki jako nauki. Celem tej pracy jest przedstawienie różnych poglądów związanych z filozoficznymi konsekwencjami uznania dowodów komputerowych w matematyce.

1. SPOSOBY WYKORZYSTANIA KOMPUTERÓW W MATEMATYCE

Komputery były wykorzystywane w matematyce od początków swego istnienia i to na różne sposoby. Najstarszym — i nadal najczęstszym — zastosowaniem komputera są obliczenia numeryczne. Komputer można wtedy traktować jako maszynę liczącą, jako bardziej skomplikowany rodzaj liczydła czy kalkulatora, a jego użycie pomaga jedynie człowiekowi skrócić czas długich i/lub złożonych obliczeń. W podobny sposób stosuje się komputery do rozwiązywania różnego rodzaju równań i do obliczania całek. Maszyna wykonuje wtedy takie same obliczenia jak matematyk, tyle tylko, że robi to szybciej i prawie nigdy nie popełnia błędów.

Komputery mają jednak wiele bardziej wyrafinowanych zastosowań. Wykorzystuje się je np. do eksperymentowania z obiektami matematycznymi i do badania ich natury. Samą możliwość komputerowego badania obiektów matematycznych uważa się czasem za argument na rzecz obiektywnego ich istnienia[1].

Najwięcej dyskusji budzi użycie komputerów w dowodzeniu twierdzeń matematycznych. Dowodzenie jest działalnością, która ma istotny wpływ na ustanawianie

---

[1] Porównaj w tej sprawie np. [3].

nowych prawd w matematyce. Za prawdziwe w matematyce uznaje się bowiem tylko te twierdzenia, które posiadają dowód. Przez wiele wieków człowiek posiadał monopol na dowodzenie twierdzeń: były one od początku do końca dziełem matematyków. Obecnie coraz częściej do procesu dowodzenia włączane są na różne sposoby komputery. Jednym z takich sposobów jest użycie komputera jako narzędzia pomocniczego w dowodzeniu. Część dowodu matematycznego — zwykle wymagająca długich i skomplikowanych obliczeń, np. sprawdzenia wielu przypadków — jest przeprowadzana przy wykorzystaniu komputera. Tak otrzymane dowody nazywane są często „dowodami wspomaganymi komputerowo", bowiem samo rozumowanie dedukcyjne przeprowadzane jest przez człowieka, a komputer pełni tylko rolę pomocniczą. Powstają również dowody wykonane w całości przez komputer, który wykonuje wtedy nie tylko obliczenia, ale również całe rozumowanie dowodowe.

Status epistemologiczny twierdzeń, których dowody otrzymano przy pomocy komputera (czy to dowody wspomagane komputerowo, czy też w pełni automatyczne) jest jeszcze kwestią otwartą i ciągle dyskutowaną.

2. AUTOMATYCZNE DOWODZENIE TWIERDZEŃ

Automatyczne dowodzenie twierdzeń w nierozerwalny sposób wiąże się z ideą mechanizacji rozumowań matematycznych, tj. znalezienia uniwersalnych metod (algorytmów) przeprowadzania pewnych rozumowań, np. dowodów twierdzeń matematycznych.

Idea ta nie jest nowa. Już na przełomie XVII i XVIII wieku G.W. Leibniz próbował stworzyć język umożliwiający wyrażenie wszystkich pojęć nauki oraz uniwersalną metodę rachunkową — pozwalającą na rozwiązywanie wszystkich problemów nauki — nazywał ją *calcus uniwersalis* lub *logica mathematica*. Powstanie i rozwój logiki matematycznej na przełomie XIX i XX wieku było częściową realizacją tego ambitnego projektu i jednocześnie impulsem do rozwoju badań nad mechanizacją rozumowań.

Pojawienie się komputerów umożliwiło praktyczne wykorzystanie pewnych istniejących już wcześniej algorytmów automatycznego dowodzenia. Badania nad mechanizacją rozumowań włączono z czasem w tok badań nad tzw. sztuczną inteligencją. Powstawały i nadal powstają liczne programy dowodzące tez z zakresu różnych działów matematyki. Tezy te można podzielić na dwie grupy: (1) takie, dla których znane są już dowody tradycyjne, tj. nie korzystające z pomocy komputera; (2) takie, które takich dowodów nie posiadają, czyli są istotnie nowymi wynikami w matematyce.

Na podstawie wyników uzyskanych przez Turinga, Churcha i Gödla wiadomo, że nie istnieje uniwersalna metoda dowodzenia twierdzeń matematycznych, tj. nie jest możliwe skonstruowanie algorytmu dowodzenia dla wszystkich twierdzeń matematyki. Nie zmienia to faktu, że w matematyce istnieją twierdzenia posiadające tylko dowód przeprowadzony przez komputer, a co za tym idzie — istnieje problem miejsca i roli komputera w matematyce jako narzędzia do dowodzenia twierdzeń. Otwartą kwestią pozostaje również rola komputera w matematyce jako narzędzia pomocniczego w dowodzeniu. Taką rolę pełnią bowiem komputery w tzw. dowodach wspomaganych komputerowo.

