

# Stanisław Leśniewski

---

## Podstawy ogólnej teorii mnogości : cz. I

---

Filozofia Nauki 7/3/4, 173-208

---

1999

Artykuł został zdigitalizowany i opracowany do udostępnienia w internecie przez Muzeum Historii Polski w ramach prac podejmowanych na rzecz zapewnienia otwartego, powszechnego i trwałego dostępu do polskiego dorobku naukowego i kulturalnego. Artykuł jest umieszczony w kolekcji cyfrowej [bazhum.muzhp.pl](http://bazhum.muzhp.pl), gromadzącej zawartość polskich czasopism humanistycznych i społecznych.

Tekst jest udostępniony do wykorzystania w ramach dozwolonego użytku.

Stanisław Leśniewski

**Podstawy ogólnej teorii mnogości. I**

(Część. Ingrediens. Mnogość. Klasa. Element. Podmnożenie. Niektóre ciekawe rodzaje klas.)

Łatwiej bądź co bądź prawdę wypisać, wyrozma-  
wiać, wydiskutować — niż ją wymilczeć.Tadeusz Kotarbiński,  
„Metoda konstrukcyjna a rozumowanie osobiste”,  
*Przegląd Filozoficzny*, 1914, s. 182*Żonie mojej ofiaruję*

1. Już po raz szósty gościmy w *Filozofii Nauki* Stanisława Leśniewskiego. Dotąd zmieściliśmy na naszych łamach następujące teksty: „Przyczynek do analizy zdań egzystencjalnych” (*Filozofia Nauki* r. II(1994) nr 1 s. 117—134); „Próba dowodu ontologicznej zasady sprzeczności” (*Filozofia Nauki* r. II(1994) nr 2 s. 117—147); Głos w dyskusji wokół genezy logiki trójwartościowej (*Filozofia Nauki* r. II(1994) nr 3—4 s. 235-237); „O podstawach filozoficznych teorii mnogości” (*Filozofia Nauki* r. VI(1998) nr 2 s. 123—139); Listy do Kazimierza Twardowskiego (*Filozofia Nauki* r. VI(1999) nr 1—2 s. 115—133). Obecnie przyszła kolej na **Podstawy ogólnej teorii mnogości. I** — dzieło, które w oryginale jest dostępne w Polsce w zaledwie kilku bibliotekach publicznych. Zostało ono wydane w 1916 roku jako druga pozycja *Prac Polskiego Koła Naukowego w Moskwie (Sekcja Matematyczno-Przyrodnicza)* — w Drukarni A.P. Popławskiego. Tak o okolicznościach powstania *Podstaw* pisał Tadeusz Kotarbiński („Garstka wspomnień o Stanisławie Leśniewskim”, [w:] *Studia z historii filozofii i logiki*, Warszawa 1979, PWN, s. 294):

Z zarodkiem [...] mereologii w głowie wyjechał Leśniewski do Rosji na czas pierwszej wojny światowej. Tam nauczał matematyki w szkole polskiej\* próbując pono częstować malców a limine potężnymi abstrakcjami i uściśleniami. O tym okresie jego życia mogliby zapewne opowiedzieć dość dużo panowie: profesor Wacław Sierpiński i profesor Wojciech Świątosławski, z których pierwszy zwłaszcza mógł z bliska obserwować jego działalność. Tam i w owym czasie Leśniewski sformułował i po polsku ogłosił pierwszy zarys systemu formalnego mereologii, nazywając ją jeszcze wtedy teorią mnogości. Nazwa mereologii dopiero później zaczęła wchodzić w użycie.

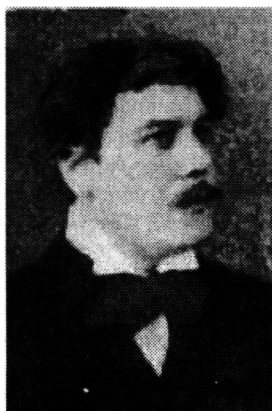
2. W jednej z najnowszych poważnych encyklopedii filozoficznych można przeczytać, że Leśniewski był logikiem polskim pochodzenia... rosyjskiego (sic!). Jednym ze źródeł tego nieporozumienia jest zapewne to, że pierwsze oryginalne dzieło Leśniewskiego — **Podstawy ogólnej teorii mnogości** — było opublikowane właśnie w Moskwie, gdzie skądinąd w latach 1916—1918 uczył także matematyki w polskim gimnazjum pp. Jakubowskich. Innym źródłem jest być może fakt, że w 1913 roku Leśniewski wydał w Petersburgu broszurę *Logičeskie razsuzdenija*, zawierającą rosyjskie przekłady „Przyczynku do analizy zdań egzystencjalnych” i „Próby dowodu ontologicznej zasady sprzeczności”. Nie wykluczone wreszcie, że nieporozumienie wzięło się stąd, że Leśniewski urodził się w Sierpuchowie pod Moskwą. Sierpuchów był w owym czasie dużym węzłem kolejowym i mieszkała tam stale duża kolonia kolejarzy-Polaków, a wśród nich — ojciec Leśniewskiego, Izidor, który był inżynierem kolejnictwa, a także m.in. (jak się niedawno okazało) ojciec naszego znanego kompozytora, Witolda Rudzińskiego.

3. Zamieszczona ubiegłego roku w *Filozofii Nauki* praca „O podstawach teorii mnogości” została napisana — jak głosi napis pod tekstem pierwszego wydania — w Kimborciszkach, we wrześniu 1914 roku. W majątku teściów bywał następnie Leśniewski wielokrotnie: ostatni raz na rok przed śmiercią. Była to okolica pełna krewniaków żony: koło Kimborciszek, w Lipniskach, mieszkał z rodziną jej stryj. Wspomina o nim w książce **Pani na Berżenikach** Wojciech Wiśniewski: „Był żonaty, ale dość nieszczęśliwy w małżeństwie”. W liście (19) z Kimborciszek z dnia 6 czerwca 1936 roku Leśniewski tak opisywał ten majątek: „Żyto przed oknem, drzewa kwitnące, słowiki, rehot żab, koń «do dyspozycji» i inne tego rodzaju przyjemności” (s. 131). Jak wyglądają Kimborciszki dzisiaj?

---

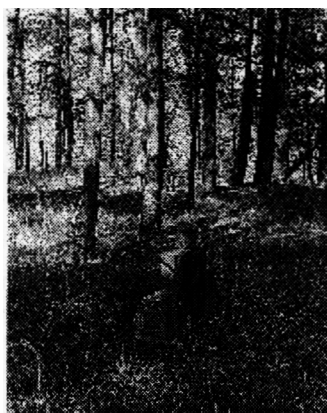
\* Chodzi o szkołę Komitetu Polskiego w Moskwie — późniejsze warszawskie gimnazjum Władysława Giżyckiego. Traf chciał, że jednym z uczniów Leśniewskiego był wówczas Konstanty Gałczyński, przyszły poeta. Jego kolega z ławy szkolnej tak wspominał tamte moskiewskie czasy: „Na lekcji algebry, którą wykładał wielki logista Leśniewski (według naszej nomenklatury: Lew), można było używać. Każdy robił co chciał. Lew nie zwracał uwagi na takie drobiazgi” (zob. Jan Hoppe, „Mały Ildefons”, [w:] A. Kamińska i J. Śpiewak (red.), *Wspomnienia o K.I. Gałczyńskim*, Warszawa 1961, Czytelnik, s. 49). [Bardzo dziękuję Panu Lechowi Stępniewskiemu za zwrócenie mi uwagi na ten barwny epizod z życia dwóch wielkich ludzi (JJJ).]

*Żyto tu i ówdzie rośnie, ale nie można już na nie patrzeć przez okna dworu — bo pozostały po nim jedynie fundamenty, które porasta bujna roślinność. Sady zdziczały zupełnie, ale przetrwały — i jeszcze dziś robią imponujące wrażenie. Słowiki kłaskają w resztkach dworskiego parku,\* żaby rechocą w zapuszczonym stawie, ale konia do dyspozycji oczywiście nie ma — ocalała stajnię przerobiono na dom mieszkalny. Za to od okolicznych mieszkańców można się dowiedzieć (po polsku!), jak dotrzeć do porośniętego sośniną wzgórza, gdzie zachowały się fragmenty kamiennego nagrobka — z inskrypcją: *Sp. Marian Prewysz-Kwinto, syn ziemi brasławskiej, ochotnik WP, por. 13 puł. ułanów, ur. 1856 r. zm. 27 XI 1938 r. Cześć jego pamięci.**



Stanisław Leśniewski w wieku młodzieńczym

Z archiwum J.J. Jadackiego



Ocalały fragment nagrobka Mariana Prewysz-Kwinty w Kimborciszkach

Fot. J.J. Jadacki (1999)

4. Ze względu na skąpość informacji biograficznych o Leśniewskim — każde nowe źródło takich informacji jest na wagę złota. Należą do nich dwa tomy *Dzienników* Kazimierza Twardowskiego, opublikowane w 1997 roku przez nieodżałowanej pamięci kronikarza Szkoły Lwowsko-Warszawskiej — Ryszarda Jadczaaka.

Oto wzmianki dotyczące Leśniewskiego zaczerpnięte z owych *Dzienników* (cz. 1, s. 52—57, 67, 104, 111—113, 115, 236, 282, 300, 309, 324; cz. 2, s. 74, 110—113, 133, 149, 211 i 308).

*Warszawa 1918 r.: Posiedzenie Fakultetu Filozoficznego w Seminarium Filozoficznym [...] — referat Leśniewskiego, kawiarnia — wszyscy razem (9 czerwca). Od dziewiątej trzydzieści do dwunastej w Ministerstwie [Wyznań Religijnych i Oświecenia Publicznego] z Leśniewskim pracuję. [...] Kawiarnia z Janiszewskim, Leśniewskim (który odprowadza mnie potem do do-*

\* To tutaj, w 1939 roku — tuż po śmierci Leśniewskiego — Henryk Hiż zdawał u Kotarbińskiego egzamin z *Elementów*. Por. „Uwagi o Leśniewskim”, *Ruch Filozoficzny*, t. L(1993), nr 1, s. 60.

mu), Tatarzkiewiczem, Kotarbińskim, Znamierowskim (15 czerwca). Spotkanie z Górkimi i z Leśniewskim (17 czerwca). Cukiernia na Marszałkowskiej. Leśniewski i Kotarbiński odprowadzają mnie do hotelu (20 czerwca). Ministerstwo z Leśniewskim do wpół do drugiej. [...] Na Marszałkowskiej na podwieczorku z Łukasiewiczem, Kotarbińskim, Tatarzkiewiczem, Leśniewskim, Znamierowskim, Chojeckim [...] do wpół do ósmej. Łukasiewicz i Leśniewski odprowadzają mnie na Foksal (22 czerwca). U Leśniewskich. Z nim do Instytutu [Filozoficznego]. [...] Potem razem od dziesiątej do jedenastej w cukierni. Wracamy razem. Kotarbiński, Leśniewski i Zabielski odprowadzają mnie aż do hotelu (25 czerwca). Wszyscy oni [tj. Łukasiewicz, Kotarbiński, Leśniewski i Czeżowski] i jeszcze inni byli na posiedzeniu, zwołanym przypadkiem na dziś, na którym uchwalili wobec zbliżającego się 25-lecia mej działalności akademickiej wydać zbiorowo moje niedostępne w handlu księgarskim prace (31 października). **Lwów 1919 r.:** Z Wartenbergiem rozmowa o Leśniewskim. Wartenberg jest stanowczo przeciwny jego habilitacji (21 maja). **Warszawa 1919 r.:** Mówiliśmy [z Kotarbińskim] o sprawie Tatarzkiewicza i Leśniewskiego. Powiedziałem mu o stosunku Wartenberga (28 czerwca). Z Łukasiewiczem omówiłem sprawę [...] Leśniewskiego (katedra filozofii matematyki) (29 czerwca). W restauracji „Warszawa” na Nowym Świecie wieczór spędziłem z Czeżowskim, Kotarbińskim, Borowskim, Lesniewskim, Chojeckim, a przyszedł czas jakiś Radecki. Leśniewski rozwijał zasady swej nowej najogólniejszej aksjomatyki, której I aksjomat brzmi: *Jeżeli a jest b, to a jest a* (1 lipca). U Sierpińskiego omawiam 3 sprawy: Leśniewskiego, Steinhaus, Zylińskiego (6 lipca). **Warszawa 1926 r.:** Od ósmej do dwunastej z Kazikiem [Ajdukiewiczem], Kotarbińskim i Łukasiewiczem u Leśniewskich. On dziś kończy 40 lat (28 marca). Obiad u Kazików, u którego po obiedzie Kotarbiński z Leśniewskim (17 grudnia). Załatwiając po drodze sprawunki, wróciłem do domu za kwadrans pierwsza — chwilkę był Leśniewski szukając Kazika (18 grudnia). **Lwów 1927 r.:** Maryna [córka Twardowskiego i żona Ajdukiewicza] opowiadała mi o nieprzyjemnościach koleżeńskich, których doznawał w ostatnich czasach Kazik w Warszawie ze strony Leśniewskiego i W. Witwickiego (24 marca). **Warszawa 1927 r.:** Około dziesiątej byłem kwadransik u Kotarbińskiego, następnie u W. Witwickiego do dwunastej — idąc do niego spotkałem na schodach Leśniewskiego (27 maja). Po referacie Izy [Dąbskiej] miałem krótką dyskusję prywatną z Leśniewskim. Na obiedzie był Józek Tomczak, po obiedzie był chwilkę Lesniewski (20 września). **Warszawa 1929 r.:** Od Leśniewskiego [udałem się] do Wali [Buczyńskiej] (30 maja). **Lwów 1930 r.:** Komisja [do sprawy obsadzenia katedry logiki we Lwowie] zebrała [...] opinie: otrzymała je od Kotarbińskiego, Leśniewskiego i Łukasiewicza — jedną wspólną — z Warszawy [...]. Warszawa [opowiedziała się] za Tarskim, Kraków za Chwistkiem (11 stycznia). Rada [...] [Wydziału Matematyczno-Przyrodniczego] wbrew opinii Leśniewskiego, Kotarbińskiego i Łukasiewicza oraz wbrew mojej opinii, na katedrę, którą zamierza stworzyć dla logiki, zaproponować uchwaliła nie Tarskiego, lecz Chwistka (24 stycznia). Wysłuchawszy sprawozdania Kazika o jego rozmowach z Kotarbińskim, Łukasiewiczem, Leśniewskim i Tarskim [...], uchwalił Wydział [PTF] jednomyślnie przekazać dalszą akcję w sprawie zorganizowania udziału Polaków w VII Zjeździe Filozoficznym, który ma się odbyć w Oxfordzie, Warszawskiemu Towarzystwu Filozoficznemu (27 stycznia). Ci co postępują wedle wzoru Leśniewskiego, bardzo arbitralnie domagają się analizy tam, gdzie im to dogodne, gdy jednak ktoś od nich domaga się analizy tam, gdzie im to niedogodne, powołują się na „intuicję”. A [gdy] przeciwnik w dyskusji próbuje kiedyś również powołać się na „intuicję”, odpowiadają: „Nie rozumiemy tego, co według ciebie ma być intuicyjnie dane” (12 sierpnia). **Lwów 1932 r.:** Opowiedział [scil. Kazik] [...] o tym, że prof. Leśniewski z Warszawy, którego PTF uchwaliło prosić na odczyt do Lwowa, nie przyjął zaproszenia (7 kwietnia). **Lwów 1933 r.:** Oświadczył

[...] Chwistek [Kazikowi], że nic nie ma przeciw Kazikowi prócz tego, że tenże uznaje Leśniewskiego (13 października).

