Roman Duda

Integralność matematyki

Filozofia Nauki 8/1, 7-19

2000

Filozofia Nauki
Rok VIII, 2000, Nr 1(29)

Roman Duda

Integralność matematyki

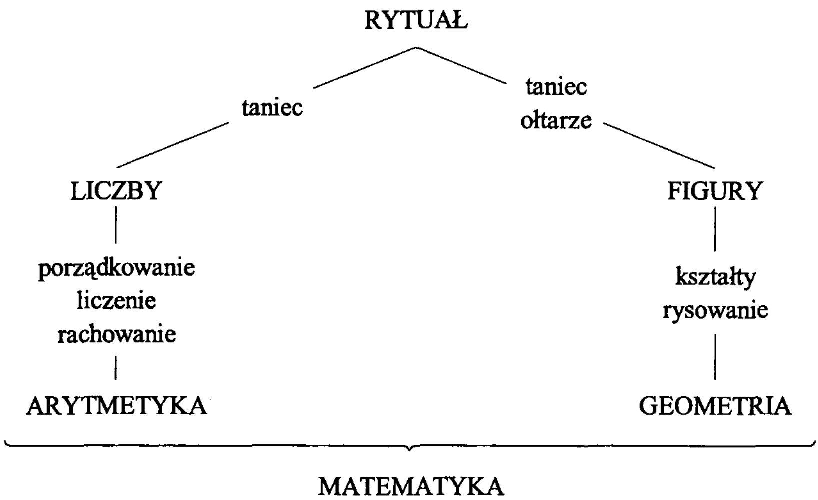
1. Matematykę nazywa się powszechnie „nauką o liczbie i przestrzeni".[1] Mniej jednak powszechnie wiadomo, że dwa jej podstawowe pojęcia — liczba i figura — pochodzą z czasów prehistorycznych i mają jedno wspólne źródło. Istnieją mianowicie poważne argumenty przemawiające za tym, że tym wspólnym źródłem są pierwotne ryty. Liczby: jeden, dwa, trzy itd. — mogły być imionami tancerzy w kolejności ich wchodzenia na rytualną scenę, a figury: koło, kwadrat, odcinek itd. — mogły być nazwami figur w tym rytualnym tańcu lub kształtami miejsc kultowych (ołtarzy).[2] W ten sposób matematyka rozpoczynała swoje istnienie jako wiedza sakralna, dar niebios.

2. Już w tych odległych czasach ta wiedza sakralna wykazywała wszakże swoją użyteczność także w sprawach ziemskich. Liczby pomagały ustawiać kolejno również inne osoby czy przedmioty i zachęcały do rachowania, co ułatwiało obcowanie z mnogościami dyskretnymi. Natomiast figury można było porównywać z kształtami znanymi z otoczenia, co z kolei ułatwiało orientację w tym otoczeniu. Każda z tych grup pojęć dostarczała narzędzi do panowania nad światem wielkości dyskretnych lub odpowiednio ciągłych. W ten sposób oba te pojęcia, a raczej obie grupy pojęć, uruchomiły ewolucję kryjących się za nimi podstawowych czynności intelektualnych człowieka. Ślady w języku zdają się wskazywać, że przez długi czas były to dwa róż-

[1] Por. S. Mac Lane, *Mathematics: Form and function*, Springer-Verlag, Berlin 1986. Autor pisze: „Mathematics, at the beginning, is sometimes described as the science of Number and Space - better: of Numver, Time, Space, and Motion" (*op. cit.*, s. 6).

[2] Por. A. Seidenberg, „The ritual origin of geometry", *Arch. Hist. Exact. Sci.* 1(1960—1962), s. 488—527; „The ritual origin of counting", *ibidem* 2(1965), s. 1—40; „The origin of mathematics", *ibidem* 18(1977—1978), s. 301—342.

ne pola aktywności intelektualnej, z których każda koncentrowała się wokół pojęć swojej grupy.[3]



3. Ten okres prehistoryczny był nie tylko długi, ale i ważny, wspomniana bowiem ewolucja była zjawiskiem wysoce złożonym. Przede wszystkim dostrzegamy w niej proces, który najsłuszniej wypada nazwać „idealizacją". Mam na myśli powolny (w owych czasach niewątpliwie nieuświadomiony[4]) proces wydobywania się pierwotnych koncepcji liczb i figur z magmy konkretnych uwarunkowań. Proces idealizacji powodował, że koncepcje te odrywały się coraz bardziej od kontekstu, w którym były początkowo zanurzone, stając się coraz bardziej «idealne», z drugiej wszakże strony rosło dzięki temu pole ich zastosowań. W ten sposób już w owych prehistorycznych czasach dała o sobie znać tajemnicza cecha tego obszaru, który później został nazwany „matematyką", że im bardziej idealizujemy, tym głębiej możemy wnikać rozumowo w otoczenie. Jednocześnie ujawniało się napięcie, które również utrzymuje się do dzisiaj, między *sacrum* a *profanum*, między matematyką «czystą» a «stosowaną», między teorią a praktyką.