3. DOWODY WSPOMAGANE KOMPUTEROWO

Dowody wspomagane komputerowo pojawiają się w matematyce częściej niż dowody automatyczne. Korzysta się w nich z pomocy komputera tylko w pewnej części rozumowania dowodowego, która jest szczególnie długa lub/i złożona, natomiast samo rozumowanie jest przeprowadzane przez matematyka. W tym przypadku komputer jest tylko narzędziem w ręku człowieka.

Często dyskutowanym, choć nie pierwszym twierdzeniem posiadającym dowód wspomagany komputerowo, jest twierdzenie o czterech barwach. Problem czterech barw został sformułowany w 1852 roku w postaci pytania o minimalną liczbę kolorów potrzebnych do pokolorowania państw na każdej mapie tak, że sąsiednie państwa otrzymają inny kolor. Łatwo pokazać, że do takiego pokolorowania nie wystarczą trzy kolory, ale nie udało się tego pokazać dla czterech kolorów. Pojawiło się zatem przypuszczenie, że cztery kolory wystarczą do pokolorowania państw na każdej mapie. Przez ponad sto lat matematycy próbowali udowodnić tę hipotezę. Dopiero w 1976 roku Appel i Haaken przedstawili jej dowód, który w znaczący sposób korzysta z pomocy komputera (opis historii omawianego twierdzenia oraz szkic jego dowodu można znaleźć np. w pracy [2]). Schemat dowodu jest prosty. Jest to dowód indukcyjny, wymagający sprawdzenia trzech przypadków. Pierwszy z nich jest banalny, drugi wymaga sprawdzenia kilku podprzypadków, natomiast trzeci ma ponad tysiąc podprzypadków, a z większością z nich nie można się uporać bez odwołania do pomocy szybkich komputerów.

Istnieje wiele twierdzeń w matematyce, których dowody polegają na sprawdzaniu wszystkich możliwości. Jednak twierdzenie o czterech barwach wyróżnia się spośród nich z dwóch powodów.

(1) Twierdzenie to nie posiada tradycyjnego dowodu matematycznego, tj. takiego, w którym nie korzysta się z pomocy komputera. Co więcej, twierdzi się, że obecny dowód jest bardzo bliski najprostszemu z możliwych, a co za tym idzie, można przypuszczać, że z żadnego z możliwych dowodów nie da się wyeliminować użycia komputera. Nie można oczywiście odrzucić ewentualności, że w niedalekiej przyszłości zdolny uczeń szkoły średniej przedstawi kilkustronicowy tradycyjny dowód tego twierdzenia. Jest to jednak mało prawdopodobne.

(2) Komputer został w tym dowodzie wykorzystany przez Appla i Haakena w szczególny sposób. Opisali oni dwie procedury. Jedna z nich generowała elementy pewnego zbioru potrzebnego w dowodzie twierdzenia, natomiast druga sprawdzała, czy elementy tego zbioru posiadają pewną własność. Unikalność wykorzystania tych

procedur polega na tym, że w wypadku, gdy stwierdzono na podstawie procedury sprawdzającej, że jakiś element nie ma żądanej własności, modyfikowany był sposób znajdowania zbioru, tak by otrzymane później zbiory nie mogły zawierać kłopotliwego elementu. Wyraźnie widoczny jest tu zatem element dialogu człowieka z komputerem. Człowiek, wykorzystując dane z programu sprawdzającego, budował nowe sposoby znajdowania zbiorów, co z kolei powodowało modyfikację programu generującego zbiory. Można pokusić się o stwierdzenie, że to właśnie komputer podpowiadał człowiekowi nowe strategie.

W wypadku twierdzenia o czterech barwach z całą jaskrawością ujawniły się problemy natury filozoficznej związane z dowodami komputerowymi. Wcześniej bowiem albo otrzymane dowody dotyczyły twierdzeń, które miały już dowody tradycyjne, albo też autorzy dowodów dla istotnie nowych tez traktowali w sposób marginalny filozoficzne konsekwencje użycia komputera w dowodzie. Szczególne zainteresowanie filozofów i matematyków właśnie tym a nie innym dowodem komputerowym na pewno związane jest również z faktem, że dowodzone twierdzenie przez dziesiątki lat pozostawało tylko hipotezą, pomimo iż jego sformułowanie było proste a problem był dobrze znany i rozpatrywany przez wielu matematyków — zarówno ekspertów, jak i amatorów. Wszystkie próby rozwiązania okazywały się bezskuteczne i dopiero komputery umożliwiły przeprowadzenie odpowiedniego dowodu. To właśnie powszechna znajomość samego problemu oraz świadomość konieczności użycia komputera w dowodzie Appla i Haakena sprawiły, że dowód ten był i jest tak szeroko dyskutowany. Są matematycy, którzy uważają, że nie jest to pełnoprawny dowód matematyczny, a w odniesieniu do problemu czterech barw nigdy nie używają terminu „twierdzenie".