Redakcja

## PRZEDMOWA

Praca niniejsza jest pierwszym ogniwem w dłuższym szeregu prac, które zamierzam wydać w bliższej lub dalszej przyszłości, pragnąc przyczynić się w miarę możliwości do uzasadnienia matematyki współczesnej. Że uzasadnienie takie nie jest rzeczą zbyt trudną, jasne jest dla każdego, kto zna choćby „antynomie”, do których doszła matematyka w ostatnich dziesięcioleciach swego rozwoju.

Układ definicji i pewników, które ustaliłem w niniejszej pracy, poświęconej najogólniejszym zagadnieniom teorii mnogości, ma dla mnie w porównaniu z innymi znanymi dotąd układami definicji i pewników (Zermelo, Russell itd.) tę zaletę, iż usuwa „antynomie” ogólnej teorii mnogości bez zwężania pierwotnego Cantorowskiego zakresu wyrazu „mnogość”, jak to widać choćby z mego aksjomatu III, z drugiej zaś strony nie prowadzi do twierdzeń, znajdujących się w tak rażąco konflikcie z intuicjami „ogółu”, jak choćby twierdzenie dotychczasowej „nie naiwnej” teorii mnogości, nakazujące odróżniać jakiś przedmiot od zbioru, zawierającego ten tylko jeden przedmiot jako element. Wyznaję chętnie, że niektóre twierdzenia moje, jak np. tw. XXVII, mogą urazić „intuicje matematyczne” różnych mniej lub więcej subtelnych myślicieli, kontemplujących wytworność pewnych konstrukcji teoretycznych niezależnie od tego, czy konstrukcje owe przyczyniają się w jakimkolwiek stopniu do ujęcia naukowego rzeczywistości, czy też służą tylko do usprawiedliwienia panujących w naszej epoce, a odznaczających się dużym stopniem bezwładności, matematycznych przyzwyczajęń. Nie mogę jednak odmówić sobie przyjemności skonstatowania faktu, że starałem się pisać pracę moją tak, by dotyczyła ona nie tylko wszelkiego rodzaju „wolnych tworów” rozmaitych mniej lub więcej dedekindujących duchów twórczych; wypada stąd, iż bardziej się troszczyłem o to, aby twierdzenia moje, posiadając postać możliwie ścisłą, harmonizowały ze „zdrowym rozsądkiem” zajmujących się badaniem nie przez nich samych „tworzonej” rzeczywistości przedstawicieli „esprit laique”, aniżeli o to, aby to, co mówię, zgodne było z tymi „intuicjami” fachowych teoretyków mnogości, które wyszły z zaopatrzonej w aparat „wolnej twórczości” centryfugi matematycznych umysłów, zdemoralizowanych przez „oderwane od rzeczywistości” spekulacyjne konstrukcje.

Pragnę tu jeszcze dodać słów parę, jako środek profilaktyczny na ewentualne zarzuty krytyków z obozu „filozoficznego”: oto — system swój traktuję wyraźnie jako system hipotetyczno-dedukcyjny, z czego wypada, iż stwierdzam właściwie jedynie to, że ze zdań, które nazywam „aksjomatami” wynikają zdania, które nazywam „twierdzeniami”. „Źródłem” psychicznym moich aksjomatów są moje „i n t u i c j e”, co

znaczy po prostu, że w prawdziwość moich aksjomatów wierzę, dla czego zaś wierzę, powiedzieć nie umiem, nie znam się bowiem na teorii przyczynowości. „Źródła” logicznego aksjomaty moje nie posiadają, co znaczy po prostu, że aksjomaty te nie posiadają dowodów w moim systemie, podobnie jak żadne w ogóle aksjomaty nie są z natury rzeczy udawdaniwane w tym systemie, dla którego są aksjomatami. Nie umiem wcale odpowiedzieć na pytanie, jaka jest „wartość obiektywna” moich aksjomatów, ani na żadne inne podobne pytania, które zadają sobie przedstawiciele tak zwanej teorii poznania — wyznaję bowiem z boleścią i na swoją wyraźną niekorzyść, że nie potrafiłem dotąd pomimo najszerszych chęci zrozumieć ani jednego z problematów, które sobie stawia wspomniana właśnie a szanowna „nauka”.

W kwestiach, dotyczących sposobów używania wyrazów, mam do nadmienienia, iż z terminów matematycznych, którymi się posługuję, nie definiuję jedynie wyrazu „część”, przypuszczając, że termin ten może nie wzbudzać nieporozumień — z uwagi na to, iż intuicyjny jego charakter nabiera znacznej przejrzystości w świetle aksjomatów I i II. Terminy „mnogość” i „element”, przyjmowane zwykle bez definicji w teorii mnogości, są zdefiniowane w niniejszej pracy.

Na zakończenie tych uwag wstępnych składam serdeczne podziękowania tym wszystkim, którzy w ten lub inny sposób przyczynili się do powstania mojej pracy, a przede wszystkim memu szanownemu profesorowi Wacławowi Sierpińskiemu, który mi nie szczędził swych kompetentnych informacji i wskazówek, oraz memu przyjacielowi drowi Tadeuszowi Kotarbińskiemu, którego liczne a pełne finezji logicznej uwagi przyczyniły się bardzo w swoim czasie do wypracowania głównych zrębów bronionej przeze mnie koncepcji. „Polskiemu Kołu Naukowemu w Moskwie” składam wyrazy prawdziwej wdzięczności za umożliwienie ukazania się mej pracy w druku już obecnie.

St. Leśniewski

Moskwa, w kwietniu 1916 roku

## § 1.

*Aksjomat I.* Jeżeli przedmiot  $P$  jest częścią przedmiotu  $P_1$ , to przedmiot  $P_1$  nie jest częścią przedmiotu  $P$ .

*Aksjomat II.* Jeżeli przedmiot  $P$  jest częścią przedmiotu  $P_1$ , a przedmiot  $P_1$  jest częścią przedmiotu  $P_2$ , to przedmiot  $P$  jest częścią przedmiotu  $P_2$ .

*Twierdzenie I.* Żaden przedmiot nie jest częścią samego siebie.

Dowód: Przypuśćmy, że pewien przedmiot  $X$  jest częścią samego siebie, to znaczy częścią przedmiotu  $X$ . Z przypuszczenia tego wypada — zgodnie z aksjomatem I —

iż przedmiot  $X$  nie jest częścią przedmiotu  $X$ , co jest sprzeczne z naszym założeniem. Musi więc być fałszem prowadzące do tej sprzeczności przypuszczenie nasze, że pewien przedmiot jest częścią samego siebie. Tak więc — żaden przedmiot nie jest częścią samego siebie, co właśnie należało udowodnić.

## § 2.

*Definicja I.* Używam wyrażenia „ingrediens przedmiotu  $P$ ” dla oznaczenia samego przedmiotu  $P$  oraz każdej części tego przedmiotu.<sup>1</sup>

Bezpośrednimi wnioskami z tej definicji są dwa twierdzenia następujące:

*Twierdzenie II.* Każdy przedmiot jest swoim własnym ingrediensem.

*Twierdzenie III.* Jeżeli  $P_1$  jest częścią przedmiotu  $P$ , to  $P_1$  jest ingrediensem przedmiotu  $P$ .

## § 3.

*Twierdzenie IV.* Jeżeli  $P$  jest ingrediensem przedmiotu  $P_1$ , a  $P_1$  jest ingrediensem przedmiotu  $P_2$ , to  $P$  jest ingrediensem przedmiotu  $P_2$ .

Dowód: Zgodnie z definicją I — zdanie:

(1) „ $P$  jest ingrediensem przedmiotu  $P_1$ , a  $P_1$  jest ingrediensem przedmiotu  $P_2$ ” jest prawdą zawsze i tylko wtedy, jeżeli jest prawdą jedno z czterech zdań następujących:

(2) „ $P$  jest  $P_1$ ,  $P_1$  jest  $P_2$ ”,

(3) „ $P$  jest  $P_1$ ,  $P_1$  jest częścią przedmiotu  $P_2$ ”,

(4) „ $P$  jest częścią przedmiotu  $P_1$ ,  $P_1$  jest  $P_2$ ”,

(5) „ $P$  jest częścią przedmiotu  $P_1$ ,  $P_1$  jest częścią przedmiotu  $P_2$ ”.

Jeżeli jest prawdą zdanie 2, to — na podstawie zasady sylogizmu —  $P$  jest  $P_2$ , a wobec tego — na zasadzie twierdzenia II —  $P$  jest ingrediensem przedmiotu  $P_2$ . Jeżeli jest prawdą zdanie 3, to  $P$  jest tu tym właśnie przedmiotem  $P_1$ , który jest częścią przedmiotu  $P_2$ , z czego wypada, że  $P$  jest częścią przedmiotu  $P_2$ , a więc — zgodnie z twierdzeniem III —  $P$  jest ingrediensem przedmiotu  $P_2$ . Jeżeli jest prawdą zdanie 4, to  $P$ , będąc częścią przedmiotu  $P_1$ , jest przez to samo częścią przedmiotu  $P_2$ , albowiem  $P_1$  jest to — zgodnie ze zdaniem 4 — nic innego, jak właśnie  $P_2$ ; tak więc i w tym wypadku  $P$  jest — zgodnie z twierdzeniem III — ingrediensem przedmiotu  $P_2$ . Jeżeli jest prawdą zdanie 5, to — zgodnie z aksjomatem II —  $P$  jest częścią przedmiotu  $P_2$ , z czego wypada na podstawie twierdzenia III, iż  $P$  jest ingrediensem przedmiotu  $P_2$ . Widzimy tedy, że jeżeli jest prawdą którekolwiek ze zdań — 2, 3, 4, 5 — to  $P$  jest ingrediensem przedmiotu  $P_2$ ; ponieważ jednak zdanie 1 jest prawdą tylko

<sup>1</sup> Projekt zastosowania w tym wypadku wyrazu „ingrediens” poddał mi p. Lucjan Zarzecki.



w takim razie, jeżeli jest prawdą jedno z czterech zdań — 2, 3, 4, 5 — więc, jeżeli jest prawdą zdanie 1, to  $P$  jest ingrediensem przedmiotu  $P_2$ ; inaczej: jeżeli  $P$  jest ingrediensem przedmiotu  $P_1$ , a  $P_1$  jest ingrediensem przedmiotu  $P_2$ , to  $P$  jest ingrediensem przedmiotu  $P_2$ . To właśnie należało udowodnić.

*Twierdzenie V.* Jeżeli  $I$  jest ingrediensem przedmiotu  $P$ , to pewien ingrediens przedmiotu  $I$  jest ingrediensem przedmiotu  $P$ .

Dowód: Przypuśćmy, że twierdzenie, które chcę udowodnić, jest fałszem. Wypada stąd, iż istnieje pewien taki ingrediens  $I_1$  przedmiotu  $P$ , że żaden ingrediens przedmiotu  $I_1$  nie jest ingrediensem przedmiotu  $P$ . Wnosimy stąd, że i sam  $I_1$  (który zgodnie z twierdzeniem II jest ingrediensem przedmiotu  $I_1$ ) nie jest ingrediensem przedmiotu  $P$ . Otrzymany wniosek, że  $I_1$  nie jest ingrediensem przedmiotu  $P$ , musi być fałszem, określiłem bowiem wyżej przedmiot  $I_1$  jako ingrediens przedmiotu  $P$ . Musi więc być również fałszem prowadzące do tego wniosku przypuszczenie nasze, że twierdzenie V jest fałszem. Tak więc — twierdzenie V jest prawdą.

*Twierdzenie VI.* Jeżeli  $I$  jest ingrediensem przedmiotu  $P$ , to pewien ingrediens przedmiotu  $I$  jest ingrediensem pewnego ingrediensu przedmiotu  $P$ .

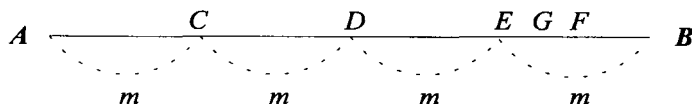
Dowód: Przypuśćmy, że twierdzenie, które chcę udowodnić, jest fałszem. Wypada stąd, iż istnieje pewien taki ingrediens  $I_1$  przedmiotu  $P$ , że żaden ingrediens przedmiotu  $I_1$  nie jest ingrediensem żadnego ingrediensu przedmiotu  $P$ . Wypada stąd dalej, iż żaden ingrediens przedmiotu  $I_1$  nie jest ingrediensem przedmiotu  $P$  (który — zgodnie z twierdzeniem II — jest ingrediensem przedmiotu  $P$ ). Możemy to sformułować inaczej (wiedząc o tym, że  $I_1$  jest ingrediensem przedmiotu  $P$ ), a mianowicie: żaden ingrediens pewnego ingrediensu przedmiotu  $P$  nie jest ingrediensem tego właśnie przedmiotu  $P$ . Twierdzenie otrzymane jest sprzeczne z twierdzeniem V. Musi więc być fałszem prowadzące do tej sprzeczności przypuszczenie nasze, że twierdzenie VI jest fałszem. Tak więc — twierdzenie VI jest prawdą.

#### § 4.

*Definicja II.* Wyrażenia „mnogość przedmiotów  $m$ ” używam dla oznaczenia każdego takiego przedmiotu  $P$ , który czyni zadość następującemu warunkowi: jeżeli  $I$  jest ingrediensem przedmiotu  $P$ , to pewien ingrediens przedmiotu  $I$  jest ingrediensem pewnego  $m$ , które jest ingrediensem przedmiotu  $P$ .

[Przykłady: I. Każdy dany naród  $N$  jest mnogością ludzi, albowiem, jeżeli  $I$  jest ingrediensem narodu  $N$ , to pewien ingrediens przedmiotu  $I$  jest ingrediensem pewnego człowieka, który jest ingrediensem narodu  $N$ . II. Powierzchnia szachownicy nie jest mnogością białych kwadratów, nie jest tu bowiem zachowany wymagany w definicji II warunek: oto — żaden czarny kwadrat, będąc ingrediensem szachownicy, nie posiada ani jednego takiego ingrediensu, któryby był ingrediensem jakiegoś białego kwadratu, nie jest więc prawdą, iż jeżeli  $I$  jest ingrediensem szachownicy, to pewien

ingrediens przedmiotu  $I$  jest ingrediensem pewnego białego kwadratu, który jest ingrediensem szachownicy. III. Uważajmy odcinek  $AB$  rysunku 1 i użyjmy wyrazu „ $m$ ” dla oznaczenia każdego z odcinków —  $AC$ ,  $CD$ ,  $DE$  i  $EB$  — będących częściami odcinka  $AB$ . Odcinek  $AF$  nie jest mnogością przedmiotów  $m$ , albowiem odcinek  $GF$ , będąc ingrediensem odcinka  $AF$ , nie posiada ani jednego takiego ingrediensu, który by był ingrediensem jakiegoś  $m$ , będącego ingrediensem odcinka  $AF$ , nie jest więc prawdą, iż jeżeli  $I$  jest ingrediensem odcinka  $AF$ , to pewien ingrediens przedmiotu  $I$  jest ingrediensem pewnego  $m$ , które jest ingrediensem odcinka  $AF$ .]

