Kordula Świętorzecka

O stosowalności niektórych modalnych reguł inferencji w rozumowaniach pozalogicznych

Filozofia Nauki 10/1, 109-138

2002

Filozofia Nauki
Rok X, 2002, Nr 1(37)

Kordula Świętorzecka

O stosowalności niektórych modalnych reguł inferencji w rozumowaniach pozalogicznych

SPIS TREŚCI

0. WSTĘP

Prezentowane rozważania dotyczą problemu, który omawia się w dostępnej literaturze zazwyczaj pod hasłem: *modal fallacy*. Można powiedzieć, że przez *modal fallacy* rozumie się błąd wnioskowania, polegający na nieświadomym zastosowaniu takiego modalnego schematu rozumowania, iż prawdziwość przesłanek nie gwarantuje prawdziwości wniosku uznanego na podstawie tego schematu.[1] Zagadnienie występowania *modal fallacy* staje się szczególnie interesujące wobec tego, iż w opinii niektórych autorów jego powodem bywa użycie w rozumowaniach pozalogicznych schematów będących modalnymi regułami inferencji, należącymi do określonych systemów logicznych zakładanych jako podstawa formalna tychże rozumowań. Zgodnie z intencją tychże autorów można by powiedzieć, że niektóre rozumowania pozalogiczne, mimo że są w zgodzie z regułami zakładanej przez rozumującego logiki modalnej, prowadzą do fałszywych wniosków, chociaż posiadają prawdziwe przesłanki. Trudno zbagatelizować zarzut paralogiczności, której źródłem miałaby być sama logika, a także argumentacje go uzasadniające. Wydaje się bowiem, że słuszność tego stanowiska mogłaby prowadzić do zakwestionowania najbardziej podstawowych oczekiwań, które wiąże się z konstrukcją systemów logicznych, a które dotyczą efektu aplikacji tych systemów do naukotwórczych wnioskowań pozalogicznych — całkowitej pewności uzyskania prawdziwego wniosku na podstawie prawdziwych przesłanek. Powstaje wrażenie, że konsekwencją zarzutu *modal fallacy* mogłaby okazać się metodologiczna bezużyteczność ogromniej grupy modalnych rachunków formalnych, które są przedmiotem badań logików od blisko stu lat.

Zadaniem niniejszej pracy jest próba precyzacji zarzutu paralogiczności niektórych modalnych reguł inferencji stosowanych poza logiką oraz analiza jego zasadności. Użyte w przedstawianej pracy narzędzia pozwalają na zdefiniowanie dwu rodzajów paralogiczności reguł, które są istotnie związane z określonymi własnościami metalogicznymi tych reguł. Na podstawie dokonanych rozróżnień wykażemy bezzasadność niektórych wariantów zarzutu występowania *modal fallacy*. Zarzut paralogiczności przy pewnych precyzacjach branych pod uwagę reguł inferencji pozostaje jednak w mocy. W odniesieniu do tych wariantów sprecyzuję konieczne warunki tego, aby istotnie zarzut paralogiczności był usprawiedliwiony, a także wskażę na techniczne możliwości eliminacji tak pojętego *modal fallacy*.

Rozważania niniejsze dotyczą problemu występowania paralogizmów modalnych w takich rozumowaniach pozalogicznych, których podstawą formalną są modalne logiki zdaniowe K_J i $S5_J$, gdzie J jest dowolnie ustalonym modalnym językiem zdaniowym. Niektóre z prezentowanych wyników dotyczą także innych systemów; uwagę skoncentrujemy jednak na wymienionych logikach K_J i $S5_J$, ponieważ rachunek K_J jest najmniejszym nietrywialnym modalnym systemem normalnym, zaś rachunek $S5_J$

[1] Dany schemat rozumowania jest modalny, gdy w jego przesłankach lub wniosku występuje przynajmniej jeden z funktorów modalnych: $\Box$, $\Diamond$ lub implikacja ścisła.

(będący nadlogiką rachunku K_J) szczególnie chętnie wykorzystuje się w filozofii jako ten, w którym znaczenie funktorów modalnych jest bliskie znaczeniu niektórych wyrażeń modalnych języka filozoficznego.

Na podstawie dostępnej literatury omówię w punkcie (1) polemikę dotyczącą zarzutu *modal fallacy* oraz jego zasadności. W punkcie (2) podam syntaktyczną i semantyczną charakterystykę wybranych logik, definicje «podejrzanych» reguł inferencji oraz przedstawię istotne z punktu widzenia prowadzonych analiz metalogiczne własności reguł wnioskowania: ważność, dopuszczalność i wyprowadzalność. Własnościom tym zostaną przyporządkowane określone korelaty semantyczne — różne rodzaje wynikania semantycznego zdefiniowane i omówione w [Fagin, Halpern, Vardi, 1992]. Względem wyznaczonych relacji wynikania dziedziczone są na gruncie semantyki światów możliwych różne rodzaje prawdziwości. Zależności między określonym typem prawdziwości a daną relacją wynikania semantycznego zachodzącego między przesłankami i wnioskiem danej reguły inferencji zostaną wykorzystane w punkcie (3) przy precyzacji zarzutu *modal fallacy* i analizie jego zasadności.