4. CZY DOWODY KOMPUTEROWE SĄ PEŁNOPRAWNYMI DOWODAMI MATEMATYCZNYMI?

Pojęcie dowodu jest jednym z najczęściej używanych pojęć matematycznych i choć intuicje związane z tym pojęciem są jasne dla wszystkich matematyków, to próby uściślenia go prowadzą do bardzo różnych opisów. Myślę, że matematycy zapytani o cechy dowodu podaliby zbliżone, ale nie identyczne listy tych cech. Próbę uściślenia pojęcia dowodu matematycznego podjął m.in. T. Tymoczko w często dyskutowanej pracy „The Four-Color Problem and Its Philosophical Significance" (patrz [9]). Autor podaje w niej trzy główne, jego zdaniem, cechy dowodu matematycznego:

(1) to, że jest on przekonujący dla społeczności matematyków;

(2) to, że jest możliwy do przeglądnięcia i sprawdzenia;

(3) to, że daje się sformalizować.

Najmniej sporną kwestią jest twierdzenie, że dowód musi być przekonujący. Tę cechę posiada wiele dowodów komputerowych, w tym także dowód twierdzenia o czterech barwach. Większość matematyków uważa ten ostatni dowód za wiarygodny i wystarczający, by uznać hipotezę czterech barw za twierdzenie matematyczne.

Twierdzenie, że dowód powinien dać się sformalizować, raczej nie budzi sporów, pomimo iż większość twierdzeń matematycznych nie posiada dowodów formalnych. Dowód formalny, jak definiuje się go w logice, to skończony ciąg formuł teorii formalnej spełniający określone warunki. Większość matematyków i filozofów wierzy, że każdy poprawny dowód matematyczny można sformalizować, tj. znaleźć odpowiedni język formalny i teorię, w której nieformalny dowód może być przekształcony lub tylko uzupełniony do dowodu formalnego. Dotyczy to również dowodów komputerowych. W wypadku twierdzenia o czterech barwach przyjmuje się, że istnieje dowód formalny w odpowiedniej teorii grafów, pomimo że nikt dotąd nie podał takiego dowodu ani nie przedstawił uzasadnienia, że on istnieje. Nie jest to jednak cecha różniąca tradycyjne dowody matematyczne od dowodów komputerowych.

Najwięcej sporów budzi problem możliwości przejrzenia dowodu matematycznego. Tymoczko odróżnia możliwość przejrzenia dowodu matematycznego od zrozumienia go, twierdząc, że istnieje wiele tradycyjnych dowodów, których przeciętny matematyk nie rozumie, ale nie ma żadnego, którego nie mógłby w całości przejrzeć. Dowód twierdzenia o czterech barwach, jak wiele innych dowodów komputerowych, tej ostatniej cechy nie posiada. Nikt bowiem nie widział w całości dowodu tego twierdzenia, a gdyby nawet istniał wydruk komputerowy tego dowodu, nie byłby on ze względu na swoją długość możliwy do przejrzenia przez pojedynczego człowieka. Istnieją jednak w matematyce tradycyjne dowody, nie korzystające z pomocy komputera, które są tak długie i tak zawiłe, że można z całą pewnością stwierdzić, iż poza samym autorem przejrzało go tylko kilku matematyków. Czym zatem różnią się dowody komputerowe od dowodów tradycyjnych? Co sprawia, że niektórzy matematycy i filozofowie nie uznają dowodów komputerowych za pełnoprawne dowody matematyczne, a co za tym idzie — nie chcą używać terminu *twierdzenie* w odniesieniu np. do hipotezy czterech barw?

Problem tkwi m.in. w wiarygodności dowodów wspomaganych komputerowo. Czy poprawność dowodów wspomaganych komputerowo jest tak samo pewna jak w wypadku dowodów tradycyjnych?

5. WIARYGODNOŚĆ DOWODÓW KOMPUTEROWYCH

Twierdzenia matematyki są powszechnie uważane za prawdy o najwyższym stopniu pewności, a stopień pewności twierdzeń nauk przyrodniczych nie może się z nim równać. Twierdzenia matematyki są bowiem uznawane tylko na podstawie dowodów — bez odwoływania się do wyników eksperymentu, które są zawsze obarczone błędem. Używanie w dowodach matematycznych komputera obala tę opinię, ponieważ wprowadza ono do matematyki rodzaj eksperymentu – eksperyment komputerowy.

Twierdzenie, że eksperyment ten jest wiarygodniejszy od innych wynika, jak twierdzą niektórzy filozofowie, z niczym nieuzasadnionej wiary w nieomylność tych urządzeń.

T. Tymoczko porównuje zaufanie, jakim cieszą się komputery, do wiary w pewien autorytet. Opisuje on Sajmona, który jest autorytetem w hipotetycznej społeczności matematyków na Marsie. Wszelkie wyniki, o których Sajmon twierdził, że zostały przez niego sprawdzone, są włączane do zasobu twierdzeń pod rubryką „Sajmon powiedział", nawet wtedy, gdy nie istnieją tradycyjne dowody tych faktów. Może zatem istnieć pokusa zapisywania pod tą rubryką twierdzeń, których Sajmon nawet nie próbował sprawdzać. Tymoczko twierdzi, że twierdzenie, dowiedzione «za pomocą komputera», jest analogiczne do twierdzenia „Sajmon powiedział" i że nie ma żadnej różnicy pomiędzy odwołaniem do wyników komputerowych a odwołaniem do autorytetu Sajmona.