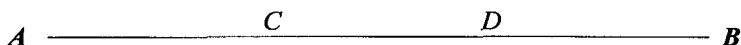


Rys. 1

*Definicja III.* Wyrażeń — „mnożość wszystkich przedmiotów  $m$ ” oraz „klasa przedmiotów  $m$ ” — używam dla oznaczenia każdego takiego przedmiotu  $P$ , który czyni zadość dwom następującym warunkom:

- 1) każde  $m$  jest ingrediensem przedmiotu  $P$ ,
- 2) jeżeli  $I$  jest ingrediensem przedmiotu  $P$ , to pewien ingrediens przedmiotu  $I$  jest ingrediensem pewnego  $m$ .

[Przykłady: I. Ludzkość jest mnogością wszystkich ludzi, czyli klasą ludzi, albowiem: 1) każdy człowiek jest ingrediensem ludzkości, 2) jeżeli  $I$  jest ingrediensem ludzkości, to pewien ingrediens przedmiotu  $I$  jest ingrediensem pewnego człowieka.



Rys. 2

II. Odcinek  $AC$  rysunku 2 nie jest klasą części odcinka  $AB$ , albowiem nie każda część odcinka  $AB$  jest ingrediensem odcinka  $AC$ , nie jest więc zachowany warunek 1 definicji III. III. Odcinek  $AB$  rysunku 2 nie jest klasą części odcinka  $AC$ , albowiem nie jest tu zachowany warunek 2 definicji III: odcinek  $DB$ , będący ingrediensem odcinka  $AB$ , nie posiada ani jednego takiego ingrediensu, który by był ingrediensem jakiejś części odcinka  $AC$ , nie jest więc prawdą, że jeśli  $I$  jest ingrediensem odcinka  $AB$ , to pewien ingrediens przedmiotu  $I$  jest ingrediensem pewnej części odcinka  $AC$ .]

*Aksjomat III.* Jeżeli pewien przedmiot jest  $m$ , to pewien przedmiot jest klasą przedmiotów  $m$ .

*Aksjomat IV.* Jeżeli  $P$  jest klasą przedmiotów  $m$ , oraz  $P_1$  jest klasą przedmiotów  $m$ , to  $P$  jest  $P_1$ .

## § 5.

*Twierdzenie VII.* Jeżeli  $P$  jest klasą przedmiotów  $m$ , to  $P$  jest mnogością przedmiotów  $m$ .

Dowód: załóżmy, że

(1)  $P$  jest klasą przedmiotów  $m$ .

Zgodnie z definicją III możemy zapisać:

(2) każde  $m$  jest ingrediensem przedmiotu  $P$ ,

(3) jeżeli  $I$  jest ingrediensem przedmiotu  $P$ , to pewien ingrediens przedmiotu  $I$  jest ingrediensem pewnego  $m$ .

Z twierdzenia 3 wnosimy na podstawie twierdzenia 2, że jeżeli  $I$  jest ingrediensem przedmiotu  $P$ , to pewien ingrediens przedmiotu  $I$  jest ingrediensem pewnego  $m$ , które jest ingrediensem przedmiotu  $P$ . Wynika stąd — w myśl definicji II — że

(4)  $P$  jest mnogością przedmiotów  $m$ .

Tak więc — twierdzenie 1 doprowadziło nas do twierdzenia 4. Wypada stąd, że jeżeli  $P$  jest klasą przedmiotów  $m$ , to  $P$  jest mnogością przedmiotów  $m$ , co właśnie należało udowodnić.

*Twierdzenie VIII.* Każdy przedmiot  $P$  jest klasą ingrediensów tego właśnie przedmiotu  $P$ .

Dowód: Na podstawie zasady tożsamości możemy zapisać:

(1) każdy ingrediens przedmiotu  $P$  jest ingrediensem przedmiotu  $P$ . Z twierdzenia VI wiemy, iż

(2) jeżeli  $I$  jest ingrediensem przedmiotu  $P$ , to pewien ingrediens przedmiotu  $I$  jest ingrediensem pewnego ingrediensu przedmiotu  $P$ .

Z twierdzeń — 1 i 2 — otrzymujemy zgodnie z definicją III twierdzenie żądane.

*Twierdzenie IX.* Jeżeli pewien przedmiot jest częścią przedmiotu  $P$ , to  $P$  jest klasą części przedmiotu  $P$ .

Dowód: Załóżmy, że

(1) pewien przedmiot jest częścią przedmiotu  $P$ .

Wypada stąd, iż pewien przedmiot jest takim przedmiotem  $P_1$ , że

(2)  $P_1$  jest częścią przedmiotu  $P$ .

Wobec prawdziwości twierdzenia 1 wnosimy z twierdzenia III, iż

(3) każda część przedmiotu  $P$  jest ingrediensem przedmiotu  $P$ .

Z twierdzeń — 3 i 2 — wynika, że

(4)  $P_1$  jest ingrediensem przedmiotem  $P$ .

Z twierdzenia II wiemy, iż

(5)  $P_1$  jest ingrediensem przedmiotu  $P_1$ .

Z twierdzeń — 4 i 5 — wypada, że

(6) pewien ingrediens przedmiotu  $P$  jest ingrediensem przedmiotu  $P_1$ .

Z twierdzeń — 6 i 2 — wnosimy, iż

(7) pewien ingrediens przedmiotu  $P$  jest ingrediensem pewnej części  $P$ .

Możemy powiedzieć, że

(8) jeżeli  $C$  jest częścią przedmiotu  $P$ , to pewien ingrediens przedmiotu  $C$  jest ingrediensem pewnej części przedmiotu  $P$ ,

gdybyśmy bowiem przypuścili, że jest inaczej, to wypadłoby stąd, że pewna część  $C_1$  przedmiotu  $P$  jest taka, iż żaden ingrediens przedmiotu  $C_1$  nie jest ingrediensem żadnej części przedmiotu  $P$ , z czego wynikłoby (zgodnie z twierdzeniem II), że i sam przedmiot  $C_1$  nie jest ingrediensem żadnej części przedmiotu  $P$ , stąd zaś otrzymalibyśmy wniosek, sprzeczny z twierdzeniem II, a mianowicie wniosek, iż  $C_1$  nie jest ingrediensem przedmiotu  $C_1$ . Zgodnie z definicją I piszemy:

(9) każdy ingrediens przedmiotu  $P$  jest albo przedmiotem  $P$  albo częścią przedmiotu  $P$ .

Z twierdzeń — 7 i 8 — wnosimy na podstawie twierdzenia 9, iż

(10) jeżeli  $I$  jest ingrediensem przedmiotu  $P$ , to pewien ingrediens przedmiotu  $I$  jest ingrediensem pewnej części przedmiotu  $P$ .

Z twierdzeń — 3 i 10 — wypada zgodnie z definicją III, że

(11)  $P$  jest klasą części przedmiotu  $P$ .

Tak więc — twierdzenie 1 doprowadziło nas do twierdzenia 11. Wypada stąd, że jeżeli pewien przedmiot jest częścią przedmiotu  $P$ , to  $P$  jest klasą części przedmiotu  $P$ , co właśnie należało udowodnić.

*Twierdzenie X.* Każdy dany przedmiot  $P$  jest klasą przedmiotów  $P$ .

Dowód: Wiedząc z twierdzenia II, iż  $P$  jest ingrediensem przedmiotu  $P$ , możemy zapisać:

(1) każde  $P$  jest ingrediensem przedmiotu  $P$ .

Z twierdzenia V wiadomo, że

(2) jeżeli  $I$  jest ingrediensem przedmiotu  $P$ , to pewien ingrediens przedmiotu  $I$  jest ingrediensem pewnego  $P$ .

Z twierdzeń — 1 i 2 — otrzymujemy na podstawie definicji III twierdzenie żądane.

## § 6.

*Definicja IV.* Używam wyrażenia „element przedmiotu  $P$ ” dla oznaczenia jakiegokolwiek przedmiotu  $P_1$  wtedy, jeżeli przy pewnym znaczeniu wyrazu „ $x$ ” zostają zachowane dwa następujące warunki:

- 1)  $P$  jest klasą przedmiotów  $x$ ,
- 2)  $P_1$  jest  $x$ .

[Przykłady: I. Odcinek  $AC$  na rysunku 2 jest elementem odcinka  $AB$ , albowiem, jeżeli wyraz „ $x$ ” jest użyty w znaczeniu wyrażenia „odcinek, będący  $AC$  albo  $AB$ ”, to 1) odcinek  $AB$  jest klasą przedmiotów  $x$ , 2) odcinek  $AC$  jest  $x$ . II. Dowolny koń  $K$  nie jest elementem klasy myszy, albowiem przy żadnym znaczeniu wyrazu „ $x$ ” nie jest zarazem prawdą, że klasa myszy jest klasą przedmiotów  $x$ , oraz że koń  $K$  jest  $x$ . (Komentarz: koń  $K$  nie jest ani klasą myszy, ani też częścią klasy myszy; wypada stąd

— zgodnie z definicją I — iż koń  $K$  nie jest ingrediensem klasy myszy; gdyby jednak przy jakimkolwiek znaczeniu wyrazu „ $x$ ” były zarazem prawdami zdania — 1) „klasa myszy jest klasą przedmiotów  $x$ ” oraz 2) „koń  $K$  jest  $x$ ” — to ze zdań tych wynikłoby na zasadzie definicji III, że koń  $K$  jest ingrediensem klasy myszy.]]

### § 7.

*Twierdzenie XI.* Jeżeli  $P_1$  jest ingrediensem przedmiotu  $P$ , to  $P_1$  jest elementem przedmiotu  $P$ .

Dowód: Załóżmy, że

(1)  $P_1$  jest ingrediensem przedmiotu  $P$ .

O przedmiocie  $P$  możemy — zgodnie z twierdzeniem VIII — powiedzieć, że

(2)  $P$  jest klasą ingrediensów przedmiotu  $P$ .

Używając wyrazu „ $x$ ” w znaczeniu wyrażenia „ingrediens przedmiotu  $P$ ”, wnosimy z twierdzeń 2 i 1, że

(3)  $P$  jest klasą przedmiotów  $x$ ,

(4)  $P_1$  jest  $x$ .

Z twierdzeń — 3 i 4 — wypada zgodnie z definicją IV, iż

(5)  $P_1$  jest elementem przedmiotu  $P$ .

Tak więc — zakładając twierdzenie 1, dochodzimy do twierdzenia 5. Wypada stąd, że jeżeli  $P_1$  jest ingrediensem przedmiotu  $P$ , to  $P_1$  jest elementem przedmiotu  $P$ , co właśnie należało udowodnić.

*Twierdzenie XII.* Jeżeli  $P_1$  jest elementem przedmiotu  $P$ , to  $P_1$  jest ingrediensem przedmiotu  $P$ .

Dowód: Załóżmy, że

(1)  $P_1$  jest elementem przedmiotu  $P$ .

Z twierdzenia 1 wypada — zgodnie z definicją IV — iż istnieje takie znaczenie wyrazu „ $x$ ”, że —

(2)  $P$  jest klasą przedmiotów  $x$ ,

(3)  $P_1$  jest  $x$ .

Z twierdzenia 2 wnosimy na podstawie definicji III, że

(4) każde  $x$  jest ingrediensem przedmiotu  $P$ .

Z twierdzeń — 4 i 3 — wypada, iż

(5)  $P_1$  jest ingrediensem przedmiotu  $P$ .

Tak więc — zakładając twierdzenie 1, dochodzimy do twierdzenia 5. Wypada stąd, że jeżeli  $P_1$  jest elementem przedmiotu  $P$ , to  $P_1$  jest ingrediensem przedmiotu  $P$ , co właśnie należało udowodnić.

*Twierdzenie XIII.* Jeżeli  $P_1$  jest częścią przedmiotu  $P$ , to  $P_1$  jest elementem przedmiotu  $P$ .

Twierdzenie to jest wnioskiem z twierdzeń — III i XI.

*Twierdzenie XIV.* Każdy przedmiot jest swoim własnym elementem.

Dowód: Przypuśćmy, że twierdzenie, które chcę udowodnić, jest fałszem. Wypada stąd, iż pewien przedmiot jest takim przedmiotem  $P$ , że

(1)  $P$  nie jest elementem przedmiotu  $P$ .

Wypada stąd, iż

(2)  $P$  nie jest ingrediensem przedmiotu  $P$ ,

gdyby bowiem  $P$  było ingrediensem przedmiotu  $P$ , to  $P$  byłoby — zgodnie z twierdzeniem XI — elementem przedmiotu  $P$ , co byłoby sprzeczne z twierdzeniem 1. Twierdzenie 2 jest sprzeczne z twierdzeniem II. Musi więc być fałszem prowadzące do tej sprzeczności przypuszczenie nasze, iż twierdzenie XIV jest fałszem. Tak więc twierdzenie XIV jest prawdą.

*Twierdzenie XV.* Jeżeli  $P$  jest elementem przedmiotu  $P_1$ , a  $P_1$  jest elementem przedmiotu  $P_2$ , to  $P$  jest elementem przedmiotu  $P_2$ .

Dowód: Załóżmy, że

(1)  $P$  jest elementem przedmiotu  $P_1$ , a  $P_1$  jest elementem przedmiotu  $P_2$ .

Wypada stąd — zgodnie z twierdzeniem XII — że —

(2)  $P$  jest ingrediensem przedmiotu  $P_1$ ,

(3)  $P_1$  jest ingrediensem przedmiotu  $P_2$ .

Z twierdzeń — 2 i 3 — wnosimy na podstawie twierdzenia IV, że

(4)  $P$  jest ingrediensem przedmiotu  $P_2$ ,

z czego wypada — w myśl twierdzenia XI — iż

(5)  $P$  jest elementem przedmiotu  $P_2$ .

Tak więc — zakładając twierdzenie 1, dochodzimy do twierdzenia 5. Wypada stąd, że jeżeli  $P$  jest elementem przedmiotu  $P_1$ , a  $P_1$  jest elementem przedmiotu  $P_2$ , to  $P$  jest elementem przedmiotu  $P_2$ . To właśnie należało udowodnić.

*Twierdzenie XVI.* Jeżeli  $P$  jest klasą przedmiotów  $m$ , to każde  $m$  jest elementem przedmiotu  $P$ .

Dowód: Załóżmy, że

(1)  $P$  jest klasą przedmiotów  $m$ .

Wypada stąd — zgodnie z definicją III — iż

(2) każde  $m$  jest ingrediensem przedmiotu  $P$ .

Z twierdzeń — XI i 2 — wypada, że

(3) każde  $m$  jest elementem przedmiotu  $P$ .