Jednym z pierwszych, którzy dostrzegli proces idealizacji i odczuli potrzebę zwrócenia nań uwagi, był Arystoteles. Pisał on: „Matematyk prowadzi swoje badania

[3] Na złożoność wchodzących tu w grę procesów psychologicznych i ich związek z mową zwracało uwagę wielu autorów, m.in. L. Wygotski, *Myślenie i mowa*, Biblioteka Psychologii Współczesnej, PWN, Warszawa 1989.

[4] Proces taki, podobnie nieuświadomiony, możemy dzisiaj obserwować u dzieci, a tzw. rozszerzona zasada paralelizmu pozwala rozwój intelektualny dziecka rzutować na rozwój intelektualny ludzkości. Por. R. Duda, „Zasada paralelizmu w dydaktyce", *Dydaktyka Matematyki* 1(1981), s. 127—138.

na przedmiotach abstrakcyjnych, bada swój przedmiot pozbawiając go wszelkich zmysłowych własności, takich jak ciężar, lekkość, twardość oraz jej przeciwieństwo, a także ciepło i zimno oraz inne zmysłowe przeciwieństwa, zachowując tylko **ilość i ciągłość** [tu i niżej podkr. moje, RD] oraz ich atrybuty jako **ilościowe i ciągłe**, i nie rozpatrując ich pod żadnym innym względem".[5].

4. W pierwszych cywilizacjach historycznych — w Egipcie, Babilonie, Chinach, a nawet jeszcze w Grecji — ów proces idealizacji był już daleko posunięty, ale ślady konkretu są jeszcze wyraźnie widoczne w nazwach niektórych figur, mitycznych znaczeniach przypisywanych konkretnym liczbom, empirycznym pochodzeniu formuł itp. Cywilizacja grecka różniła się jednak od pozostałych pod jednym ważnym względem: geniuszowi starożytnych Greków zawdzięczamy ostateczną w pewnym sensie idealizację geometrii, przedstawioną w *Elementach* Euklidesa. Ogólność pojęć geometrycznych jeszcze dzisiaj zapiera dech w piersiach, nic więc dziwnego, że na tym poziomie ogólności już pozostaliśmy, a przestrzeń euklidesowa do dziś jest najważniejszym rodzajem przestrzeni matematycznej, wywierającym przemożny wpływ na nasze widzenie świata.

Wprawdzie Grecy zakończyli proces wydobywania sporego fragmentu materii matematycznej z chaotycznej pramaterii konkretu, ale na tym nie poprzestali. Jednocześnie nadali bowiem geometrii kształt, który także obowiązuje w matematyce do dzisiaj, a mianowicie **strukturę aksjomatyczno-dedukcyjną**: *Elementy* Euklidesa zaczynają się od definicji, aksjomatów i postulatów, za którymi idą wyprowadzane z nich twierdzenia oraz ich dowody.[6]

Od czasów greckich wszystkim ich następcom na tym polu przyświecają dwa cele: skrajnego oczyszczenia z elementów zbędnych przedmiotu swoich zainteresowań intelektualnych (skrajnej idealizacji) oraz nadania rezultatom swoich przemyśleń postaci aksjomatyczno-dedukcyjnej.

5. Zasadnicze cele pracy z materią matematyczną zostały więc wytyczone, ale pozostała sprawa jej znaczenia. Otóż w stosunku do cywilizacji poprzednich, takich jak Egipt czy Babilon, a także niemal współczesnych, takich jak Chiny i Indie, nastąpiła w Greków zasadnicza zmiana także i pod tym względem. Zmiana ta wiązała się z ich podejściem do problemu rozumienia przyrody.

---

[5] Arystoteles, *Metafizyka*, 1061a—1961b; por. *Dzieła wszystkie*. T. 2, PWN, Warszawa 1990, s. 789.

[6] Według dzisiejszych standardów *Elementy* zawierają jednak luki, ale jeszcze pod koniec XIX wieku służyły jako podręcznik w szkołach angielskich. Por. B. Russell, *History of Western Philosophy*, George Allen and Unwin, London 1946, s. 233. Pierwszy poprawny (w świetle dzisiejszych standardów) wykład geometrii euklidesowej podał D. Hilbert, *Grundlagen de Geometrie*. W języku polskim można polecić: K. Borsuk i W. Szmielew, *Podstawy geometrii*, Biblioteka Matematyczna, PWN, Warszawa 1955.

W najstarszych cywilizacjach starożytnych przyroda była pojmowana jako coś w rodzaju państwa, rządzonego przez rozmaite bóstwa i duchy, które miały swoje przywary i potrzeby, i z którymi należało pozostawać w dobrych stosunkach. Elitom owych cywilizacji (władcom, administratorom, kapłanom, kupcom itp.) służyła też spora już wówczas wiedza o liczbach i figurach.[7] Przekazywana jako dar niebios, zachowywała charakter sakralny i tajemny, dostępny wąskim tylko kręgom wtajemniczonych. Ów charakter sakralny i tajemny sprzyjał jakości i trwałości przekazu, ale jednocześnie zmniejszał krytycyzm i przez to hamował rozwój wiedzy matematycznej. Regułą w tych wczesnych dziejach historycznych (a zapewne i w prehistorii) były zatem okresy biernego przekazywania tradycji, której pochodzenia już nikt nie pamiętał, wyjątkiem zaś — krytyczne refleksje i zmiany.