Przedstawiona analogia jest bardzo często krytykowana. Błędne jest porównanie wiary w prawdziwość wyników komputerowych z wiarą w nieomylność i prawdomówność Sajmona. Nikt bowiem nie twierdzi, że rezultaty komputerowe są poprawne, ponieważ komputery są autorytetami, jak to miałoby być w przypadku Sajmona. Żaden z matematyków nie ma również w zwyczaju przedstawiania wyników eksperymentu komputerowego, gdy go nie przeprowadził (por. [7]).

Powodem, dla którego matematycy zaakceptowali dowód twierdzenia o czterech barwach i innych podobnych twierdzeń matematycznych, nie jest zatem ślepa wiara w nieomylność komputerów, lecz fakt sprawdzenia uzyskanych wyników. Sprawdzenie to musi polegać zarówno na ocenie poprawności programu, jak i działania maszyny, która go wykonuje. Można to robić na różne sposoby:

(1) sprawdzić poprawność programu;
(2) wykonać program kilka razy na różnych maszynach;
(3) napisać inny program rozwiązujący dane zagadnienie i sprawdzić jego wyniki z uzyskanymi poprzednio.

Sprawdzaniem poprawności działania komputera jako maszyny zajmują się inżynierowie. Obliczają oni pewne parametry, które musi spełniać urządzenie, by uznać jego działanie za poprawne. Można również poza takim sprawdzaniem wykonać ten sam program na różnych maszynach, a identyczne wyniki mogą gwarantować, że komputer wykonał napisany program w sposób poprawny. (Takiego właśnie sprawdzenia dokonali Appel i Haaken, badając twierdzenie o czterech barwach.)

Musimy jednak pamiętać, iż z wynikami obliczeń komputerowych związane są pewne ograniczenia. W wypadku liczb rzeczywistych już sama ich reprezentacja w komputerze jest często opatrzona błędem. Jeżeli dana liczba rzeczywista nie może być reprezentowana w sposób dokładny, zostaje zastąpiona najbliższą jej liczbą, reprezentowalną w komputerze, a w toku dokonywanych obliczeń błąd ten może wzrosnąć bardzo znacząco. Pisząc program komputerowy, przewidujemy, jakiego rzędu błędy mogą się pojawić w trakcie jego działania. Dla uznania poprawności wyników komputerowych potrzebna jest analiza możliwych błędów zaokrągleń i reprezentacji, a znalezione oszacowanie błędu powinno być uwzględniane przy publikacji wyników.

Taka analiza leży na pograniczu sprawdzania komputera jako maszyny i sprawdzenia samego programu. W pewnych wypadkach jej brak może mieć znaczący wpływ na prawdziwość otrzymywanych wyników, a właściwie na ich interpretację, szczególnie w zastosowaniu komputerów do rozwiązywania zagadnień tzw. matematyki ciągłej (por. [5]).

Gdy stwierdzimy już, że komputer «robi to, co powinien», pozostaje kwestia sprawdzenia poprawności programu. Ocena tej poprawności musi obejmować zarówno sprawdzenie samego algorytmu, jak i sprawdzenie jego implementacji, użytej w danym programie. Oba te zagadnienia leżą w gestii informatyki. Sprawdzanie poprawności algorytmów było wykonywane nawet przed pojawieniem się komputerów i nie jest zagadnieniem trudnym, natomiast więcej problemów może przysparzać ocena poprawności implementacji. Programy komputerowe zawierają często luki i słabe punkty, które mogą bardzo długo pozostać niezauważone, a tym samym mogą pozostać niezauważone również niepoprawne dowody twierdzeń, używające tych programów. Te same cechy posiadają jednak dowody, w których nie korzysta się z pomocy komputera. Najlepszym przykładem może być tutaj rozumowanie Kempa, który twierdził, iż udowodnił hipotezę czterech barw w 1879 roku i dopiero 10 lat po opublikowaniu jego «dowodu» odkryto zawartą w nim lukę. Zatem takie luki bądź słabe punkty są cechą nie tylko dowodów komputerowych, lecz dowodów matematycznych w ogóle.

Ponadto informatycy przeprowadzają dowody poprawności programów napisanych w językach wysokiego poziomu, takich jak np. Pascal. Już sama struktura języka programowania wysokiego poziomu utrudnia popełnienie błędu logicznego. Dlatego nietrudno sprawdzić poprawność programu napisanego w takim języku. Co prawda w wypadku twierdzenia o czterech barwach program wykorzystany w dowodzie został napisany w języku asembler, który nie jest językiem wysokiego poziomu, jednak nietrudno będzie zaprogramować odpowiednie procedury np. w języku Pascal i następnie sprawdzić ich poprawność. Być może nowy program będzie mniej efektywny niż program Appla i Haakena, ale pozwoli na rozwianie wątpliwości związanych z poprawnością implementacji.

Istnieje również możliwość napisania innego programu rozwiązującego dany problem. Gdy taki program istnieje i daje identyczne wyniki, to stopień pewności co do ich poprawności zdecydowanie wzrasta. W przypadku twierdzenia o czterech barwach istnieje dowód wykorzystujący inny program niż w dowodzie Appla i Haakena[2].