Tak więc — zakładając twierdzenie 1, dochodzimy do twierdzenia 3. Wypada stąd, że jeżeli  $P$  jest klasą przedmiotów  $m$ , to każde  $m$  jest elementem przedmiotu  $P$ , co właśnie należało udowodnić.

*Twierdzenie XVII.* Jeżeli  $P$  jest mnogością przedmiotów  $m$ , to pewne  $m$  jest elementem przedmiotu  $P$ .

Dowód: Załóżmy, że

(1)  $P$  jest mnogością przedmiotów  $m$ .

Wypada stąd — zgodnie z definicją II — że jeżeli  $I$  jest ingrediensem przedmiotu  $P$ , to pewien ingrediens przedmiotu  $I$  jest ingrediensem pewnego  $m$ , które jest ingrediensem przedmiotu  $P$ . Widzimy stąd, że i pewien ingrediens samego przedmiotu  $P$  jest (zgodnie z twierdzeniem II) ingrediensem pewnego  $m$ , które jest ingrediensem przedmiotu  $P$ . Tak więc — pewien ingrediens przedmiotu  $P$  jest ingrediensem pewnego takiego przedmiotu  $X$ , iż —

(2)  $X$  jest  $m$ ,

(3)  $X$  jest ingrediensem przedmiotu  $P$ .

Z twierdzenia 3 wnosimy — na podstawie twierdzenia XI — że

(4)  $X$  jest elementem przedmiotu  $P$ .

Z twierdzeń — 2 i 4 — wynika, iż

(5) pewne  $m$  jest elementem przedmiotu  $P$ .

Tak więc — zakładając twierdzenie 1, dochodzimy do twierdzenia 5. Wypada stąd, że jeżeli  $P$  jest mnogością przedmiotów  $m$ , to pewne  $m$  jest elementem przedmiotu  $P$ , co właśnie należało udowodnić.

## § 8.

*Twierdzenie XVIII.* Jeżeli  $P$  jest  $m$ , to  $P$  jest mnogością przedmiotów  $m$ .

Dowód: Przypuśćmy, że twierdzenie, które chcę udowodnić, jest fałszem. Wypada stąd, iż pewien przedmiot jest takim przedmiotem  $P'$ , że wprawdzie

(1)  $P'$  jest  $m$ ,

ale

(2)  $P'$  nie jest mnogością przedmiotów  $m$ .

Z twierdzenia II wiemy, iż

(3)  $P'$  jest ingrediensem przedmiotu  $P'$ .

Zgodnie z twierdzeniem V —

(4) jeżeli  $I$  jest ingrediensem przedmiotu  $P'$ , to pewien ingrediens przedmiotu  $I$  jest ingrediensem przedmiotu  $P'$ .

Z twierdzeń — 4 i 3 — wnosimy, iż

(5) jeżeli  $I$  jest ingrediensem przedmiotu  $P'$ , to pewien ingrediens przedmiotu  $I$  jest ingrediensem przedmiotu  $P'$ , który jest ingrediensem przedmiotu  $P'$ .

Z twierdzeń — 5 i 1 — wypada, że

(6) jeżeli  $I$  jest ingrediensem przedmiotu  $P'$ , to pewien ingrediens przedmiotu  $I$  jest ingrediensem pewnego  $m$ , które jest ingrediensem przedmiotu  $P'$ .

Z twierdzenia 6 wynika — w myśl definicji II — iż

(7)  $P'$  jest mnogością przedmiotów  $m$ .

Twierdzenie 7 jest sprzeczne z twierdzeniem 2. Musi więc być fałszem prowadzące do tej sprzeczności przypuszczenie nasze, że twierdzenie XVIII jest fałszem. Tak więc — twierdzenie XVIII jest prawdą.

*Twierdzenie XIX.* Jeżeli  $P$  jest mnogością przedmiotów  $m$ , a każde  $m$  jest  $n$ , to  $P$  jest mnogością przedmiotów  $n$ .

Dowód: Załóżmy, że:

(1)  $P$  jest mnogością przedmiotów  $m$ ,

(2) każde  $m$  jest  $n$ .

Z twierdzenia 1 wnosimy — zgodnie z definicją II — że

(3) jeżeli  $I$  jest ingrediensem przedmiotu  $P$ , to pewien ingrediens przedmiotu  $I$  jest ingrediensem pewnego  $m$ , które jest ingrediensem przedmiotu  $P$ .

Z twierdzeń — 3 i 2 — wynika, iż

(4) jeżeli  $I$  jest ingrediensem przedmiotu  $P$ , to pewien ingrediens przedmiotu  $I$  jest ingrediensem pewnego  $n$ , które jest ingrediensem przedmiotu  $P$ .

Z twierdzenia 4 wnosimy — zgodnie z definicją II — że

(5)  $P$  jest mnogością przedmiotów  $n$ .

Tak więc — zakładając twierdzenia 1 i 2, dochodzimy do twierdzenia 5. Wypada stąd, że jeżeli  $P$  jest mnogością przedmiotów  $m$ , a każde  $m$  jest  $n$ , to  $P$  jest mnogością przedmiotów  $n$ . To właśnie należało udowodnić.

*Twierdzenie XX.* Jeżeli  $P$  jest klasą mnogości przedmiotów  $m$ , to  $P$  jest klasą przedmiotów  $m$ .

Dowód: załóżmy, że

(1)  $P$  jest klasą mnogości przedmiotów  $m$ .

Wypada stąd — zgodnie z definicją III — że —

(2) każda mnogość przedmiotów  $m$  jest ingrediensem przedmiotu  $P$ ,

(3) jeżeli  $I$  jest ingrediensem przedmiotu  $P$ , to pewien ingrediens przedmiotu  $I$  jest ingrediensem pewnej mnogości przedmiotów  $m$ .

Z twierdzenia XVIII wnosimy, iż

(4) każde  $m$  jest mnogością przedmiotów  $m$ .

Z twierdzeń — 2 i 4 — wynika, że

(5) każde  $m$  jest ingrediensem przedmiotu  $P$ .

Możemy się przekonać, iż

(6) jeżeli  $I$  jest ingrediensem przedmiotu  $P$ , to pewien ingrediens przedmiotu  $I$  jest ingrediensem pewnego  $m$ ,

za pomocą następującego rozumowania: przypuśćmy, że twierdzenie 6 jest fałszem; wypada stąd, iż pewien przedmiot jest takim przedmiotem  $I_1$ , że wprowadzie

(a)  $I_1$  jest ingrediensem przedmiotu  $P$ ,

ale

(b) żaden ingrediens przedmiotu  $I_1$  nie jest ingrediensem żadnego  $m$ ; z twierdzeń — 3 i a — wnosimy, iż

(c) pewien ingrediens przedmiotu  $I_1$  jest ingrediensem pewnej mnogości przedmiotów  $m$ ,

z czego wypada, iż pewien przedmiot jest takim przedmiotem  $I_2$ , że —

(d)  $I_2$  jest mnogością przedmiotów  $m$ .



(e) pewien ingrediens przedmiotu  $I_1$  jest ingrediensem przedmiotu  $I_2$ ,  
z twierdzenia  $e$  wynika, iż pewien przedmiot jest takim przedmiotem  $I_3$ , że —  
(f)  $I_3$  jest ingrediensem przedmiotu  $I_1$ ,  
(g)  $I_3$  jest ingrediensem przedmiotu  $I_2$ ;  
z twierdzenia  $d$  wnosimy — zgodnie z definicją II — że  
(h) jeżeli  $I$  jest ingrediensem przedmiotu  $I_2$ , to pewien ingrediens przedmiotu  $I$   
jest ingrediensem pewnego  $m$ ;  
z twierdzeń —  $h$  i  $g$  — wypada, iż  
(i) pewien ingrediens przedmiotu  $I_3$  jest ingrediensem pewnego  $m$ , to znaczy, iż  
pewien przedmiot jest takim przedmiotem  $I_4$ , że —  
(k)  $I_4$  jest ingrediensem przedmiotu  $I_3$ ,  
(l)  $I_4$  jest ingrediensem pewnego  $m$ ;  
z twierdzeń —  $k$  i  $f$  — wnosimy — na podstawie twierdzenia IV — iż  
(m)  $I_4$  jest ingrediensem przedmiotu  $I_1$ ;  
z twierdzeń —  $l$  i  $m$  — wypada, że  
(n) pewien ingrediens przedmiotu  $I_1$  jest ingrediensem pewnego  $m$ ;  
twierdzenie  $n$  jest sprzeczne z twierdzeniem  $b$ ; musi więc być fałszem prowadzące do  
tej sprzeczności przypuszczenie nasze, że twierdzenie 6 jest fałszem; tak więc —  
twierdzenie 6 jest prawdą. Z twierdzeń — 5 i 6 — wynika zgodnie z definicją III, iż  
(7)  $P$  jest klasą przedmiotów  $m$ .  
Tak więc — zakładając twierdzenie 1, dochodzimy do twierdzenia 7. Wypada stąd, że  
jeżeli  $P$  jest klasą mnogości przedmiotów  $m$ , to  $P$  jest klasą przedmiotów  $m$ , co właś-  
nie należało udowodnić.

*Twierdzenie XXI.* Jeżeli  $P$  jest mnogością przedmiotów  $m$ , to  $P$  jest ingrediensem  
klasy przedmiotów  $m$ .

Dowód: załóżmy, iż

(1)  $P$  jest mnogością przedmiotów  $m$ .

Wypada stąd — zgodnie z aksjomatem III — że pewien przedmiot jest takim przed-  
miotem  $P_1$ , iż

(2)  $P_1$  jest klasą mnogości przedmiotów  $m$ .

Z twierdzenia 2 wynika — zgodnie z definicją III — że

(3) każda mnogość przedmiotów  $m$  jest ingrediensem przedmiotu  $P_1$ .

Z twierdzeń — 3 i 1 — wnosimy, iż

(4)  $P$  jest ingrediensem przedmiotu  $P_1$ .

Z twierdzenia 2 wypada — w myśl twierdzenia XX — że

(5)  $P_1$  jest klasą przedmiotów  $m$ .

Z twierdzeń — 4 i 5 — widzimy, iż

(6)  $P$  jest ingrediensem klasy przedmiotów  $m$ .

Tak więc — zakładając twierdzenie 1 — dochodzimy do twierdzenia 6. Wypada stąd,  
że jeżeli  $P$  jest mnogością przedmiotów  $m$ , to  $P$  jest ingrediensem klasy przedmiotów  
 $m$ , co właśnie należało udowodnić.

*Twierdzenie XXII.* Jeżeli  $P$  jest klasą przedmiotów  $m$ , to  $P$  jest klasą mnogości przedmiotów  $m$ .

Dowód: Przypuśćmy, że twierdzenie, które chcę udowodnić, jest fałszem. Wypada stąd, iż pewien przedmiot jest takim przedmiotem  $P_1$ , że wprawdzie

(1)  $P_1$  jest klasą przedmiotów  $m$ ,

ale

(2)  $P_1$  nie jest klasą mnogości przedmiotów  $m$ .

Z twierdzenia 2 wnosimy — zgodnie z definicją III — że musi być fałszem przynajmniej jedno z twierdzeń następujących:

(a) każda mnogość przedmiotów  $m$  jest ingrediensem przedmiotu  $P_1$ ,

(b) jeżeli  $I$  jest ingrediensem przedmiotu  $P_1$ , to pewien ingrediens przedmiotu  $I$  jest ingrediensem pewnej mnogości przedmiotów  $m$ .

Rozpatrzmy kolejno możliwość fałszywości któregośkolwiek z dwóch twierdzeń przed chwilą sformułowanych. Rozpatrzmy najprzód zdanie  $a$  i przypuśćmy, że zdanie to jest fałszem. Wypada stąd, iż pewien przedmiot jest takim przedmiotem  $P_2$ , że wprawdzie

( $\alpha$ )  $P_2$  jest mnogością przedmiotów  $m$ ,

ale

( $\beta$ )  $P_2$  nie jest ingrediensem przedmiotu  $P_1$ .

Z twierdzeń — XXI i  $\alpha$  — wnosimy, iż

( $\gamma$ )  $P_2$  jest ingrediensem klasy przedmiotów  $m$ .

z czego wypada, iż pewien przedmiot jest takim przedmiotem  $P_3$ , że —

( $\delta$ )  $P_3$  jest klasą przedmiotów  $m$ ,

( $\epsilon$ )  $P_2$  jest ingrediensem przedmiotu  $P_3$ .

Z twierdzenia —  $\delta$  i 1 — wynika na podstawie aksjomatu IV, iż

( $\eta$ )  $P_3$  jest  $P_1$ .

Z twierdzeń —  $\epsilon$  i  $\eta$  — widzimy, że

( $\zeta$ )  $P_2$  jest ingrediensem przedmiotu  $P_1$ .

Twierdzenie  $\zeta$  jest sprzeczne z twierdzeniem  $\beta$ . Musi więc być fałszem prowadzące do tej sprzeczności przypuszczenie nasze, iż twierdzenie  $a$  jest fałszem. Przypuśćmy obecnie, że jest fałszem twierdzenie  $b$ . Wypada stąd, iż pewien przedmiot jest takim przedmiotem  $I_1$ , że wprawdzie

( $\vartheta$ )  $I_1$  jest ingrediensem przedmiotu  $P_1$ ,

ale

( $\iota$ ) żaden ingrediens przedmiotu  $I_1$  nie jest ingrediensem żadnej mnogości przedmiotów  $m$ .

Z twierdzenia II wiemy, iż

( $\kappa$ )  $I_1$  jest ingrediensem przedmiotu  $I_1$ .

Z twierdzeń —  $\iota$  i  $\kappa$  — wnosimy, że

( $\lambda$ )  $I_1$  nie jest ingrediensem żadnej mnogości przedmiotów  $m$ .

Z twierdzeń —  $\vartheta$  i  $\lambda$  — wynika, iż

( $\mu$ )  $P_1$  nie jest mnogością przedmiotów  $m$ ,

z czego wypada — na podstawie twierdzenia VII — że

(v)  $P_1$  nie jest klasą przedmiotów  $m$ .

Twierdzenie v jest sprzeczne z twierdzeniem 1. Musi więc być fałszem prowadzące do tej sprzeczności przypuszczenie nasze, iż twierdzenie  $b$  jest fałszem. Tak tedy —

(3) twierdzenie 2 jest fałszem,

albowiem nie jest, jak widzieliśmy, fałszem żadne z twierdzeń —  $a$  i  $b$  — z których przynajmniej jedno musiałoby być fałszem, gdyby twierdzenie 2 było prawdą. Twierdzenie 3 jest sprzeczne z twierdzeniem 2. Musi więc być fałszem prowadzące do tej sprzeczności przypuszczenie nasze, że twierdzenie XXII jest fałszem. Tak więc — twierdzenie XXII jest prawdą.

*Twierdzenie XXIII.* Jeżeli jest prawdą, iż jeżeli  $I$  jest ingrediensem przedmiotu  $P_1$ , to pewien ingrediens przedmiotu  $I$  jest ingrediensem przedmiotu  $P$ , to  $P_1$  jest ingrediensem przedmiotu  $P$ .