Starożytnym Grekom takie mitologiczne podejście do wyjaśniania świata przestało wystarczać. W ich kulturze pojawiła się całkowicie nowa idea, że zjawiska przyrodnicze nie są wynikiem boskich igraszek, ale stanowią konsekwencję wewnętrznej konieczności, strukturalnego musu, niezależnego od czyjejkolwiek woli. Jak słusznie pisze O. Pedersen, była to „idea prawdziwie rewolucyjna. Będąc całkowitym zaprzeczeniem mądrości wcześniejszych stuleci, prowokowała ferment intelektualny, w porównaniu z którym wszystkie późniejsze rewolucje naukowe wydają się drobnymi falami na powierzchni oceanu myśli."[8]

Tak zaczął się proces, który zasadniczo zmienił rolę matematyki i perspektywę intelektualną znacznej części ludzkości. Nie stało się to jednak od razu.

6. Kiedy Grecy jako pierwsi podnieśli problem innego opisu świata, stanęły przed nimi ogromne trudności lingwistyczne. W ich języku (ani w żadnym innym) nie było pojęć zdolnych do oddania istotnych idei nowego podejścia, takich jak wewnętrzna konieczność (późniejsze prawo przyrody), przyczyna, skutek itp. Trudności te Grecy poczęli rozwiązywać na drodze metaforycznej, co polegało na wyjmowaniu słowa z codziennego kontekstu, by posłużyć się nim dla wyrażenia idei obcej potocznemu językowi. Na przykład, gdy Herodot chciał powiedzieć, że przyczyną wylewów Nilu jest Słońce, użył słowa *aitia*, oznaczającego winę zbrodniarza. Podobnie dla opisania przedziwnej cechy, która nie pozwala zjawiskom zachowywać się dowolnie, greccy filozofowie posługiwali się słowem *ananke*, oznaczającym wszystkie możliwe środki, od słownej perswazji do tortur, stosowane dla wymuszenia przyznania się podejrzanego do winy.[9] O. Pederson tak opisuje ten proces:

---

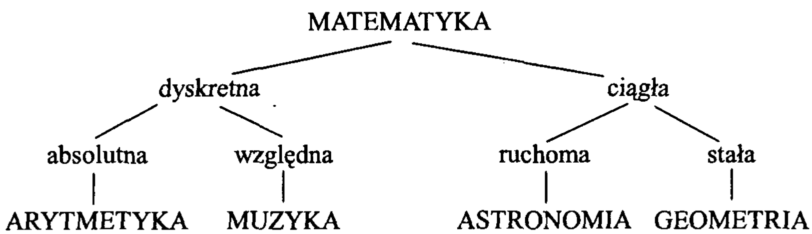
[7] O wiedzy matematycznej w cywilizacjach starożytnych traktują książki z historii matematyki, a w szczególności: O. Neugebauer, *The Exact Sciences in Antiquity*, Brown University Press, Providence (RI) 1969; B.L. van der Waerden, *Erwachende Wissenschaft*, Birkhauser-Verlag, Basel-Stuttgart 1966; H. Gericke, *Mathematik in Antike und Orinet*, Springer—Verlag, Berlin 1984.

[8] O. Pedersen, *Konflikt czy symbioza. Z dziejów relacji między nauką a teologią*, Universum, Biblos, Tarnów 1997, s. 33.

[9] Oba przykłady pochodzą z książki: O. Pedersen, *Konflikt...*, *op. cit.*

„Przez wieki filozofowie greccy posługiwali się w ten sposób językiem metaforycznym. W rezultacie powstał słownik terminów technicznych o metaforycznym pochodzeniu, które zacierało się podczas długiego procesu przyswajania nowego poglądu przez grecki świat. Jak daleko zaszedł ten proces w czwartym wieku przed Chrystusem, możemy wyczytać w IV i V księdze *Metafizyki* Arystotelesa. Zawierają one opisowy katalog około trzydziestu najbardziej ogólnych koncepcji nowego języka, takich jak: materia i forma, substancja i przypadłość, jedność i wielość, przyczyna i skutek, i wiele innych. Z tego punktu widzenia zarówno *Metafizyka*, jak i *Fizyka* mogą być uważane za traktaty lingwistyczne dające semantykę i syntaktykę nowego języka i wyjaśniające go w sposób, który miał stać się wzorem dla następnych pokoleń."[10]

7. Metaforyczna droga opisywania świata nie była jedyna, bo już z końcem VI wieku przed Chrystusem została zaproponowana droga alternatywna. Pierwsi wpadli na nią pitagorejczycy — zauważając, że podstawowe interwały muzyczne charakteryzują się stosunkami czterech pierwszych liczb naturalnych.[11] W owym czasie podstawowa terminologia matematyczna, dotycząca liczb i figur, była już ukształtowana i autonomiczna w tym sensie, że terminy matematyczne już się z niczym Grekom nie kojarzyły. Włączając się do debaty nad początkiem świata, pitagorejczycy orzekli, że „wszystko, co daje się poznać, ma liczbę", bez której „nie można by ani uchwycić myślą, ani poznać niczego".[12] To właśnie oni nadali wiedzy o liczbach i figurach nazwę „matematyka" i podali jej zakresową definicję.[13]



Swoistość drogi matematycznej, w odróżnieniu od drogi metaforycznej, polegała na tym, że nie wchodziła ona na tory wyjaśniania przyczynowo-skutkowego i nie aspirowała do odkrywania filozoficznej istoty rzeczy, a poprzestawała na zewnętrznym opisie sposobu manifestowania się świata. Z dużym uproszczeniem można powiedzieć, że nie siląc się na odpowiedź na pytanie „dlaczego", zadowalała się opisem

---

[10] O. Pedersen, *Konflikt...*, *op. cit.*, s. 39.