Można kwestionować sprawdzanie wyników uzyskanych przez komputer za pomocą innego komputera (tak jak to robi Tymoczko w [9]). Warto jednak powtórzyć, że twierdzenia, które posiadają bardzo długi i skomplikowany dowód tradycyjny, nie są często sprawdzane przez więcej niż kilka osób. Dlaczego zatem, skoro uznajemy za wystarczające takie właśnie sprawdzenie wyników uzyskanych przez człowieka,

---

[2] Inny dowód twierdzenia o czterech barwach został podany w [1].

niektórzy filozofowie nie chcą uznać sprawdzenia wyników uzyskanych komputerowo przez inny komputer? Ponadto człowiek jest istotą omylną i bardzo często na skutek zmęczenia popełnia błędy. Czy zatem twierdzenie — z dowodem sprawdzonym w całości przez jedną lub dwie osoby — jest bardziej wiarygodne? Wręcz przeciwnie. To właśnie w dowodach komputerowych prawdopodobieństwo wystąpienia błędu jest mniejsze niż w dowodach wykonywanych przez człowieka. Komputery bowiem nigdy się nie męczą i prawie nigdy, gdy poprawna procedura zostanie dobrze zaimplementowana, nie popełniają błędów. Ponadto dowodzenie twierdzenia lub sprawdzanie poprawności dowodu jest zawsze wiarygodne tylko z pewnym prawdopodobieństwem i nie ma znaczenia, czy instrumentem dowodzenia jest człowiek, czy maszyna (por. [7] i [8]).

6. FILOZOFICZNE KONSEKWENCJE UZNANIA KOMPUTEROWYCH DOWODÓW TWIERDZEŃ ZA PEŁNOPRAWNE W MATEMATYCE

Najpoważniejszą, jak twierdzi Tymoczko w [9], konsekwencją akceptacji twierdzeń dowodzonych komputerowo jest konieczność modyfikacji pojęcia dowodu. Aby umożliwić stosowanie w dowodach odwołań do komputera, można dokonać zmian na dwa sposoby:
(1) przez wprowadzenie nowej metody dowodowej – eksperymentu komputerowego;
(2) przez dopuszczenie, by dowody zawierały fragmenty wspomagane komputerowo.

Komputerowe dowody twierdzeń wprowadzają do matematyki nową metodę ustanawiania prawd matematycznych. Jest tylko kwestią przyjętej terminologii, czy nazwiemy tę nową technikę „metodą dowodową" czy też „eksperymentem" (por. [9]). Nie można jednak zaprzeczyć, że w obu wypadkach do uznania dowodów komputerowych potrzebna jest wiara w poprawność wyników eksperymentu komputerowego.

Powszechne uznanie przez społeczność matematyków twierdzenia o czterech barwach i innych twierdzeń dowodzonych przy użyciu komputera, a co za tym idzie — wprowadzenie eksperymentu komputerowego do matematyki, stawia zarówno przed matematykami, jak i filozofami konieczność ponownego przemyślenia następujących tez:

- Wszystkie twierdzenia matematyczne są znane *a priori*.
- Matematyka, w odróżnieniu od nauk przyrodniczych, nie ma treści empirycznej.
- Matematyka, w odróżnieniu od nauk przyrodniczych, w swej argumentacji używa tylko dowodów, podczas gdy nauki przyrodnicze wykorzystują w tym celu eksperyment.
- Twierdzenia matematyczne są pewne w takim stopniu, do którego nie można porównać żadnego twierdzenia z zakresu nauk przyrodniczych.

Pomiędzy matematyką i wiedzą matematyczną a naukami przyrodniczymi i wiedzą naukową istnieje przepaść. Większość filozofów uznaje ten fakt bez zastrzeżeń. Często w odniesieniu do wiedzy matematycznej używa się określeń: wiedza *a priori*, wrodzona, formalna, pewna, analityczna — w przeciwieństwie do wiedzy naukowej, opisywanej jako wiedza *a posteriori*, wyuczona, empiryczna, wątpliwa, syntetyczna.

Czy wprowadzenie do matematyki dowodów komputerowych obala powszechną opinię na temat wiedzy matematycznej jako wzorca nauki formalnej, której wszystkie twierdzenia są prawdami *a priori*?

7. DOWODY KOMPUTEROWE A *APRIORYCZNOŚĆ* MATEMATYKI JAKO NAUKI

Jeżeli, podobnie jak T. Tymoczko w [9], zdefiniujemy prawdy *a priori* jako te prawdy, których poznanie jest niezależne od eksperymentu — w przeciwieństwie do prawd *a posteriori*, które są znane tylko na podstawie określonego doświadczenia — to twierdzenia dowodzone przez komputer można by uważać za prawdy *a posteriori*.

Istnieją jednak co najmniej dwie definicje prawdy *a priori*:

(1) prawda, która posiada własności uniwersalne i konieczne, czyli prawda prawdziwa we wszystkich możliwych światach;

(2) prawda, której uznanie jest niezależne od odwołania do eksperymentu zmysłowego świata fizycznego (możliwa do poznania tylko przy pomocy «czystego rozumowania»).