Dowód: Załóżmy, iż jest prawdą, że

(1) jeżeli  $I$  jest ingrediensem przedmiotu  $P_1$ , to pewien ingrediens przedmiotu  $I$  jest ingrediensem przedmiotu  $P$ .

Z twierdzenia II wiemy, że

(2)  $P_1$  jest ingrediensem przedmiotu  $P_1$ .

Z twierdzeń — 1 i 2 — wnosimy, iż pewien przedmiot jest takim przedmiotem  $P_2$ , że —

(3)  $P_2$  jest ingrediensem przedmiotu  $P_1$ ,

(4)  $P_2$  jest ingrediensem przedmiotu  $P$ .

Z twierdzeń — 3 i 4 wynika, iż

(5) pewien przedmiot jest ingrediensem przedmiotu  $P_1$  i zarazem ingrediensem przedmiotu  $P$ . Jasne jest, iż

(6) każdy przedmiot, który jest ingrediensem przedmiotu  $P_1$  i zarazem ingrediensem przedmiotu  $P$ , jest ingrediensem przedmiotu  $P_1$ .

Możemy się przekonać, że

(7) jeżeli  $I$  jest ingrediensem przedmiotu  $P_1$ , to pewien ingrediens przedmiotu  $I$  jest ingrediensem pewnego przedmiotu, który jest ingrediensem przedmiotu  $P_1$  i zarazem przedmiotu  $P$ ,

za pomocą następującego rozumowania: przypuśćmy, iż twierdzenie 7 jest fałszem; wypada stąd, iż pewien przedmiot jest takim przedmiotem  $I_1$ , że wprowadzie

(a)  $I_1$  jest ingrediensem przedmiotu  $P_1$ ,

ale

(b) żaden ingrediens przedmiotu  $I_1$  nie jest ingrediensem żadnego przedmiotu, który jest ingrediensem przedmiotu  $P_1$  i zarazem przedmiotu  $P$ ;

z twierdzeń — 1 i a — wypada, że

(c) pewien ingrediens przedmiotu  $I_1$  jest ingrediensem przedmiotu  $P$ ;

z twierdzenia c widzimy, iż pewien przedmiot jest takim przedmiotem  $I_2$ , że —

(d)  $I_2$  jest ingrediensem przedmiotu  $I_1$ ,

- (e)  $I_2$  jest ingrediensem przedmiotu  $P$ ;  
z twierdzeń —  $d$  i  $a$  — wnosimy, iż
- (f)  $I_2$  jest ingrediensem przedmiotu  $P_1$ ;  
z twierdzeń —  $f$  i  $e$  — wynika, że
- (g)  $I_2$  jest przedmiotem, który jest ingrediensem przedmiotu  $P_1$  i zarazem przedmiotu  $P$ ;  
z twierdzenia II wiemy, iż
- (h)  $I_2$  jest ingrediensem przedmiotu  $I_2$ ;  
z twierdzeń —  $d$  i  $h$  — wypada, że
- (i) pewien ingrediens przedmiotu  $I_1$  jest ingrediensem przedmiotu  $I_1$ ;  
z twierdzeń —  $i$  i  $g$  — wnosimy, iż
- (k) pewien ingrediens przedmiotu  $I_1$  jest ingrediensem pewnego przedmiotu, który jest ingrediensem przedmiotu  $P_1$  i zarazem przedmiotu  $P_2$ ;  
twierdzenie  $k$  jest sprzeczne z twierdzeniem  $b$ ; musi więc być fałszem prowadzące do tej sprzeczności przypuszczenie nasze, iż twierdzenie 7 jest fałszem; tak więc — twierdzenie 7 jest prawdą. Z twierdzeń — 6 i 7 — wypada na zasadzie definicji III, że
- (8)  $P_1$  jest klasą przedmiotów, będących ingrediensami przedmiotu  $P_1$  i zarazem przedmiotu  $P$ .  
Z twierdzeń — VII i 8 — wnosimy, iż
- (9)  $P_1$  jest mnogością przedmiotów, będących ingrediensami przedmiotu  $P_1$  i zarazem przedmiotu  $P$ .  
Jasne jest, że
- (10) każdy przedmiot będący ingrediensem przedmiotu  $P_1$  i zarazem przedmiotu  $P$ , jest ingrediensem przedmiotu  $P$ .  
Z twierdzeń — 9 i 10 — wynika zgodnie z twierdzeniem XIX, iż
- (11)  $P_1$  jest mnogością ingrediensów przedmiotu  $P$ .  
Z twierdzeń — XXI i 11 — wypada, że
- (12)  $P_1$  jest ingrediensem klasy ingrediensów przedmiotu  $P$ ,  
z czego wnosimy, iż pewien przedmiot jest takim przedmiotem  $P_3$ , że
- (13)  $P_3$  jest klasą ingrediensów przedmiotu  $P$ ,  
(14)  $P_1$  jest ingrediensem przedmiotu  $P_3$ .  
Z twierdzenia VIII wiemy, iż
- (15)  $P$  jest klasą ingrediensów przedmiotu  $P$ .  
Z twierdzeń — 13 i 15 — wynika zgodnie z aksjomatem IV, że
- (16)  $P_3$  jest  $P$ .  
Z twierdzeń — 14 i 16 — wypada, iż
- (17)  $P_1$  jest ingrediensem przedmiotu  $P$ .  
Tak więc — zakładając twierdzenie 1, dochodzimy do twierdzenia 17. Wypada stąd, że jeżeli pewien ingrediens każdego ingrediensu przedmiotu  $P_1$  jest ingrediensem przedmiotu  $P$ , to i sam przedmiot  $P_1$  jest ingrediensem przedmiotu  $P$ . To właśnie należało udowodnić.

## § 9.

*Twierdzenie XXIV.* Każdy przedmiot  $P$  jest klasą elementów tego właśnie przedmiotu  $P$ .

Dowód: Z twierdzenia XII wiemy, iż

(1) każdy element przedmiotu  $P$  jest ingrediensem przedmiotu  $P$ .

Z twierdzenia VI wiemy, że

(2) jeżeli  $I$  jest ingrediensem przedmiotu  $P$ , to pewien ingrediens przedmiotu  $I$  jest ingrediensem pewnego ingrediensu przedmiotu  $P$ .

Z twierdzenia 2 wnosimy — zgodnie z twierdzeniem XI — iż

(3) jeżeli  $I$  jest ingrediensem przedmiotu  $P$ , to pewien ingrediens przedmiotu  $I$  jest ingrediensem pewnego elementu przedmiotu  $P$ .

Z twierdzeń — 1 i 3 — otrzymujemy zgodnie z definicją III twierdzenie żądane.

*Twierdzenie XXV.* Każda mnogość jest swoim własnym elementem.

Twierdzenie to jest bezpośrednim wnioskiem z twierdzenia XIV.

*Twierdzenie XXVI.* Żaden przedmiot nie jest klasą mnogości, nie będących swoimi własnymi elementami.

Dowód: Przypuśćmy, iż twierdzenie, które chcę udowodnić, jest fałszem. Wypada stąd, iż pewien przedmiot jest takim przedmiotem  $P$ , że

(1)  $P$  jest klasą mnogości, nie będących swoimi własnymi elementami.

Z twierdzeń — VII i 1 — wynika, iż

(2)  $P$  jest mnogością mnogości, nie będących swoimi własnymi elementami.

Z twierdzeń — XVII i 2 — wynika, że

(3) pewna mnogość, nie będąca swoim własnym elementem, jest elementem przedmiotu  $P$ .

Z twierdzenia 3 widzimy, iż pewien przedmiot jest takim przedmiotem  $P_1$ , że

(4)  $P_1$  jest mnogością, nie będącą swoim własnym elementem,

(5)  $P_1$  jest elementem przedmiotu  $P$ .

Twierdzenie 4 jest sprzeczne z twierdzeniem XXV. Musi więc być fałszem prowadzące do tej sprzeczności przypuszczenie nasze, iż twierdzenie XXVI jest fałszem. Tak więc — twierdzenie XXVI jest prawdą.

*Twierdzenie XXVII.* Twierdzenie „Jeżeli  $P$  jest elementem mnogości przedmiotów  $m$ , to  $P$  jest  $m$ ” jest fałszem.\*

Dowód: Przypuśćmy, że twierdzenie XXVII jest fałszem. Wnosimy stąd, iż

(1) twierdzenie „Jeżeli  $P$  jest elementem mnogości przedmiotów  $m$ , to  $P$  jest  $m$ ” jest prawdą.

Z twierdzenia 1 wynika, że

(2) jeżeli  $P$  jest elementem mnogości przedmiotów  $m$ , to jest  $P$  jest  $m$ .

---

\* Każde z twierdzeń — XXVI i XXVII — wskazuje na to, że w rozwijanej w pracy niniejszej teorii mnogości nie daje się wcale skonstruować tzw. antynomia Russella.

Uważajmy jakieś takie przedmioty —  $P_1$  i  $P_2$  — że

(3)  $P_1$  jest częścią przedmiotu  $P_2$ .

Z twierdzenia 2 wypada, iż

(4) jeżeli  $P_1$  jest elementem mnogości przedmiotów  $P_2$ , to  $P_1$  jest  $P_2$ .

Z twierdzenia X wiemy, że

(5)  $P_2$  jest klasą przedmiotów  $P_2$ .

Z twierdzeń — VII i 5 — wnosimy, iż

(6)  $P_2$  jest mnogością przedmiotów  $P_2$ .

Z twierdzenia 3 wynika — na podstawie twierdzenia III, X — że

(7)  $P_1$  jest elementem przedmiotu  $P_2$ .

Z twierdzeń — 7 i 6 — wypada, iż

(8)  $P_1$  jest elementem mnogości przedmiotów  $P_2$ .

Z twierdzeń — 4 i 8 — wnosimy, że

(9)  $P_1$  jest  $P_2$ ,

skąd wynika (zgodnie z twierdzeniem I), iż

(10)  $P_1$  nie jest częścią przedmiotu  $P_2$ .

Twierdzenie 10 jest sprzeczne z twierdzeniem 3. Musi więc być fałszem prowadzące do tej sprzeczności przypuszczenie nasze, że twierdzenie XXVII jest fałszem. Tak więc — twierdzenie XXVII jest prawdą.

## § 10.

*Definicja V.* Wyrażenia „podmnożność przedmiotu  $P$ ” używam dla oznaczenia wszelkiego takiego przedmiotu  $P_1$ , który czyni zadość następującemu warunkowi: każdy element przedmiotu  $P_1$  jest elementem przedmiotu  $P$ .

[Przykłady: I. Odcinek  $AC$  rysunku 2 jest podmnożnością odcinka  $AB$ , albowiem odcinek  $AC$  czyni zadość warunkowi definicji V: każdy element odcinka  $AC$  jest elementem odcinka  $AB$ . II. Odcinek  $AB$  rysunku 2 nie jest podmnożnością odcinka  $AC$ , albowiem nie każdy element odcinka  $AB$  jest elementem odcinka  $AC$ : oto np. sam odcinek  $AB$ , który jest — zgodnie z twierdzeniem XIV — elementem odcinka  $AB$ , nie jest elementem odcinka  $AC$ .]

*Definicja VI.* Wyrażenia „podmnożność właściwa przedmiotu  $P$ ” używam dla oznaczenia wszelkiej takiej podmnożności  $P_1$  przedmiotu  $P$ , która nie jest  $P$ .

[Przykłady: I. Odcinek  $AC$  rysunku 2 jest podmnożnością właściwą odcinka  $AB$ , albowiem odcinek  $AC$  jest taką podmnożnością odcinka  $AB$ , która nie jest odcinkiem  $AB$ . II. Odcinek  $AB$  rysunku 3 nie jest podmnożnością właściwą odcinka  $AB$ , albowiem odcinek  $AB$  jest odcinkiem  $AB$ , nie jest więc prawdą, iż odcinek  $AB$  jest taką podmnożnością odcinka  $AB$ , która nie jest odcinkiem  $AB$ .]

## § 11.

*Twierdzenie XXVIII.* Jeżeli  $P_1$  jest ingrediensem przedmiotu  $P$ , to  $P_1$  jest podmnożnością przedmiotu  $P$ .

Dowód: Przypuśćmy, że twierdzenie, które chcę udowodnić, jest fałszem. Wypada stąd, że pewne przedmioty są takimi przedmiotami —  $A$  i  $B$  — że wprawdzie

(1)  $A$  jest ingrediensem przedmiotu  $B$ ,

ale

(2)  $A$  nie jest podmnożnością przedmiotu  $B$ .

Z twierdzenia 2 wnosimy na podstawie definicji V, iż

(3) pewien element przedmiotu  $A$  nie jest elementem przedmiotu  $B$ , z czego widzimy, iż pewien przedmiot jest takim przedmiotem  $C$ , że wprawdzie

(4)  $C$  jest elementem przedmiotu  $A$ ,

ale

(5)  $C$  nie jest elementem przedmiotu  $B$ .

Z twierdzenia 5 wynika, iż

(6)  $C$  nie jest ingrediensem przedmiotu  $B$ ,

gdymy bowiem  $C$  było ingrediensem przedmiotu  $B$ , to wypadłoby stąd na zasadzie twierdzenia XI, że  $C$  jest elementem przedmiotu  $B$ , co jest sprzeczne z twierdzeniem 5. Z twierdzeń — XII i 4 — widzimy, iż

(7)  $C$  jest ingrediensem przedmiotu  $A$ .

Z twierdzeń — 7 i 1 — wnosimy zgodnie z twierdzeniem IV, że

(8)  $C$  jest ingrediensem przedmiotu  $B$ .

Twierdzenie 8 jest sprzeczne z twierdzeniem 6. Musi więc być fałszem prowadzące do tej sprzeczności założenie nasze, iż twierdzenie XXVIII jest fałszem. Tak więc — twierdzenie XXVIII jest prawdą.

*Twierdzenie XXIX.* Jeżeli  $P_1$  jest podmnożnością przedmiotu  $P$ , to  $P_1$  jest ingrediensem przedmiotu  $P$ .

Dowód: Przypuśćmy, że twierdzenie XXIX jest fałszem. Wynika stąd, iż pewne przedmioty są takimi przedmiotami —  $A$  i  $B$  — że wprawdzie

(1)  $A$  jest podmnożnością przedmiotu  $B$

ale

(2)  $A$  nie jest ingrediensem przedmiotu  $B$ .

Z twierdzenia 2 wypada, iż

(3)  $A$  nie jest elementem przedmiotu  $B$ ,

gdymy bowiem  $A$  było elementem przedmiotu  $B$ , to wypadłoby stąd na podstawie twierdzenia XII, że  $A$  jest ingrediensem przedmiotu  $B$ , co jest sprzeczne z twierdzeniem 2. Z twierdzenia XIV wiemy, iż

(4)  $A$  jest elementem przedmiotu  $A$ .

Z twierdzeń — 4 i 3 — wnosimy, że

(5) pewien elementem przedmiotu  $A$  nie jest elementem przedmiotu  $B$ .

Z twierdzenia 5 wynika na zasadzie definicji V, iż

(6)  $A$  nie jest podmnożnością przedmiotu  $B$ .