[11] Jeśli długość struny skrócić o połowę, ton będzie o oktawę wyższy, a zatem oktawę charakteryzuje stosunek 2:1. Podobnie kwinta charakteryzuje się stosunkiem 3:2, kwarta 4:3 itd.

[12] Por. *Filozofia starożytna Grecji i Rzymu* (oprac. J. Legowicz), PWN, Warszawa 1969, s. 69.

[13] Por. H.W. Turnbull, „The great mathematicians", [w:] J.R. Newman, *The World of Mathematics*, vol. 1, George Allen and Unwin, London 1960, s. 85. Klasyfikację tę można odczytać z przekazu Platona o pitagorejczykach.

„jak". Dostarczała temu opisowi — terminologii i metodologii,[14] a jednocześnie ukazywała jego skuteczność.[15]

O ile droga metaforyczna nie budziła wątpliwości, dostarczała bowiem podstawowych pojęć, na których mogły budować swoje widzenie świata nauki szczegółowe, o tyle droga matematyczna musiała bronić swoich aspiracji do roli języka opisu świata. I broniła ich skutecznie. Być może mało znany spór w łonie pitagorejczyków między matematykami a akuzmatykami należy rozpatrywać właśnie na tle szerszego sporu o wybór drogi opisu świata: akuzmatycy ciągnęli w stronę mistyki i filozofii, podczas gdy matematycy domagali się większej samodzielności.[16]

8. Skodyfikowana przez Boecjusza (480—524) i Kasjodora (480—575) niemal tysiąc lat później klasyfikacja pitagorejska przyjęła formę *quadrivium* i stała się podstawą średniowiecznego kanonu nauczania.[17] W tej postaci przetrwała następny tysiąc lat, a więc utrzymywała się łącznie około dwóch tysiącleci.

9. Można postawić pytanie, dlaczego dzisiaj nadal uważamy arytmetykę i geometrię za w pełni uprawnione części matematyki, natomiast muzyce i astronomii odmawiamy tego prawa. Wypadek astronomii jest tym bardziej uderzający, że przez całe wieki była ona tak ściśle związana z matematyką, że termin „astronomia" uważano niemal za synonim terminu „matematyka".

Pytania tego rodzaju, wyłaniające się z historycznej i filozoficznej refleksji nad matematyką, odnoszą się do pytania bardziej podstawowego: co to jest matematyka.[18] W szczególności można pytać, czy matematyka jest jedną spójną dyscypliną, czy też rodziną dyscyplin, z których każda pretenduje do swoiście pojmowanej «matematyczności», ale poza tym różnią się one przedmiotem i metodami, i w istocie są sobie obce.[19] Formułowane tak lub inaczej — pytania tego rodzaju są dziś w środowisku matematyków dyskutowane. Oprócz racji historycznych, takich jak wyżej przytoczo-

---

[14] Por. *Elementy* Euklidesa, które ukształtowały nasze widzenie przestrzeni i stały się niedościgłym wzorem postępowania i ścisłości przez dwa tysiąclecia.

[15] Przykładem owej skuteczności jest opis ruchu planet, dany przez *Almagest* Ptolemeusza, który przetrwał aż do czasów nowożytnych.

[16] W Tatarkiewicz, *Historia filozofii*. T. I, PWN, Warszawa 1958, s. 64.

[17] Por. E.K. Rand, *Founders of the Middle Ages*, Harvard University Press, Cambridge (Mass.) 1928. Por. także J. Pieper, *Scholastyka. Postacie i zagadnienia filozofii średniowiecznej*, Pax, Warszawa 1963 (zwłaszcza rozdział II) — oraz I. Grattan-Guinness, *Tęcza matematyki* (w druku).

[18] Pytanie to występuje w tytule znanej książki R. Couranta i H. Robnisona *Co to jest matematyka*, Biblioteka Problemów, PWN, Warszawa (kilka wydań). Autorzy nie odpowiadają na to pytanie wprost, a jedynie pośrednio, opisując w przystępny sposób wybrane fragmenty matematyki. Por. także J.R. Newman, *The world..., op. cit.*; L.A. Steen, *Matematyka współczesna. Dwanaście esejów*, Wyd. Naukowo-Techniczne, Warszawa 1983; Ph.J. Davis i R. Hersh, *Świat matematyki*, Wyd. Naukowe PWN, Warszawa 1994.

[19] Na przykład w języku francuskim mamy liczbę mnogą *„les methematiques"*, choć ostatnio zaczyna się pojawiać neologizm *„la mathematique"*.

ne, są także racje świeższe — m.in. szybko rosnąca «objętość» matematyki, z którą jeden człowiek nie jest już w stanie sobie radzić,[20] powszechna wśród matematyków (i nie tylko) tendencja do wąskiej specjalizacji,[21] a także wysuwany tu i ówdzie pogląd, że matematyka jest jedynie dostarczycielką modeli. Do takich poglądów skłaniają też niektórych poważne trudności z aksjomatyzacją teorii mnogości — powszechnie uważanej za podstawę matematyki współczesnej — rodzące pokusę „odmówienia matematyce posiadania rzeczywistej treści" oraz uznania, że „świat matematyki nie jest jednoznacznie wyznaczony".[22]

Poniżej przedstawię kilka argumentów przemawiających za integralnością matematyki.