Choć obie te definicje często funkcjonują zamiennie i są uważane za równoważne lub uzupełniające się, to w wypadku twierdzeń matematycznych dowodzonych komputerowo istotne jest ich rozróżnienie. Przyjęcie bowiem drugiej definicji może prowadzić do uznania twierdzenia o czterech barwach za przykład prawdy matematycznej *a posteriori*, a co za tym idzie — do zmiany statusu wiedzy matematycznej.

Jeżeli za prawdy *a priori* uznamy takie, których poznanie uzależnione jest tylko od czystego rozumowania, to dowody komputerowe nie ustanawiają prawd *a priori*, ponieważ za pomocą czystego myślenia nie można poznać całego dowodu komputerowego ani jego części. Nasza wiedza dotycząca np. twierdzenia o czterech barwach opiera się na wynikach doświadczenia, czyli na przesłankach empirycznych. Co więcej, jest mało prawdopodobne, by ktoś poznał twierdzenie o czterech barwach tylko za pomocą czystego rozumowania, bowiem jedyną znaną nam dotąd drogą do poznania go jest odwołanie się do komputera. Zatem twierdzenie o czterech barwach jest, jak twierdzi się np. w [9], przykładem prawdy matematycznej *a posteriori*, która nie będzie nigdy prawdą *a priori*. W myśl drugiej definicji prawd *a priori*, twierdzenie o czterech barwach i inne twierdzenia dowodzone komputerowo są częścią matematyki czystej, która może być poznana tylko *a posteriori*; co więcej, twierdzenia takie wprowadzają element empiryczny do matematyki.

Wielu autorów twierdzi jednak, że uznanie twierdzeń za *a posteriori* tylko na podstawie doświadczenia jest niewystarczające. Można przecież uznać również obliczenia przeprowadzane przez ludzi przy użyciu kartki i ołówka za wprowadzające element empiryczny do matematyki. W takich bowiem obliczeniach człowiek używa do uzasadnienia twierdzenia nie tylko «czystego rozumowania», ale odwołuje się do eksperymentu zmysłowego, jakim jest np. dokonywanie «ręcznych» obliczeń i obserwacja ich wyników (patrz [7]). Gdyby obstawać przy tej definicji prawd *a priori*, to należałoby uznać, że problem klasyfikacji prawd matematycznych jako *a priori* lub *a posteriori* pojawił się po raz pierwszy nie w odniesieniu do twierdzenia o czterech barwach czy do innych twierdzeń komputerowych, lecz w momencie, gdy pierwszy matematyk dokonał obliczeń na piasku przy użyciu patyka. Obliczenia komputerowe są bowiem traktowane przez wielu filozofów tylko jako bardziej wyrafinowana forma poprzednich obliczeń.

Niektórzy autorzy, chcąc uzasadnić nieadekwatność drugiej definicji w odniesieniu do twierdzeń matematycznych, podejmują próbę porównania twierdzeń dowodzonych komputerowo (np. twierdzenia czterech barw) z innymi, powszechnie uznanymi, twierdzeniami matematycznymi.

Wiele dowodów twierdzeń w matematyce, np. w teorii grafów, polega na sprawdzeniu rozmaitych możliwych przypadków. Schemat takich dowodów jest prosty, w toku rozumowania dochodzimy mianowicie do miejsca, w którym konieczne jest rozważenie pewnej własności we wszystkich możliwych wypadkach. Czasami rozważana liczba możliwości jest dostatecznie mała, by dokonać weryfikacji tylko przy użyciu «czystego rozumowania», ale w większości wypadków tak nie jest. Odwołujemy się wtedy do pomocy ołówka i kartki, a gdy ilość przypadków jest zbyt duża — i/lub gdy są one zbyt skomplikowane — zmuszeni jesteśmy odwołać się do pomocy komputera. Takie twierdzenia możemy zatem podzielić na kategorie w zależności od środków, jakie są potrzebne do ich uzasadnienia, a granice podziału pomiędzy tymi kategoriami nie są ostre. Bardzo często po to, by móc dokonać obliczeń «w głowie», musimy najpierw za pomocą kartki i ołówka rozłożyć problem na prostsze podprzypadki. Często też, pomimo że twierdzenia mogą być udowodnione «ręcznie», przeprowadza się te dowody przy pomocy komputera, ponieważ ten sposób jest szybszy i wygodniejszy.[3] Obecnie twierdzenie o czterech barwach można zaliczyć do grupy twierdzeń, które mogą być dowiedzione tylko przy użyciu komputera. Nikt jednak nie może twierdzić, że rozwój nowych technik matematycznych nie zmieni tej kategoryzacji. Jest zatem zbyt daleko idącym wnioskiem klasyfikowanie twierdzeń jako *a priori* lub *a posteriori* na podstawie ich dzisiejszego miejsca w powyższej klasyfikacji. Moglibyśmy zatem uważać twierdzenie o czterech barwach obecnie za *a posteriori*, a potencjalnie za *a priori*, ale jest to bardzo dziwna ocena statusu twierdzenia.