Twierdzenie 6 jest sprzeczne z twierdzeniem 1. Musi więc być fałszem prowadzące do tej sprzeczności przypuszczenie nasze, że twierdzenie XXIX jest fałszem. Tak więc — twierdzenie XXIX jest prawdą.

*Twierdzenie XXX.* Jeżeli  $P_1$  jest częścią przedmiotu  $P$ , to  $P_1$  jest podmnożnością właściwą przedmiotu  $P$ .

Dowód: Załóżmy, iż

(1)  $P_1$  jest częścią przedmiotu  $P$ .

Z twierdzeń — III i 1 — wypada, że

(2)  $P_1$  jest ingrediensem przedmiotu  $P$ .

Z twierdzeń — XXVIII i 2 — widzimy, iż

(3)  $P_1$  jest podmnożnością przedmiotu  $P$ .

Z twierdzeń — I i 1 — wnosimy, że

(4)  $P_1$  nie jest  $P$ .

Z twierdzeń — 3 i 4 — wynika zgodnie z definicją VI, iż

(5)  $P_1$  jest podmnożnością właściwą przedmiotu  $P$ .

Tak więc — zakładając twierdzenie 1, dochodzimy do twierdzenia 5. Wypada stąd, że jeżeli  $P_1$  jest częścią przedmiotu  $P$ , to  $P_1$  jest podmnożnością właściwą przedmiotu  $P$ , co właśnie należało udowodnić.

*Twierdzenie XXXI.* Jeżeli  $P_1$  jest podmnożnością właściwą przedmiotu  $P$ , to  $P_1$  jest częścią przedmiotu  $P$ .

Dowód: załóżmy, iż

(1)  $P_1$  jest podmnożnością właściwą przedmiotu  $P$ .

Z twierdzenia 1 wnosimy na podstawie definicji VI, że

(2)  $P_1$  jest podmnożnością przedmiotu  $P$ ,

(3)  $P_1$  nie jest  $P$ .

Z twierdzeń — XXIX i 2 — wynika, iż

(4)  $P_1$  jest ingrediensem przedmiotu  $P$ .

Z twierdzeń — 4 i 3 — wypada na zasadzie definicji I, że

(5)  $P_1$  jest częścią przedmiotu  $P$ .

Tak więc — zakładając twierdzenie 1, dochodzimy do twierdzenia 5. Wnosimy stąd, iż jeżeli  $P_1$  jest podmnożnością właściwą przedmiotu  $P$ , to  $P_1$  jest częścią przedmiotu  $P$ , co właśnie należało udowodnić.

*Twierdzenie XXXII.* Żaden przedmiot nie jest podmnożnością właściwą samego siebie.

Dowód: Gdybyśmy przypuścili, że jakiś przedmiot  $P$  jest podmnożnością właściwą samego siebie, to znaczy, iż jakiś przedmiot  $P$  jest podmnożnością właściwą przedmiotu  $P$ , to wynikałoby stąd — zgodnie z twierdzeniem XXXI, że  $P$  jest częścią przedmiotu  $P$ , co jest sprzeczne z twierdzeniem I.



*Twierdzenie XXXIII.* Każdy przedmiot jest podmnogością samego siebie.

Dowód: Gdybyśmy przypuścili, iż jakiś przedmiot  $P$  nie jest podmnogością samego siebie, to znaczy, że jakiś przedmiot  $P$  nie jest podmnogością przedmiotu  $P$ , to wypadłoby stąd na podstawie twierdzenia XXVIII, iż  $P$  nie jest ingrediensem przedmiotu  $P$ , co jest sprzeczne z twierdzeniem II.

*Twierdzenie XXXIV.* Jeżeli  $P$  jest podmnogością właściwą przedmiotu  $P_1$ , to  $P_1$  nie jest podmnogością właściwą przedmiotu  $P$ .

Dowód: Załóżmy, że

(1)  $P$  jest podmnogością właściwą przedmiotu  $P_1$ .

Wnosimy stąd na zasadzie twierdzenia XXXI, iż

(2)  $P$  jest częścią przedmiotu  $P_1$ ,

z czego wynika w myśl aksjomatu I, że

(3)  $P_1$  nie jest częścią przedmiotu  $P$ .

Z twierdzeń — XXI i 3 — wypada, iż

(4)  $P_1$  nie jest podmnogością właściwą przedmiotu  $P$ .

Tak więc — twierdzenie 1 doprowadziło nas do twierdzenia 4. Widzimy stąd, że jeżeli  $P_1$  jest podmnogością właściwą przedmiotu  $P_1$ , to  $P_1$  nie jest podmnogością właściwą przedmiotu  $P$ , co właśnie należało udowodnić.

*Twierdzenie XXXV.* Jeżeli  $P$  jest podmnogością właściwą przedmiotu  $P_1$ , to  $P$  nie jest podmnogością przedmiotu  $P$ .

Dowód: Przypuścimy, iż twierdzenie XXXV jest fałszem. Wypada stąd, iż pewne przedmioty są takimi przedmiotami —  $A$  i  $B$  — że wprawdzie

(1)  $A$  jest podmnogością właściwą przedmiotu  $B$ ,

ale

(2)  $B$  jest podmnogością przedmiotu  $A$ .

Z twierdzenia 1 wypada — zgodnie z definicją VI — iż

(3)  $A$  nie jest  $B$ .

Z twierdzenia 3 wypada, że

(4)  $B$  nie jest  $A$ .

Z twierdzeń — 2 i 4 — wnosimy na podstawie definicji VI, iż

(5)  $B$  jest podmnogością właściwą przedmiotu  $A$ .

Z twierdzeń — XXXIV i 1 — wynika, że

(6)  $B$  nie jest podmnogością właściwą przedmiotu  $A$ .

Twierdzenie 6 jest sprzeczne z twierdzeniem 5. Musi więc być fałszem prowadzące do tej sprzeczności przypuszczenie nasze, iż twierdzenie XXXV jest fałszem. Tak więc — twierdzenie XXXV jest prawdą.

*Twierdzenie XXXVI.* Jeżeli  $P$  jest podmnogością przedmiotu  $P_1$ , a  $P_1$  jest podmnogością przedmiotu  $P_2$ , to  $P$  jest podmnogością przedmiotu  $P_2$ .

Dowód: Załóżmy, iż —

(1)  $P$  jest podmnogością przedmiotu  $P_1$ ,

(2)  $P_1$  jest podmnożnością przedmiotu  $P_2$ .

Z twierdzeń — XXIX i 1 — wynika, że

(3)  $P$  jest ingrediensem przedmiotu  $P_1$ .

Z twierdzeń — XXIX i 2 — wypada, iż

(4)  $P_1$  jest ingrediensem przedmiotu  $P_2$ .

Z twierdzeń — 3 i 4 — wnosimy zgodnie z twierdzeniem IV, że

(5)  $P$  jest ingrediensem przedmiotu  $P_2$ .

Z twierdzeń — XXVIII i 5 — wynika, iż

(6)  $P$  jest podmnożnością przedmiotu  $P_2$ .

Tak więc zakładając twierdzenia — 1 i 2 — dochodzimy do twierdzenia 6. Wypada stąd, że jeżeli  $P$  jest podmnożnością przedmiotu  $P_1$ , a  $P_1$  jest podmnożnością przedmiotu  $P_2$ , to  $P$  jest podmnożnością przedmiotu  $P_2$ . To właśnie należało udowodnić.

*Twierdzenie XXXVII.* Jeżeli  $P$  jest podmnożnością właściwą przedmiotu  $P_1$ , a  $P_1$  jest podmnożnością przedmiotu  $P_2$ , to  $P$  jest podmnożnością właściwą przedmiotu  $P_2$ .

Dowód: Załóżmy, iż

(1)  $P$  jest podmnożnością właściwą przedmiotu  $P_1$ ,

(2)  $P_1$  jest podmnożnością przedmiotu  $P_2$ .

Z twierdzeń — 1 i 2 — wnosimy na podstawie twierdzenia XXXVI, że

(3)  $P$  jest podmnożnością przedmiotu  $P_2$ .

Możemy powiedzieć, iż

(4)  $P_2$  nie jest  $P$ ,

gdyby bowiem  $P_2$  było  $P$ , to wynikłoby stąd zgodnie z twierdzeniem 2, że  $P_1$  jest podmnożnością przedmiotu  $P$ , co musi być fałszem, wiadomo bowiem z twierdzeń — XXXV i 1 — iż  $P_1$  nie jest podmnożnością przedmiotu  $P$ . Z twierdzenia 4 wypada, że

(5)  $P$  nie jest  $P_2$ .

Z twierdzeń — 3 i 5 — wnosimy na podstawie definicji VI, iż

(6)  $P$  jest podmnożnością właściwą przedmiotu  $P_2$ .

Tak więc zakładając twierdzenia — 1 i 2 — dochodzimy do twierdzenia 6. Wypada stąd, że jeśli  $P$  jest podmnożnością właściwą przedmiotu  $P_1$ , a  $P_1$  jest podmnożnością przedmiotu  $P_2$ , to  $P$  jest podmnożnością właściwą przedmiotu  $P_2$ . To właśnie należało udowodnić.

*Twierdzenie XXXVIII.* Jeżeli  $P$  jest podmnożnością przedmiotu  $P_1$ , a  $P_1$  jest podmnożnością właściwą przedmiotu  $P_2$ , to  $P$  jest podmnożnością właściwą przedmiotu  $P_2$ .

Dowód: załóżmy, iż —

(1)  $P$  jest podmnożnością przedmiotu  $P_1$ ,

(2)  $P_1$  jest podmnożnością właściwą przedmiotu  $P_2$ .

Z twierdzeń — 1 i 2 — wnosimy na zasadzie twierdzenia XXXVI, że

(3)  $P$  jest podmnożnością przedmiotu  $P_2$ .

Z twierdzeń — XXXV i 2 — wynika, iż

(4)  $P_2$  nie jest podmnożnością przedmiotu  $P_1$ .

Z twierdzeń — 1 i 4 — wypada, że

(5)  $P$  nie jest  $P_2$ .

Z twierdzeń — 3 i 5 — wnosimy w myśl definicji VI, iż

(6)  $P$  jest podmnożnością właściwą przedmiotu  $P_2$ .

Tak więc zakładając twierdzenia — 1 i 2 — dochodzimy do twierdzenia 6. Wynika stąd, że jeżeli  $P$  jest podmnożnością przedmiotu  $P_1$ , a  $P_1$  jest podmnożnością właściwą przedmiotu  $P_2$ , to  $P$  jest podmnożnością właściwą przedmiotu  $P_2$ . To właśnie należało udowodnić.

*Twierdzenie XXXIX.* Jeżeli  $P_1$  jest elementem  $P$ , to  $P_1$  jest podmnożnością przedmiotu  $P$ .

Twierdzenie to otrzymujemy z twierdzeń — XXVIII i XII.

*Twierdzenie XL.* Jeżeli  $P_1$  jest podmnożnością przedmiotu  $P$ , to  $P_1$  jest elementem przedmiotu  $P$ .

Twierdzenie to otrzymujemy z twierdzeń — XI i XXIX.

*Twierdzenie XLI.* Każdy przedmiot  $P$  jest klasą podmnożności tego właśnie przedmiotu  $P$ .

Dowód: z twierdzenia XXIX wiemy, iż

(1) każda podmnożność przedmiotu  $P$  jest ingrediensem przedmiotu  $P$ .

Z twierdzenia VI wiemy, że

(2) jeżeli  $I$  jest ingrediensem przedmiotu  $P$ , to pewien ingrediens przedmiotu  $I$  jest ingrediensem pewnego ingrediensu przedmiotu  $P$ .

Z twierdzenia 2 wnosimy — zgodnie z twierdzeniem XXVIII — iż

(3) jeżeli  $I$  jest ingrediensem przedmiotu  $P$ , to pewien ingrediens przedmiotu  $I$  jest ingrediensem pewnej podmnożności przedmiotu  $P$ .

Z twierdzeń — 1 i 3 — otrzymujemy zgodnie z definicją III twierdzenie żądane.

*Twierdzenie XLII.* Jeżeli  $P$  jest mnogością przedmiotów  $m$ , [a] każde  $m$  jest  $n$ , to  $P$  jest podmnożnością klasy przedmiotów  $n$ .

Dowód: załóżmy, że

(1)  $P$  jest mnogością przedmiotów  $m$ , a każde  $m$  jest  $n$ .

Z twierdzeń — XIX i 1 — wynika, iż

(2)  $P$  jest mnogością przedmiotów  $n$ .

Z twierdzeń — XXI i 2 — wypada, że

(3)  $P$  jest ingrediensem klasy przedmiotów  $n$ .

Z twierdzeń — XXVIII i 3 — wnosimy, iż

(4)  $P$  jest podmnożnością klasy przedmiotów  $n$ .

Tak więc — zakładając twierdzenie 1, otrzymujemy twierdzenie 4. Wypada stąd, że jeżeli  $P$  jest mnogością przedmiotów  $m$ , a każde  $m$  jest  $n$ , to  $P$  jest podmnożnością klasy przedmiotów  $n$ . To właśnie należało udowodnić.

## § 12.

*Definicja VII.* Używam wyrazu „wszechświat” dla oznaczenia klasy przedmiotów.

*Twierdzenie XLIII.* Pewien przedmiot jest klasą przedmiotów niesprzecznych.

Dowód: W myśl zasady niesprzeczności możemy powiedzieć, iż każdy przedmiot jest przedmiotem niesprzecznym. Wypada stąd, że pewien przedmiot jest przedmiotem niesprzecznym, skąd wynika — zgodnie z aksjomatem III — twierdzenie żądane.

*Twierdzenie XLIV.* Klasa przedmiotów niesprzecznych jest wszechświatem.

Dowód: Zgodnie z definicją III możemy zapisać —

(1) każdy przedmiot niespreczny jest ingrediensem klasy przedmiotów niesprzecznych,

(2) jeżeli  $I$  jest ingrediensem klasy przedmiotów niesprzecznych, to pewien ingrediens przedmiotu  $I$  jest ingrediensem pewnego przedmiotu niesprzecznego.

Zgodnie z zasadą niesprzeczności

(3) każdy przedmiot jest przedmiotem niesprzecznym.

Z twierdzeń — 1 i 3 — wypada, iż

(4) każdy przedmiot jest ingrediensem klasy przedmiotów niesprzecznych.

Z twierdzenia 2 widzimy, że

(5) jeżeli  $I$  jest ingrediensem klasy przedmiotów niesprzecznych, to pewien ingrediens przedmiotu  $I$  jest ingrediensem pewnego przedmiotu. Z twierdzeń — 4 i 5 — wnosimy na podstawie definicji III, iż

(6) klasa przedmiotów niesprzecznych jest klasą przedmiotów, skąd — na zasadzie definicji VII — otrzymujemy twierdzenie żądane.

*Twierdzenie XLV.* Jeżeli  $P$  jest wszechświatem i  $P_1$  jest wszechświatem, to  $P$  jest  $P_1$ .

Dowód: Załóżmy, że —

(1)  $P$  jest wszechświatem,

(2)  $P_1$  jest wszechświatem.

Z twierdzenia 1 otrzymujemy w myśl definicji VII:

(3)  $P$  jest klasą przedmiotów.