10. Pierwszego argumentu dostarcza rzut oka na charakter związków między pitagorejskimi częściami matematyki. Części te — arytmetyka, muzyka, astronomia i geometria — wpływają na siebie, podsuwając sobie problemy lub biorąc narzędzia (wyniki, metody). Dzieje się to jednak w charakterystycznie nierówny sposób. Muzyka, jak się wydaje, jest jedynie biernym odbiorcą. Obfite źródło metod i problemów stanowi oczywiście arytmetyka, która dawała proporcje muzyce, a metody rachunkowe geometrii i astronomii. Jednakże i geometria — która rzecz jasna potrzebowała arytmetyki, bo przecież rozmiary figur i wielkości kątów wyrażają się liczbami — już w czasach greckich odpłacała się arytmetyce swoistą terminologią i związanymi z nią problemami. Co więcej, kiedy przestraszeni odkryciem niewspółmierności Grecy (pitagorejczycy utrzymywali je nawet w tajemnicy) zaniedbali arytmetykę, z pomocą przyszła im właśnie geometria. Chociaż pierwiastka kwadratowego z liczby 2 nie można wyrazić ściśle na gruncie arytmetyki, można to ściśle zrobić na gruncie geometrii: mając odcinek o długości 1, łatwo za pomocą tylko cyrkla i liniału zbudować odcinek o długości $\sqrt{2}$ (przekątna kwadratu o boku 1).

Czasy nowożytne dodały odkrycie, że zbiór punktów linii prostej można identyfikować ze zbiorem liczb rzeczywistych, co otworzyło drogę do arytmetyzacji geometrii. Punkty stawały się układami liczb, twory geometryczne — równaniami, nierównościami lub układami takowych, a problemy geometryczne — problemami arytmetycznymi. Na przykład, pytanie o punkt przecięcia dwóch prostych na płaszczyźnie okazało się równoważne pytaniu o rozwiązanie układu dwóch równań liniowych o dwóch niewiadomych (prosta na płaszczyźnie wyraża się równaniem liniowym

---

[20] W postaci anegdotycznej sytuacja ta jest znana pod nazwą dylematu Ulama, który kiedyś policzył, że rocznie ukazuje się ponad 200 000 twierdzeń matematycznych, i spytał, „jak to pogodzić z poglądem, że matematyka przetrwa jako jedna nauka". Por. S. Ulam, *Przygody matematyka*, Prószyński i S-ka, Warszawa, 1996, s. 315n. Por. także Ph.J. Davis i R. Hersh, *Świat...*, *op. cit.*, s. 29—31.

[21] Por. H. Kotlarski, „O problemie miary, czyli kłopoty z matematyką", *Wiadom. Mat.* 35(1999), s. 37—48 (cytaty ze s. 46 i 47).

[22] W głośnej swego czasu książce M. Kline, *Why the professor can't teach*, autor odmawia takiemu wąskiemu specjaliście prawa wykładania na uniwersytecie.

o dwóch niewiadomych, zaś rozwiązanie układu dwóch takich równań wyznacza parę liczb, które są współrzędnymi punktu przecięcia prostych odpowiadających tym równaniom). Ta arytmetyczna szata geometrii umożliwiła jednocześnie błyskotliwą karierę analizy matematycznej, opartej na nowożytnej koncepcji funkcji, jej ciągłości i różniczkowalności; analiza z kolei stawiała wiele pytań arytmetyce i geometrii.

Zarysowane tu związki pozwalają naszkicować następujący diagram (gdzie „*N*" oznacza narzędzia, a „*P*" — problemy):

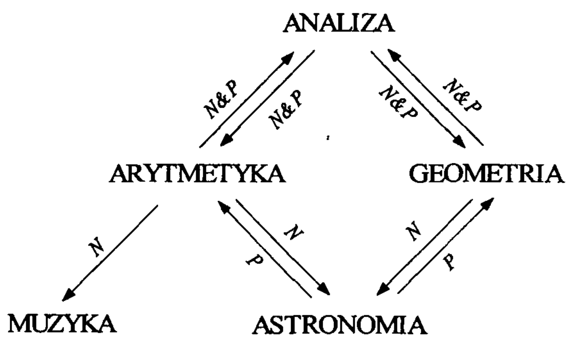


Diagram jest oczywiście uproszczony i nie obejmuje całej matematyki, zwraca jednak uwagę na rzecz niezwykle istotną. Przy matematyce pozostaje to, co zachowuje obustronny związek z jej pierwotnym źródłem, tj. z nauką o liczbie i przestrzeni, czyli arytmetyką i geometrią; odchodzi zaś od niej to, co tylko z tego źródła czerpie, nic lub niewiele dając w zamian. Najwcześniej zatem odpadła muzyka, potem — astronomia; umocnił się natomiast wzajemny związek arytmetyki i geometrii, tworząc swoiste sprzężenie zwrotne; doszła analiza matematyczna, a później i inne działy, takie jak algebra, teoria prawdopodobieństwa itp.