Innym argumentem na poparcie twierdzenia, że definicja druga nie jest odpowiednia w odniesieniu do twierdzeń matematyki, może być wypadek sprawdzania, czy dana liczba jest liczbą pierwszą. Jak powszechnie wiadomo, dla małych liczb takie sprawdzenie może być dokonane «w głowie». Jednak dla odpowiednio dużych liczb nie jest to możliwe i wtedy jedynym sposobem takiego sprawdzenia jest skorzy-

[3] Dokładnie problem kategoryzacji takich twierdzeń omawia E.R. Swart w [7].

stanie z pomocy komputera. Czy jednak twierdzenie o byciu liczbą pierwszą dla małych liczb można uznać za twierdzenie *a priori*, a dla liczb większych za *a posteriori*?

Dochodzimy zatem do wniosku, że druga z definicji prawd *a priori* jest niewystarczająca w odniesieniu do twierdzeń matematycznych. Zgodnie z definicją (1) prawda *a priori* jest to prawda konieczna i niezależna od jej aktualnego dowodu, czy to przeprowadzonego przez człowieka, czy przez komputer, a sposób, w jaki odkrywamy tę prawdę, nie ma wtedy wpływu na uznanie prawdziwości danego twierdzenia. Jest to ważny argument za uznaniem definicji pierwszej za odpowiedniejszą w wypadku prawd matematyki.

Istnieją jednak przeciwnicy całkowitego odrzucenia definicji (2), ponieważ jest ona stosowana częściej niż pierwsza w odniesieniu do innych nauk. Proponują oni natomiast jej modyfikację tak, by uznać, że część prawd *a priori* poznajemy za pomocą pewnego rodzaju odwołań do doświadczeń zmysłowych, np. obliczeń na kartkach czy eksperymentów komputerowych (patrz [7]). Wtedy powstaje jednak problem, jak zdefiniować pojęcie prawdy *a posteriori*. Proponuje się np. następującą definicję:

> Twierdzenie *a posteriori* jest prawdą zależną od natury świata, do którego się odnosi, i nie może być poznane bez przeprowadzenia co najmniej jednego eksperymentu.

Różnica pomiędzy prawdami *a priori* i *a posteriori* nie polega wtedy na odwołaniu do eksperymentu, lecz na tym, że prawdy *a priori* są prawdziwe we wszystkich możliwych światach, natomiast prawdziwość prawd *a posteriori* zależy od świata, do którego prawda ta się odnosi. Również natura eksperymentów, używanych do odkrywania prawd *a priori* i *a posteriori*, jest zupełnie inna. Eksperymenty potrzebne do poznania prawd *a priori* zawierają manipulacje na liczbach i stałych logicznych, podczas gdy eksperymenty w wypadku odkrywania prawd *a posteriori* polegają na pomiarach długości, ciśnienia, objętości, masy, temperatury, czasu i innych wielkości fizycznych.

W myśl takiej definicji twierdzenia o dowodach komputerowych nie mogą być uznane za prawdy *a posteriori*, ponieważ do ich odkrycia potrzebny był eksperyment komputerowy, który jest w swej naturze inny niż pomiary wielkości fizycznych.

Łatwo więc zauważyć, że ustalenie czy dane twierdzenie jest prawdą *a priori*, czy *a posteriori* — nie jest jednoznaczne. Zakwalifikowanie twierdzenia o czterech barwach i jemu podobnych twierdzeń matematycznych zależy od przejętych definicji prawd *a priori* i *a posteriori*.

8. DOWODY KOMPUTEROWE — REWOLUCJA CZY EWOLUCJA MATEMATYKI?

Postawmy na koniec pytanie, czy — jak twierdzą niektórzy filozofowie — wprowadzenie do matematyki dowodów komputerowych może być uważane za początek rewolucyjnych zmian w uprawianiu matematyki i czy może mieć ono znaczący wpływ na zmianę sposobu uprawiania tej nauki. Czy matematyka stanie się nauką eksperymentalną — a co za tym idzie stopień pewności jej twierdzeń nie będzie już najwyższym? Czy komputerowe dowodzenie twierdzeń może zostać nowym wzorcem dla uprawiania matematyki?

Pomimo coraz częstszego używania komputerów jako narzędzia pomocniczego w dowodzeniu — matematyka jest nadal nauką dedukcyjną. Operacje wykonywane przez komputer są zaprogramowane przez człowieka i to człowiek czuwa, by proces dowodzenia miał poprawny, dedukcyjny charakter. Komputer tylko dokonuje obliczeń, np. sprawdza pewne niemożliwe do sprawdzenia przez człowieka przypadki, lub dokonuje złożonych i żmudnych obliczeń. Chociaż jednak to właśnie człowiek programuje komputer i czuwa nad poprawnością programu, dla wielu filozofów i matematyków nie jest dopuszczalne sprawdzanie wyników uzyskanych komputerowo przez inny komputer. Problem wiarygodności wyników komputerowych pozostaje zatem problemem otwartym.

Zauważmy, że obecnie wiele twierdzeń matematycznych posiada bardzo długie i skomplikowane dowody. Zatem używanie komputerów przy dowodzeniu takich twierdzeń, jak np. twierdzenie o czterech barwach, jest wynikiem ewolucji matematyki jako nauki i pojawiania się coraz bardziej złożonych obliczeniowo problemów (por. [5]). Dowody we współczesnej matematyce różnią się bardzo od dowodów Euklidesa z *Elementów*, tak jak sama matematyka i stawiane przed nią problemy różnią się od matematyki i jej problemów z tamtych czasów. Wprowadzenie komputerów do matematyki nie jest zatem rewolucją, lecz jedynie kolejnym etapem ewolucji tej nauki, podobnie jak wprowadzenie liczydeł czy kalkulatorów.