Z twierdzenia 2 wnosimy zgodnie z definicją VII, iż

(4)  $P_1$  jest klasą przedmiotów.

Z twierdzeń — 3 i 4 — wynika na podstawie aksjomatu IV, że

(5)  $P$  jest  $P_1$ .

Tak więc, zakładając twierdzenia — 1 i 2 — dochodzimy do twierdzenia 5. Wypada stąd, że jeżeli  $P$  jest wszechświatem i  $P_1$  jest wszechświatem, to  $P$  jest  $P_1$ , co właśnie należało udowodnić.

## § 13.

*Definicja VIII.* Wyrażenia „przedmiot zewnętrzny względem przedmiotu  $P$ ” używam dla oznaczenia każdego takiego przedmiotu  $P_1$ , który czyni zadość następującemu warunkowi: żaden ingrediens przedmiotu  $P$  nie jest ingrediensem przedmiotu  $P_1$ .

[Przykłady: I. Odcinek  $AC$  rysunku 2 jest przedmiotem zewnętrznym względem odcinka  $DB$ , albowiem żaden ingrediens odcinka  $DB$  nie jest ingrediensem odcinka  $AC$ . II. Odcinek  $AD$  rysunku 2 nie jest przedmiotem zewnętrznym względem odcinka  $CB$ , albowiem odcinek  $CD$ , będący ingrediensem odcinka  $CB$ , jest również ingrediensem odcinka  $AD$ , nie jest więc prawdą, iż żaden ingrediens odcinka  $CB$  nie jest ingrediensem odcinka  $AD$ .]

*Twierdzenie XLVI.* Jeżeli  $P_1$  jest przedmiotem zewnętrznym względem przedmiotu  $P_1$ , to  $P$  jest przedmiotem zewnętrznym względem przedmiotu  $P_1$ .

Dowód: Załóżmy, że

(1)  $P_1$  jest przedmiotem zewnętrznym względem przedmiotu  $P$ . Z twierdzenia 1 wnosimy na podstawie definicji VIII, iż

(2) żaden ingrediens przedmiotu  $P$  nie jest ingrediensem przedmiotu  $P_1$ , z czego wynika, iż

(3) żaden ingrediens przedmiotu  $P_1$  nie jest ingrediensem przedmiotu  $P$ .

Z twierdzenia 3 wypada na zasadzie definicji VIII, że

(4)  $P$  jest przedmiotem zewnętrznym względem przedmiotu  $P_1$ .

Tak więc — zakładając twierdzenie 1, otrzymaliśmy twierdzenie 4. Wypada stąd, że jeżeli  $P_1$  jest przedmiotem zewnętrznym względem przedmiotu  $P$ , to  $P$  jest przedmiotem zewnętrznym względem przedmiotu  $P_1$ . To właśnie należało udowodnić.

*Twierdzenie XLVII.* Żaden przedmiot nie jest przedmiotem zewnętrznym względem samego siebie.

Dowód: Przypuśćmy, iż twierdzenie XLVII jest fałszem. Wypada stąd, iż pewien przedmiot jest takim przedmiotem  $P$ , że

(1)  $P$  jest przedmiotem zewnętrznym względem przedmiotu  $P$ .

Z twierdzenia 1 wnosimy (zgodnie z definicją VIII), iż

(2) żaden ingrediens przedmiotu  $P$  nie jest ingrediensem przedmiotu  $P$ .

Twierdzenie 2 jest twierdzeniem sprzecznym. Musi więc być fałszem prowadzące do tej sprzeczności założenie nasze, że twierdzenie XLVII jest fałszem. Tak więc — twierdzenie XLVII jest prawdą.

## § 14.

*Definicja IX.* Wyrażenia „dopełnienie przedmiotu  $P_1$  do przedmiotu  $P$ ” używam dla oznaczenia dowolnego przedmiotu  $P_2$ , jeżeli są zachowane dwa następujące warunki:

(1)  $P_1$  jest podmnożnością  $P$ ,

(2)  $P_2$  jest klasą elementów przedmiotu  $P$  zewnętrznych względem przedmiotu  $P_1$ .

[Przykłady: I. Stanisław Poniatowski jest dopełnieniem klasy królów polskich, nie będących Stanisławem Poniatowskim, do klasy królów polskich, albowiem: 1) klasa królów polskich, nie będących Stanisławem Poniatowskim, jest podmnożnością klasy królów polskich, 2) Stanisław Poniatowski jest klasą takich elementów klasy królów polskich, które są przedmiotami zewnętrznymi względem klasy królów polskich, nie będących Stanisławem Poniatowskim. II. Odcinek  $AC$  rysunku 2 nie jest dopełnieniem odcinka  $DB$  do odcinka  $AB$ , albowiem jest tu wprawdzie zachowany warunek 1 (odcinek  $DB$  jest podmnożnością odcinka  $AB$ ), ale nie jest zachowany warunek 2 (odcinek  $AC$  nie jest klasą elementów odcinka  $AB$  zewnętrznych względem odcinka  $DB$ ). III. Zermelo nie jest dopełnieniem klasy matematyków, nie będących Zermelem, do klasy matematyków, nie będących Borelem, albowiem jest tu wprawdzie zachowany warunek 2 (Zermelo jest klasą takich elementów klasy matematyków, nie będących Borelem, które są przedmiotami zewnętrznymi względem klasy matematyków, nie będących Zermelem), ale nie jest zachowany warunek 1 (klasa matematyków, nie będących Zermelem, nie jest podmnożnością klasy matematyków, nie będących Borelem).]

## §15.

*Twierdzenie XLVIII.* Jeżeli  $P_1$  jest częścią przedmiotu  $P$ , to pewien przedmiot jest dopełnieniem przedmiotu  $P_1$  do przedmiotu  $P$ .

Dowód: Załóżmy, iż

(1)  $P_1$  jest częścią przedmiotu  $P$ .

Z twierdzeń — XXX i 1 — wnosimy, że

(2)  $P_1$  jest podmnożnością właściwą przedmiotu  $P$ .

Z twierdzenia 2 wynika na podstawie definicji VI, iż

(3)  $P_1$  jest podmnożnością przedmiotu  $P$ ,

na podstawie zaś twierdzenia XXXV — że

(4)  $P$  nie jest podmnożnością przedmiotu  $P_1$ .

Z twierdzenia 4 wypada na zasadzie twierdzenia XXVIII, iż

(5)  $P$  nie jest ingrediensem przedmiotu  $P_1$ .

Możemy powiedzieć, iż pewien przedmiot jest takim przedmiotu  $P_2$ , że —

(6)  $P_2$  jest ingrediensem przedmiotu  $P$ ,

(7) żaden ingrediens przedmiotu  $P_2$  nie jest ingrediensem przedmiotu  $P_1$  —

gdyby bowiem żaden przedmiot nie był przedmiotem  $P_2$ , czyniącym zadość twierdzeniom — 6 i 7 — to wypadłoby stąd, iż jest prawdą, że jeżeli  $I$  jest ingrediensem przedmiotu  $P$ , to pewien ingrediens przedmiotu  $I$  jest ingrediensem przedmiotu  $P_1$  — stąd zaś wynikałoby zgodnie z twierdzeniem XXIII, iż  $P$  jest ingrediensem przedmiotu  $P_1$ , co jest sprzeczne z twierdzeniem 5.

Z twierdzenia 7 wnosimy na zasadzie definicji VIII, iż

(8)  $P_1$  jest przedmiotem zewnętrznym względem przedmiotu  $P_2$ .

Z twierdzeń — XLVI i 8 — wynika, że

(9)  $P_2$  jest przedmiotem zewnętrznym względem przedmiotu  $P_1$ .

Z twierdzeń — XI i 6 — wypada, iż

(10)  $P_2$  jest elementem przedmiotu  $P$ .

Z twierdzeń — 10 i 9 — widzimy, że

(11)  $P_2$  jest elementem przedmiotu  $P$ , zewnętrznym względem przedmiotu  $P_1$ .

Z twierdzenia 11 wnosimy — w myśl aksjomatu III — iż

(12) pewien przedmiot  $P_3$  jest klasą elementów przedmiotu  $P$ , zewnętrznym względem przedmiotu  $P_3$ .

Z twierdzeń — 3 i 12 — wynika na podstawie definicji IX, że

(13)  $P_3$  jest dopełnieniem przedmiotu  $P_1$  do przedmiotu  $P$ .

Tak więc — zakładając twierdzenie 1, doszliśmy do twierdzenia 13. Wypada stąd, że jeżeli  $P_1$  jest częścią przedmiotu  $P$ , to pewien przedmiot jest dopełnieniem przedmiotu  $P_1$  do przedmiotu  $P$ , co właśnie należało udowodnić.

*Twierdzenie II.* Jeżeli  $P_2$  jest dopełnieniem przedmiotu  $P_1$  do przedmiotu  $P$ , to  $P_2$  jest przedmiotem zewnętrznym względem przedmiotu  $P_1$ .

Dowód: Przypuśćmy, iż twierdzenie II jest fałszem. Wypada stąd, iż pewne przedmioty są takimi przedmiotami —  $P$ ,  $P_1$  i  $P_2$  — że wprawdzie

(1)  $P_2$  jest dopełnieniem przedmiotu  $P_1$  do przedmiotu  $P$ ,

ale

(2)  $P_2$  nie jest przedmiotem zewnętrznym względem przedmiotu  $P_1$ .

Z twierdzenia 1 wnosimy na podstawie definicji IX, iż

(3)  $P_2$  jest klasą elementów przedmiotu  $P$ , zewnętrznym względem przedmiotu  $P_1$ .

Z twierdzenia 3 wynika na zasadzie definicji III, że

(4) jeżeli  $I$  jest ingrediensem przedmiotu  $P_2$ , to pewien ingrediens przedmiotu  $I$  jest ingrediensem pewnego takiego elementu przedmiotu  $P$ , który jest przedmiotem zewnętrznym względem przedmiotu  $P_1$ .

Z twierdzenia 2 wypada — w myśl definicji VIII — iż

(5) pewien ingrediens przedmiotu  $P_1$  jest ingrediensem przedmiotu  $P_2$ .

Widzimy stąd, iż pewien przedmiot jest takim przedmiotem  $P_3$ , że —

(6)  $P_2$  jest ingrediensem przedmiotu  $P_1$ ,

(7)  $P_3$  jest ingrediensem przedmiotu  $P_2$ .

Z twierdzeń — 4 i 7 — wnosimy, iż

(8) pewien ingrediens przedmiotu  $P_3$  jest ingrediensem pewnego takiego elementu przedmiotu  $P$ , który jest przedmiotem zewnętrznym względem przedmiotu  $P_1$ .

Wynika stąd, iż pewien przedmiot jest takim przedmiotem  $P_4$ , że —

(9)  $P_4$  jest ingrediensem przedmiotu  $P_3$ ,

(10)  $P_4$  jest ingrediensem pewnego takiego elementu przedmiotu  $P$ , który jest przedmiotem zewnętrznym względem przedmiotu  $P_1$ .

Z twierdzenia 10 wypada, iż pewien przedmiot jest takim przedmiotem  $P_3$ , że —

- (11)  $P_5$  jest elementem przedmiotu  $P$ ,
- (12)  $P_5$  jest przedmiotem zewnętrznym względem przedmiotu  $P_1$ ,
- (13)  $P_4$  jest ingrediensem przedmiotu  $P_5$ .

Z twierdzenia 12 wnosimy na podstawie definicji VIII, iż

- (14) żaden ingrediens przedmiotu  $P_1$  nie jest ingrediensem przedmiotu  $P_5$ .

Z twierdzeń — 9 i 6 — wynika na zasadzie twierdzenia IV, że

- (15)  $P_4$  jest ingrediensem przedmiotu  $P_1$ .

Z twierdzeń — 14 i 15 — wypada, iż

- (16)  $P_4$  nie jest ingrediensem przedmiotu  $P_5$ .

Twierdzenie 16 jest sprzeczne z twierdzeniem 13. Musi więc być fałszem prowadzące do tej sprzeczności przypuszczenie nasze, że twierdzenie II jest fałszem. Tak więc — twierdzenie II jest prawdą.

*Twierdzenie L.* Jeżeli  $P_2$  jest dopełnieniem przedmiotu  $P_1$  do przedmiotu  $P$ , to  $P_2$  jest częścią przedmiotu  $P$ .

Dowód: Załóżmy, iż

- (1)  $P_2$  jest dopełnieniem  $P_1$  do przedmiotu  $P$ .

Z twierdzenia 1 wnosimy — w myśl definicji IX — że —

- (2)  $P_1$  jest podmnożnością przedmiotu  $P$ ,
- (3)  $P_2$  jest klasą elementów przedmiotu  $P$  zewnętrznych względem przedmiotu  $P_1$ .

Z twierdzenia 3 wynika — zgodnie z definicją III — iż

(4) jeżeli  $I$  jest ingrediensem przedmiotu  $P_2$ , to pewien ingrediens przedmiotu  $I$  jest ingrediensem pewnego takiego elementu przedmiotu  $P$ , który jest przedmiotem zewnętrznym względem przedmiotu  $P_1$ .

Wypada stąd, że

(5) jeżeli  $I$  jest ingrediensem przedmiotu  $P_2$ , to pewien ingrediens przedmiotu  $I$  jest ingrediensem pewnego elementu przedmiotu  $P$ .

Z twierdzenia 5 wnosimy na podstawie twierdzenia XII, iż

(6) jeżeli  $I$  jest ingrediensem przedmiotu  $P_2$ , to pewien ingrediens przedmiotu  $I$  jest ingrediensem pewnego ingrediensu przedmiotu  $P$ .

Z twierdzenia 6 wynika na zasadzie twierdzenia IV, że

(7) jeżeli  $I$  jest ingrediensem przedmiotu  $P_2$ , to pewien ingrediens przedmiotu  $I$  jest ingrediensem przedmiotu  $P$ .

Z twierdzeń — XXIII i 7 — wypada, iż

- (8)  $P_2$  jest ingrediensem przedmiotu  $P$ .

Z twierdzeń — II i 1 — wnosimy, że

- (9)  $P_2$  jest przedmiotem zewnętrznym względem przedmiotu  $P_1$ .

Z twierdzenia 9 wynika w myśl definicji VIII, iż

- (10) żaden ingrediens przedmiotu  $P_1$  nie jest ingrediensem przedmiotu  $P_2$ .

Z twierdzenia II wiemy, że

- (11)  $P_1$  jest ingrediensem przedmiotu  $P_1$ .



Z twierdzeń — 10 i 11 — wypada, iż

(12)  $P_1$  nie jest ingrediensem przedmiotu  $P_2$ .

Z twierdzeń — XXIX i 2 — wnosimy, że

(13)  $P_1$  jest ingrediensem przedmiotu  $P$ .

Z twierdzeń — 12 i 13 — wynika, iż

(14)  $P_2$  nie jest  $P$ .

Z twierdzeń — 8 i 14 — wypada zgodnie z definicją 1, że

(15)  $P_2$  jest częścią przedmiotu  $P$ .