Zmieniając swój zakres, matematyka umacniała wzajemne związki między pozostającymi w niej częściami i utrwalała swoją integralność.

11. Osadzenie się w wiedzy o liczbie i przestrzeni oraz wzajemne przenikanie się różnych działów matematyki nie są jej jedynymi rysami charakterystycznymi. Matematyka istnieje, póki jest treścią ludzkiej świadomości, a w konsekwencji — póki podlega krytycznym procesom odnawiania, potwierdzania lub odrzucania. Dla matematyki ważne są zatem również wewnętrzne procesy, które wpływają na jej kształt, a w rezultacie i na nasze jej rozumienie. Jak po okresie ekspansji w świecie fizycznym następuje zwykle oczyszczanie zdobytego terenu, utrwalanie i wzmacnianie związków z obszarami macierzystymi, tak też pozyskana materia matematyczna — pojęcia, twierdzenia z dowodami, teorie itp. — podlega swoistym procesom oczyszczania i przetwarzania, które teraz krótko zarysuję. Procesy te — to symplifikacja, uogólnianie, abstrakcja, analogia, specjalizacja i kompleksyfikacja.

12. Symplifikacja.

Uzyskany materiał matematyczny przede wszystkim upraszczamy, odrzucając zbyteczne zależności w pojęciach i twierdzeniach, skracając kroki dowodowe, czy drążąc rozmaite trudne miejsca aż do ich zadowalającego wyjaśnienia. Proces symplifikacji jest obecny w matematyce od samego jej początku, ale nigdy nie można mieć całkowitej pewności, że został on w jakimś jej fragmencie zakończony. Pouczających tego przykładów dostarczają pojęcia grupy algebraicznej[23] i prawdopodobieństwa[24]. Szczególnym przypadkiem jest tu analiza trudności w dowodzie, np. poszukiwanie rozwiązań niektórych równań kwadratowych, gdzie występowały pierwiastki z liczb ujemnych. Analiza tej trudności przyczyniła się do odkrycia i upowszechnienia liczb zespolonych.

13. Uogólnianie.

Z procesem uogólniania mamy do czynienia wówczas, gdy od danej mnogości obiektów przechodzimy do mnogości większej, obejmującej mnogość wyjściową, z zachowaniem interesujących nas własności obiektów wyjściowych lub gdy rozciągamy dane pojęcie czy twierdzenie na szerszy kontekst.

Przykładem uogólnienia jest przejście od funkcji trygonometrycznych kąta prostego do funkcji określonych na całej prostej. Inny przykład: pierwotną ideę Kartezjusza opisywania punktu na płaszczyźnie euklidesowej za pomocą pary liczb rozciągamy na trójwymiarową przestrzeń euklidesową, w której punkt opisujemy trójkami liczb i — znacznie ogólniej — tworzymy pojęcie *n*-wymiarowej przestrzeni euklidesowej, której punkty identyfikujemy z układami *n* liczb. To ostatnie uogólnienie stało się możliwe dzięki śmiałemu rozszerzeniu pierwotnej idei kartezjańskiej; proces ten trwał jednak bardzo długo, bo ponad dwieście lat — aż po drugą połowę wieku XIX. Dzisiaj przestrzeń ta jest standardowym obiektem matematycznym, bez którego matematykę trudno sobie w ogóle wyobrazić.

Jeszcze innym przykładem jest twierdzenie Pitagorasa dla trójkąta prostokątnego, które uogólnia się na dowolny trójkąt:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

(jeżeli trójkąt jest prostokątny, to $C = 90^\circ$ i $\cos C = O$).

Często spotykanym wypadkiem uogólniania jest usuwanie z definicji danego pojęcia niektórych warunków. Na przykład, jeśli z pojęcia grupy algebraicznej usuniemy warunek istnienia elementu odwrotnego, otrzymamy pojęcie monoidu, a jeśli usuniemy także warunek istnienia jedności, to zostaje nam półgrupa. Oba te pojęcia okazały się wartościowe i znalazły zastosowanie także poza matematyką (np. urządzenia

---

[23] Por. H. Wussing, *Die Genesis des abstrakten Gruppenbegriffes*, Universität, Math.-naturwiß. Fakultät, Lepizig 1966.

[24] Por. J. bon Plato, *Creating modern probability: its mathematics, physics and philosophy in historical perspective*, Cambridge Univ. Press, Cambridge 1994.

o skończonej liczbie stanów opisuje się przez półgrupę tych stanów, ale oczywiście teoria grup jest bogatsza od teorii półgrup czy monoidów).

14. Abstrakcja.

„Abstrakcją" nazywamy proces tworzenia użytecznych pojęć przez odrzucenie niektórych ograniczeń i przejście na inny poziom — właśnie bardziej «abstrakcyjny». Dobrym przykładem takiego postępowania jest analiza podstawowych własności funkcji ciągłej, co doprowadziło do sformułowania pojęcia przestrzeni topologicznej — czy analiza twierdzenia Borela—Lebesgue'a, głoszącego, że z każdego pokrycia odcinka przedziałami otwartymi można wybrać pokrycie skończone. Analiza ta w związku z poprzednim przykładem doprowadziła do pojęcia przestrzeni topologicznej otwartej.