Faktem jednak jest, że za pomocą automatycznego dowodzenia twierdzeń uzyskano w matematyce nowe wyniki (tzn. rozwiązano otwarte problemy); są to przykłady istotnego wzbogacenia matematyki przy użyciu komputerów.[4] Czy można zatem pozostać na stanowisku, że wprowadzenie komputerów do matematyki, podobnie jak wcześniejsze wprowadzenie papieru, liczydeł czy kalkulatorów, nie zmieni charakteru matematyki? Odpowiedzi mogą być bardzo różne, podobnie jak różne są interpretacje statusu matematyki jako nauki apriorycznej czy oceny wiarygodności wyników komputerowych.

Można twierdzić, że dopóki nie nauczymy komputerów myśleć samodzielnie, a pomimo wieloletnich badań nad sztuczną inteligencją nie wydaje się to perspektywa bliska, dopóty będą one tylko narzędziami w ręku człowieka, a matematyka pozosta-

---

[4] Przykłady takich problemów podają W. Marciszewski i R. Murawski w [4].

nie nauką dedukcyjną. Jednak zrównanie wprowadzenia komputerów z wprowadzeniem liczydeł wydaje się zbytnim uproszczeniem problemu i pomijaniem pewnych istotnych konsekwencji natury filozoficznej, jakie niosą ze sobą komputery, a jakich nie wniosły liczydła czy kalkulatory. Komputer nie jest bowiem tylko bardziej złożonym kalkulatorem, lecz instrumentem dowodzenia nowych twierdzeń w matematyce, a co za tym idzie — należy zastanowić się nad konsekwencjami zarówno przyjęcia, jak i odrzucenia dowodów komputerowych. Fakt, że dziś dowody komputerowe nie stanowią większości dowodów matematycznych — z czego można wnioskować, że komputery nie zmieniły dotąd sposobu uprawiania matematyki — nie świadczy wcale o tym, że w niedalekiej przyszłości taka zmiana nie będzie miała miejsca.

9. KONKLUZJE

Z powyższych rozważań wynika, że wiele zagadnień natury filozoficznej, związanych ze statusem epistemologicznym twierdzeń dowodzonych komputerowo, nadal pozostaje bez jednoznacznego rozstrzygnięcia. Są wśród nich w szczególności następujące kwestie:

(1) Jakie są istotne cechy dowodu matematycznego i jak powinno zostać wzbogacone pojęcie dowodu, by dopuszczalne było w nim użycie komputerów?

(2) Czy dowody komputerowe, tj. zarówno dowody w pełni automatyczne, jak i dowody wspomagane komputerowo, są pełnoprawnymi dowodami matematycznymi?

(3) Czy twierdzenia, które nie posiadają dowodów tradycyjnych, tj. nie korzystających z pomocy komputera, mogą by uważane za twierdzenia matematyczne?

(4) Czy dowody komputerowe są mniej wiarygodne niż tradycyjne dowody matematyczne?

(5) Czy wreszcie matematyka może być nadal uważana za wzorzec nauki formalnej, której wszystkie twierdzenia są prawdami *a priori*?

Wszystkie te pytania są ściśle ze sobą powiązane, a sposób odpowiedzi na jedno z nich determinuje odpowiedzi na pozostałe. Ponadto odpowiedź na wiele z nich zależy od przyjętych definicji. Jest tak np. w przypadku *aprioryczności* matematyki jako nauki.

BIBLIOGRAFIA

Allaire F., „Another proof of the four-color theorem. Part I", [w:] *Proceedings of the Seventh Monitoba Conference on Numerical Mathematics and Computing*, 1993, s. 3—72.

Appel K. i W. Haken, „Zagadnienie czterech barw", [w:] *Matematyka współczesna. Dwanaście esejów*, Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa 1983, s. 170—199.

Lemańska A., „Eksperyment komputerowy a istnienie obiektów matematycznych", [w:] *Między matematyką a przyrodoznawstwem*, Wyd. Naukowe Instytutu Filozofii UAM, Poznań 1999.

Marciszewski W., R. Murawski, *Mechanization of Reasoning in a Historical Perspective*, Editions Rodopi, Amsterdam-Atlanta, GA, 1995.

Mrozek M. i J. Urbaniec, „Evolution of Mathematical Proof", *Foundations of Science* 2, 1997, s. 77—85.
Murawski R., *Filozofia matematyki. Zarys dziejów*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 1995.
Swart E.R., „The Philosophical Implications of the Four-Color Problem", *American Mathematical Monthly*, 1987 (1980), s. 697—707.
Teller P, „The Four-Color Theorem and Mathematical Proof", *The Joural of Philosophy*, vol. 77 no. 12, grudzień 1980, s. 803—820.
Tymoczko T., „The Four-Color Problem and Its Philosophical Significance", *The Journal of Philosophy*, vol. 76 no.2, luty 1979, s. 57—83.