Tak więc — zakładając twierdzenie 1, otrzymujemy twierdzenie 15. Wnosimy stąd, że jeżeli  $P_2$  jest dopełnieniem przedmiotu  $P_1$  do przedmiotu  $P$ , to  $P_2$  jest częścią przedmiotu  $P$ , co właśnie należało udowodnić.

*Twierdzenie LI.* Jeżeli  $P_2$  jest dopełnieniem przedmiotu  $P_1$  do przedmiotu  $P$ , to  $P_1$  jest dopełnieniem przedmiotu  $P_2$  do przedmiotu  $P$ .

Dowód: Załóżmy, iż

(1)  $P_2$  jest dopełnieniem przedmiotu  $P_1$  do przedmiotu  $P$ .

Wynika stąd na podstawie definicji IX, że

(2)  $P_2$  jest klasą elementów przedmiotu  $P$  zewnętrznych względem przedmiotu  $P_1$ ,

na podstawie zaś twierdzenia L, że

(3)  $P_2$  jest częścią przedmiotu  $P$ .

Z twierdzenia 3 wypada na zasadzie twierdzenia XXX, iż

(4)  $P_2$  jest podmnogością przedmiotu  $P$ .

Z twierdzenia 2 wnosimy w myśl definicji III, że

(5) każdy element przedmiotu  $P$ , zewnętrzny względem przedmiotu  $P_1$ , jest ingrediensem przedmiotu  $P_2$ .

Możemy się przekonać, iż

(6) każdy element przedmiotu  $P$ , zewnętrzny względem przedmiotu  $P_2$ , jest ingrediensem przedmiotu  $P_1$  —

za pomocą następującego rozumowania: przypuśćmy, że twierdzenie 6 jest fałszem; wynika stąd, iż pewien przedmiot jest takim przedmiotem  $P_3$ , że wprawdzie —

(a)  $P_3$  jest elementem przedmiotu  $P$ ,

(b)  $P_3$  jest przedmiotem zewnętrznym względem przedmiotu  $P_2$ ,

ale

(c)  $P_3$  nie jest ingrediensem przedmiotu  $P_1$ ;

z twierdzenia c wypada, iż pewien przedmiot jest takim przedmiotem  $P_4$ , że —

(d)  $P_4$  jest ingrediensem przedmiotu  $P_3$ ,

(e) żaden ingrediens przedmiotu  $P_4$  nie jest ingrediensem przedmiotu  $P_1$ ;

gdyby bowiem żaden przedmiot nie był przedmiotem  $P_4$ , czyniącym zadość twierdzeniom — d i e — to wypadłoby stąd, iż jest prawdą, że jeżeli  $I$  jest ingrediensem przedmiotu  $P_3$ , to pewien ingrediens przedmiotu  $I$  jest ingrediensem przedmiotu  $P_1$  — stąd zaś wynikałoby zgodnie z twierdzeniem XXIII, iż  $P_3$  jest ingrediensem przed-

miotu  $P_1$ , co jest sprzeczne z twierdzeniem  $c$ ; z twierdzenia  $e$  wypada na podstawie definicji VIII, iż

( $f$ )  $P_1$  jest przedmiotem zewnętrznym względem przedmiotu  $P_4$ ;  
z twierdzeń — XLVI i  $f$  — wnosimy, że

( $g$ )  $P_4$  jest przedmiotem zewnętrznym względem przedmiotu  $P_1$ ;  
z twierdzeń — XI i  $d$  — wynika, iż

( $h$ )  $P_4$  jest elementem przedmiotu  $P_3$ ;  
z twierdzeń —  $h$  i  $a$  — wypada na zasadzie twierdzenia XV, że

( $i$ )  $P_4$  jest elementem przedmiotu  $P$ ;  
z twierdzeń —  $i$  i  $g$  — widzimy, iż

( $k$ )  $P_4$  jest elementem przedmiotu  $P$  zewnętrznym względem przedmiotu  $P_1$ ;  
z twierdzeń — 5 i  $k$  — wnosimy, że

( $l$ )  $P_4$  jest ingrediensem przedmiotu  $P_2$ ;  
z twierdzenia  $b$  wynika w myśl definicji VIII, iż

( $m$ ) żaden ingrediens przedmiotu  $P_2$  nie jest ingrediensem przedmiotu  $P_3$ ;  
z twierdzeń —  $m$  i  $l$  — wypada, że

( $n$ )  $P_4$  nie jest ingrediensem przedmiotu  $P_3$ ;  
twierdzenie  $n$  jest sprzeczne z twierdzeniem  $d$ ; musi więc być fałszem prowadzące do tej sprzeczności przypuszczenie nasze, iż twierdzenie 6 jest fałszem; tak więc — twierdzenie 6 jest prawdą. Z twierdzenia 1 wypada zgodnie z definicją IX, że

(7)  $P_1$  jest podmnożnością przedmiotu  $P$ ,  
zgodnie zaś z twierdzeniem — II — że

(8)  $P_2$  jest przedmiotem zewnętrznym względem przedmiotu  $P_1$ .  
Z twierdzeń — XL i 7 — widzimy, iż

(9)  $P_1$  jest elementem przedmiotu  $P$ .  
Z twierdzeń — XLVI i 8 — wnosimy, że

(10)  $P_1$  jest przedmiotem zewnętrznym względem przedmiotu  $P_2$ .  
Z twierdzeń — 9 i 10 — wynika, iż

(11)  $P_1$  jest elementem przedmiotu  $P$  zewnętrznym względem przedmiotu  $P_2$ .  
Z twierdzenia V wiemy, że

(12) jeżeli  $I$  jest ingrediensem przedmiotu  $P_1$ , to pewien ingrediens przedmiotu  $I$  jest ingrediensem przedmiotu  $P_1$ .

Z twierdzeń — 12 i 11 — wypada, że

(13) jeżeli  $I$  jest ingrediensem przedmiotu  $P_1$ , to pewien ingrediens przedmiotu  $I$  jest ingrediensem pewnego takiego elementu przedmiotu  $P$ , który jest przedmiotem zewnętrznym względem przedmiotu  $P_2$ .

Z twierdzeń — 6 i 13 — wnosimy na podstawie definicji III, że

(14)  $P_1$  jest klasą elementów przedmiotu  $P$ , zewnętrznych względem przedmiotu  $P_2$ .  
Z twierdzeń — 4 i 14 — wynika na zasadzie definicji IX, iż

(15)  $P_1$  jest dopełnieniem przedmiotu  $P_2$  do przedmiotu  $P$ .

Tak więc — zakładając twierdzenie 1, dochodzimy do twierdzenia 15. Wypada stąd, że jeżeli  $P_2$  jest dopełnieniem przedmiotu  $P_1$  do przedmiotu  $P$ , to  $P_1$  jest dopełnieniem przedmiotu  $P_2$  do przedmiotu  $P$ . To właśnie należało udowodnić.

*Twierdzenie LII.* Jeżeli  $P_2$  jest dopełnieniem przedmiotu  $P_1$  do przedmiotu  $P$ , to  $P_1$  jest częścią przedmiotu  $P$ .

Twierdzenie to jest wnioskiem z twierdzeń — L i LI.

*Twierdzenie LIII.* Jeżeli  $P_1$  jest podmnogością właściwą przedmiotu  $P$ , to pewien przedmiot jest dopełnieniem przedmiotu  $P_1$  do przedmiotu  $P$ .

Twierdzenie to jest wnioskiem z twierdzeń — XLVIII i XXXI.

*Twierdzenie LIV.* Jeżeli  $P_2$  jest dopełnieniem przedmiotu  $P_1$  do przedmiotu  $P$ , oraz  $P_3$  jest dopełnieniem przedmiotu  $P_1$  do przedmiotu  $P$ , to  $P_2$  jest  $P_3$ .

Dowód: Załóżmy, iż —

(1)  $P_2$  jest dopełnieniem przedmiotu  $P_1$  do przedmiotu  $P$ ,

(2)  $P_3$  jest dopełnieniem przedmiotu  $P_1$  do przedmiotu  $P$ .

Z twierdzenia 1 wnosimy na podstawie definicji IX, że

(3)  $P_2$  jest klasą elementów przedmiotu  $P$  zewnętrznych względem przedmiotu  $P_1$ .

Z twierdzenia 2 wynika na tejże podstawie, iż

(4)  $P_3$  jest klasą elementów przedmiotu  $P$  zewnętrznych względem przedmiotu  $P_1$ .

Z twierdzeń — 3 i 4 — wypada na zasadzie aksjomatu IV, że

(5)  $P_2$  jest  $P_3$ .

Tak więc, zakładając twierdzenia — 1 i 2 — dochodzimy do twierdzenia 5. Jest więc prawdą twierdzenie żądane.

*Twierdzenie LV.* Żaden przedmiot nie jest dopełnieniem siebie samego do jakiegoś przedmiotu.

Dowód: Przypuśćmy, iż twierdzenie LV jest fałszem. Wnosimy stąd, iż pewne przedmioty są takimi przedmiotami —  $P$  i  $P_1$  — że

(1)  $P_1$  jest dopełnieniem przedmiotu  $P_1$  do przedmiotu  $P$ .

Z twierdzeń — II i 1 — wynika, że

(2)  $P_1$  jest przedmiotem zewnętrznym względem przedmiotu  $P_1$ .

Twierdzenie 2 jest sprzeczne z twierdzeniem XLVII. Musi więc być fałszem prowadzące do tej sprzeczności założenie nasze, że twierdzenie LV jest fałszem. Tak więc — twierdzenie LV jest prawdą.

*Twierdzenie LVI.* Żaden przedmiot  $P$  nie jest dopełnieniem żadnego przedmiotu do przedmiotu  $P$ .

Dowód: Przypuśćmy, iż twierdzenie LVI jest fałszem. Wypada stąd, iż pewien przedmiot jest takim przedmiotem  $P_1$ , że

(1)  $P$  jest dopełnieniem przedmiotu  $P_1$  do przedmiotu  $P$ .

Z twierdzeń — L i 1 — wnosimy, iż

(2)  $P$  jest częścią przedmiotu  $P$ .

Twierdzenie 2 jest sprzeczne z twierdzeniem I. Musi więc być fałszem prowadzące do tej sprzeczności założenie nasze, iż twierdzenie LVI jest fałszem. Tak więc — twierdzenie LVI jest prawdą.

*Twierdzenie LVII.* Żaden przedmiot nie jest dopełnieniem żadnego przedmiotu  $P$  do tego właśnie przedmiotu  $P$ .

Dowód: Przypuśćmy, że twierdzenie LVII jest fałszem. Widzimy stąd, iż pewien przedmiot jest takim przedmiotem  $P_1$ , że

(1)  $P_1$  jest dopełnieniem przedmiotu  $P$  do przedmiotu  $P$ .

Z twierdzeń — LII i 1 — wnosimy, iż

(2)  $P$  jest częścią przedmiotu  $P$ .

Twierdzenie 2 jest sprzeczne z twierdzeniem I. Musi więc być fałszem prowadzące do tej sprzeczności przypuszczenie nasze, że twierdzenie LVII jest fałszem. Tak więc — twierdzenie LVII jest prawdą.

*Twierdzenie LVIII.* Jeżeli  $P_2$  jest dopełnieniem przedmiotu  $P_1$  do przedmiotu  $P$ , to  $P$  jest klasą przedmiotów, będących  $P_1$  albo  $P_2$ .

Dowód: Załóżmy, iż

(1)  $P_2$  jest dopełnieniem przedmiotu  $P_1$  do przedmiotu  $P$ .

Z twierdzenia 1 wynika na podstawie twierdzenia LII, że

(2)  $P_1$  jest częścią przedmiotu  $P$ ,

na podstawie zaś twierdzenia L — że

(3)  $P_2$  jest częścią przedmiotu  $P$ .

Z twierdzeń — III i 2 — wypada, iż

(4)  $P_1$  jest ingrediensem przedmiotu  $P$ .

Z twierdzeń — III i 3 — wnosimy, że

(5)  $P_2$  jest ingrediensem przedmiotu  $P$ .

Z twierdzeń — 4 i 5 — wynika, iż

(6) każdy przedmiot, będący  $P_1$  albo  $P_2$ , jest ingrediensem przedmiotu  $P$ .

Z twierdzenia 1 wypada na zasadzie definicji IX, że

(7)  $P_2$  jest klasą elementów przedmiotu  $P$ , zewnętrznych względem przedmiotu  $P_1$ .

Z twierdzenia 7 wnosimy w myśl definicji III, iż

(8) każdy element przedmiotu  $P$  zewnętrzny względem przedmiotu  $P_1$  jest ingrediensem przedmiotu  $P_2$ .

Możemy się przekonać, że

(9) jeżeli  $I$  jest ingrediensem przedmiotu  $P$ , to pewien ingrediens przedmiotu  $I$  jest ingrediensem pewnego przedmiotu, będącego  $P_1$  albo  $P_2$  —

za pomocą następującego rozumowania: przypuśćmy, iż twierdzenie 9 jest fałszem; wynika stąd, iż pewien przedmiot jest takim przedmiotem  $I_1$ , że wprawdzie

(a)  $I_1$  jest ingrediensem przedmiotu  $P$ ,

ale

(b) żaden ingrediens przedmiotu  $I_1$  nie jest ingrediensem żadnego przedmiotu, będącego  $P_1$  albo  $P_2$ ;

Z twierdzenia *b* wypada, iż —

(*c*) żaden ingrediens przedmiotu  $I_1$  nie jest ingrediensem przedmiotu  $P_1$ ,

(*d*) żaden ingrediens przedmiotu  $I_1$  nie jest ingrediensem przedmiotu  $P_2$ ,

z twierdzenia *c* wnosimy zgodnie z definicją VIII, że

(*e*)  $P_1$  jest przedmiotem zewnętrznym względem przedmiotu  $I_1$ ;

z twierdzeń — XLVI i *e* — wynika, iż

(*f*)  $I_1$  jest przedmiotem zewnętrznym względem przedmiotu  $P_1$ ;

z twierdzeń — XI i *a* — wypada, że

(*g*)  $I_1$  jest elementem przedmiotu  $P$ ;

z twierdzeń — *g* i *f* — widzimy, iż

(*h*)  $I_1$  jest elementem przedmiotu  $P$ , zewnętrznym względem przedmiotu  $P_1$ .

Z twierdzeń — 8 i *h* — wnosimy, że

(*i*)  $I_1$  jest ingrediensem przedmiotu  $P_2$ ;

z twierdzenia II wiemy, iż

(*k*)  $I_1$  jest ingrediensem przedmiotu  $I_1$ ;

z twierdzeń — *d* i *k* — wynika, że

(*l*)  $I_1$  nie jest ingrediensem przedmiotu  $P_2$ ;

twierdzenie *l* jest sprzeczne z twierdzeniem *i*; musi więc być fałszem prowadzące do tej sprzeczności przypuszczenie nasze, iż twierdzenie 9 jest fałszem; tak więc — twierdzenie 9 jest prawdą. Z twierdzeń — 6 i 9 — wypada na podstawie definicji III, że

(10)  $P$  jest klasą przedmiotów, będących  $P_1$  albo  $P_2$ .

Tak więc — zakładając twierdzenie 1, dochodzimy do twierdzenia 10. Wynika stąd twierdzenie żądane.