15. Analogia.

Pojęcie analogii jest często używane w języku codziennym. Poszukiwanie analogii tutaj oznacza odnajdowanie wspólnych cech różnych pojęć czy nawet całych fragmentów matematyki i nadawanie im własnego bytu przez ich sformułowanie za pomocą nowego pojęcia, stającego się *eo ipso* zaczątkiem nowego fragmentu matematyki.

Dobrym przykładem pojęcia w ten sposób otrzymanego jest pojęcie przestrzeni wektorowej, które leży u podłoża geometrii kartezjańskiej, algebry równań liniowych, teorii równań różniczkowych liniowych itp.

Powiada się, że matematycy chętnie szukają analogii, natomiast *dobrzy* matematycy widzą analogie między analogiami. Na takiej drodze Banach mógł dojść do pojęcia przestrzeni abstrakcyjnej, nazywanej dziś przestrzenią Banacha, w której zręcznie łącząc pojęcia topologiczne i algebraiczne, dostrzegł wspólną podstawę różnych do tej pory pojęć matematycznych. Przestrzenie Banacha należą do najintensywniej dziś badanych obiektów matematyki współczesnej.

16. Omówione dotychczas procesy symplifikacji, uogólniania, abstrakcji i analogii są ściśle ze sobą powiązane. Ich wspólnym rysem jest bowiem dążenie do logicznej przejrzystości. Stąd niejednokrotnie trudno jest poprowadzić między nimi wyraźną linię demarkacyjną. Są one jednak różne. Na przykład, jeśli chodzi o uogólnianie i abstrahowanie, to można powiedzieć, że w uogólnianiu chodzi o objęcie wszystkich wcześniejszych przypadków ogólniejszym punktem widzenia (w szczególności pojęciem zawierającym w sobie wszystkie najważniejsze własności uogólnianych wypadków), natomiast w wypadku abstrahowania celem jest wyróżnienie niektórych centralnych aspektów wcześniejszych przypadków i uwolnienie ich od aspektów teraz już zbytecznych. Inaczej mówiąc, w procesie uogólniania pozostajemy w zakresie rozpatrywanych obiektów (trójkątów, funkcji itp.), natomiast w procesie abstrahowania przechodzimy na inny, bardziej «abstrakcyjny» poziom.

Oczywiście nie każde uproszczenie (symplifikacja), uogólnienie, abstrakcja czy analogia prowadzą do pojęć wartościowych. Pokusa jest jednak tak wielka, że czasopisma matematyczne są zalewane pracami uzyskanymi na tych drogach. Co jednak łatwo przychodzi, łatwo też popada w niepamięć. Prawdziwie wartościowe pojęcia i wyniki rodzą się w trudzie i z reguły bardzo długo.

17. Specjalizacja.

Specjalizacja jest to w pewnym sensie odwrócenie uogólnienia: przejście od danej mnogości obiektów do mniejszej czy w jakimś sensie uboższej. Specjalizujemy więc, gdy od dowolnych wielokątów przechodzimy do wielokątów foremnych, ale także gdy od funkcji trygonometrycznych na całej prostej przechodzimy do funkcji trygonometrycznych określonych na skończonym przedziale. Częstym przypadkiem specjalizacji jest sprawdzanie jakiejś hipotezy na jednym obiekcie wyjętym z mnogości tych, których hipoteza dotyczy. Udane sprawdzenie czyni hipotezę bardziej prawdopodobną, nieudane — dostarcza tzw. kontrprzykładu, który hipotezę obala. W ten właśnie sposób obalono hipotezę, że każda funkcja ciągła jest różniczkowalna, przez podanie kontrprzykładu funkcji ciągłej nigdzie nieróżniczkowalnej.

18. Kompleksyfikacja.

Proces kompleksyfikacji jest ukierunkowany zupełnie inaczej; jeżeli bowiem dotychczas dążyliśmy do prostoty, to teraz — dysponując prostymi pojęciami — komplikujemy je, dodają nowe warunki lub nakładając je na siebie.

Przykłady:

grupa → grupa abelowa → pierścień
grupa algebraiczna + topologia → grupa topologiczna
przestrzeń euklidesowa → rozmaitość topologiczna
rozmaitość topologiczna + atlas gładki → rozmaitość gładka
rozmaitość algebraiczna + grupa → grupa Liego
przestrzeń wektorowa + topologia → przestrzeń Banacha, przestrzeń Hilberta itp.

Uzyskane na tej drodze pojęcia należą dziś do najczęściej badanych.[25] Zwracamy przy tym uwagę, że kompleksyfikacja jest procesem odmiennym od symplifikacji. Jeżeli przy tej ostatniej dążymy do uproszczenia czy weryfikacji, to w wypadku kompleksyfikacji świadomie stwarzamy nową jakość — nowe, istotnie różne pojęcie. I choć prawdą jest, że np. grupy abelowe czy grupy topologiczne mieszczą się w mnogości grup algebraicznych (a więc są to pojęcia zwężające), to jednocześnie są to obiekty prowadzące do specyficznych i bogatych teorii, w których warunek dołożony odgrywa istotną rolę.

19. Obfitość i różnorodność opisanych procesów może stwarzać wrażenie, że jest to dzisiaj podstawowa droga tworzenia nowych pojęć matematycznych. Tak jednak nie jest. Procesy tworzenia nowych pojęć przebiegają nieraz w sposób bardzo złożony, a motywacja płynie często spoza matematyki.

---

[25] Por. *Leksykon matematyczny*, Wiedza Powszechna, Warszawa 1993.

20. Duże znaczenie w matematyce ma także rozwiązywanie problemów. Problemy są wyzwaniem dla twórczych matematyków — wyzwaniem angażującym ich talent i siły; z punktu widzenia zaś samej matematyki stanowiły bogate źródło bodźców do jej rozwijania i bywały osią faktycznych, choć nie zawsze jawnie formułowanych programów.

Przykłady:

(a) Postulat równoległych Euklidesa. Analizowany niemal od samego początku swego zaistnienia, zwłaszcza pod kątem niezależności od pozostałych postulatów, doprowadził w XIX wieku, a więc po przeszło dwóch tysiącach lat, do odkrycia geometrii nieeuklidesowych.

(b) Rozwiązywanie równań algebraicznych. Już Babilończycy rozwiązywali niektóre równania drugiego i trzeciego stopnia. W czasach nowożytnych próby rozwiązywania ogólnych równań algebraicznych, w tym również równań wyższych stopni, doprowadziły do odkrycia liczb zespolonych i do utworzenia pojęcia grupy, przyczyniając się w istotny sposób do pojawienia się nowoczesnej algebry i analizy zespolonej.

Przy próbach rozwiązywania problemów powstają twierdzenia oraz ich dowody, bądź też specyficzne wersje twierdzeń w postaci tzw. kontrprzykładów. Wszystko to składa się zwykle na jakiś fragment matematyki i podlega dalszej obróbce, a więc przede wszystkim upraszczaniu (symplifikacji), uogólnianiu (pojęć i twierdzeń), abstrahowaniu, poszukiwaniu analogii między pojęciami, twierdzeniami czy teoriami itd.

21. Mając jakiś obszerny i jednolity fragment matematyki, staramy się wszystkie jego twierdzenia wyprowadzić z jakiegoś układu mniej licznego. W wypadku powodzenia układ taki tworzy aksjomatykę, a jego elementy stanowią aksjomaty. Zaksjomatyzowany fragment matematyki nazywamy „teorią".

Przekształcenie w teorię nie jest końcem, lecz etapem rozwoju matematyki. Zgodnie ze współczesną tendencją do opierania matematyki na teorii mnogości, teorię oraz jej aksjomaty poddaje się opisanym wyżej procesom oczyszczania aż do osiągnięcia stanu, w którym aksjomaty opisują zbiór z nałożoną nań strukturą. Rozróżnia się dzisiaj następujące rodzaje podstawowych struktur matematycznych na zbiorach:

(a) struktury porządkowe, które wynikają z istnienia jakiejś relacji binarnej na danym zbiorze (np. relacja mniejszości w zbiorze liczb rzeczywistych);

(b) struktury algebraiczne, które wynikają z istnienia jakichś działań na elementach danego zbioru (np. działania dodawania i mnożenia w zbiorze liczb rzeczywistych);

(c) struktury geometryczne, które wynikają z istnienia jakiejś grupy bijekcji danego zbioru na siebie (np. przesunięcia i odbicia w zbiorze liczb rzeczywistych);

(d) struktury topologiczne, które wynikają z istnienia pewnej rodziny podzbiorów danego zbioru (np. przedziały otwarte i ich sumy na prostej rzeczywistej).

22. W podsumowaniu powyższych uwag można powiedzieć, że za integralnością matematyki przemawia jej pochodzenie, ścisły związek i wzajemne przenikanie się jej części — oraz jednolite procedury postępowania z materią matematyczną. Silnym argumentem za takim stanowiskiem jest, jak się zdaje, przykład podstawowego obiektu matematyki współczesnej, a mianowicie prostej rzeczywistej — obejmującej liczby rzeczywiste (a więc i arytmetykę) i leżącej u podstaw geometrii i analizy matematycznej oraz wszystkich dyscyplin pochodnych. Z punktu widzenia podstawowych struktur widać mianowicie wyraźnie, że jest ona strukturą nadzwyczaj złożoną, bo obejmującą strukturę porządkową (generowaną przez relację mniejszości-większości), strukturę algebraiczną (generowaną przez operację dodawania i mnożenia), strukturę geometryczną (generowaną przez przesunięcia i odbicia) oraz strukturę topologiczną (generowaną przez przedziały otwarte). Przykład ten — w jakimś przynajmniej stopniu — tłumaczy integralność, a przy okazji także i żywotność matematyki.

Z drugiej jednak strony nie udało się tej integralności potwierdzić przez objęcie całej matematyki jedną teorią aksjomatyczno-dedukcyjną. Co więcej, rosnąca «objętość» matematyki, niechęć matematyków do przełamywania barier specjalizacyjnych i nacisk na utylitarność (modele), a także trudności z aksjomatyzacją fragmentów matematyki — sprawiają, że integralność tę można kwestionować. Dyskusja trwa, a ze względu na rolę matematyki w nauce i rolę nauki w naszym świecie — wyniki tej dyskusji wydają się mieć niemałe znaczenie praktyczne.