1. POLEMIKA W SPRAWIE ZARZUTU *MODAL FALLACY*

W dostępnej literaturze podaje się rozmaite reguły inferencji, które mają powodować *modal fallacy* w rozumowaniach pozalogicznych. Formułuje się przy tym różne uzasadnienia na rzecz tezy o występowaniu owego błędu. Alvin Plantinga w [Plantinga, 1985, s. 24—25] podaje jako źródło *modal fallacy* schematy wnioskowań, które odnotujemy następująco:

(A) $\Box(A\vee B), {\sim}A \vDash \Box B$,[2]

(B) $\Box(A\rightarrow B), A \vDash \Box B$,

(C) $\Box(A\rightarrow B) \vDash A\rightarrow\Box B$.

Jak zauważa Plantinga, to że schemat (A) jest źródłem paralogizmu modalnego, jako pierwszy odnotował Robert Sleigh. Schemat (B) jest, według Plantingi, wadliwy w zastosowaniu do rozumowań pozalogicznych z tego samego powodu co schemat (A) i dlatego schemat (B) (tak samo jak (A)) znany jest pod nazwą „reguły Sleigha". Odnośnie do schematu (C) Plantinga odnotowuje, że wskazywany był on już przez George'a Moore'a w jego pracy pt. „Internal and External Relations" jako błędna forma rozumowania (jak twierdzi Moore, schemat ten był wielokrotnie stosowany przez idealistów w uzasadnieniach ich doktryny tzw. stosunków wewnętrznych). Jerzy Perzanowski w [Perzanowski, 1989] także omawia problem paralogizmu modalnego.

---

[2] Funktor inferencyjny: $\vDash$ (definiowany za pomocą operatora konsekwencji tak, że: $X\vDash A$ wtw, gdy $A\in Cn(X)$, gdzie X jest zbiorem formuł zdaniowych określonego języka — zbiorem przesłanek zaś A, będąc formułą zdaniową tego języka, jest wnioskiem) posiada własności, które wynikają z Tarskiego aksjomatyki dla operatora konsekwencji w [Tarski, 1930]: (1) $A\in X \Rightarrow X\vDash A$, (2) $X\vDash A$ i $X\subset Y \Rightarrow Y\vDash A$, (3) dla dowolnego $B\in Y$: $X\vDash B$ i $Y\vDash A \Rightarrow X\vDash A$, (4) dla dowolnych A, X : $X\vDash A \Rightarrow \exists_{Y\subset X}$: Y jest zbiorem skończonym i $Y\vDash A$ (por. [Pogorzelski, 1992, s. 352—354]).

W przeciwieństwie do Plantingi uważa on jednak, iż stosowanie w rozumowaniach pozalogicznych wymienionych reguł inferencji jest dozwolone, skoro reguły te można wyprowadzić w odpowiednich rachunkach logicznych z reguł pierwotnych.[3] W swoich rozważaniach Perzanowski dodatkowo bierze pod uwagę «kłopotliwą» ze względu na różne interpretacje formułę, którą nazywa „aksjomatem Sleigha":

(AS) $\Box(A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow \Box B)$

a także wykazuje bezzasadność zarzutu występowania *modal fallacy*, gdy stosuje się poza logiką modalną regułę inferencji:

(D) $\Diamond A, \Diamond B \models \Diamond(A \wedge B)$.

Replikę argumentacji Perzanowskiego znajdujemy w pracy Gerharda Schurza ([Schurz, 1994]). Podobnie jak Plantinga, Schurz uważa za błąd stosowanie schematu (B) w rozumowaniach pozalogicznych. Nie jest także poprawne według tego autora stosowane tzw. reguły Gödla:

(E) $A \models \Box A$.

Niedopuszczalność stosowania niektórych modalnych schematów rozumowania wykazuje również Graham Forbes w [Forbes, 1985], który bierze pod uwagę schematy (A) i (D) oraz :

(F) $\Diamond A, \Diamond(A \rightarrow B) \models \Diamond B$.

Zgodnie z intencjami Plantingi, Schurza i Forbesa, to że przytaczane przez nich schematy są źródłem paralogizmu modalnego uzasadniają konkretne rozumowania, które przebiegają według tychże schematów i jednocześnie prowadzą do fałszywych wniosków na podstawie prawdziwych przesłanek. Jak uważa Plantinga, można znaleźć liczne paralogiczne przykłady zastosowań schematów (A), (B) i (C) w literaturze filozoficznej (szczególnie tej, która dotyczy zagadnień determinizmu a także związku między boską wszechwiedzą a wolną wolą człowieka).

Aby wykazać występowanie *modal fallacy* powstałego na skutek użycia reguły Sleigha (por. schemat (B)), Schurz podaje natomiast taki oto przykład rozumowania:

„Posiadanie dwojga dzieci koniecznie implikuje posiadanie dzieci, ale z faktu, że Piotr ma dwoje dzieci nie wynika to, że Piotr koniecznie posiada dzieci (por. [Schurz,1994], s. 376).[4]

Kontrprzykład dla tego samego schematu przytacza także Forbes w [Forbes, 1985]:

„Niech P [A] będzie 'Jones jest kawalerem' zaś Q [B] będzie 'Jones jest nieżonaty'. Załóżmy, że 'P' ['A'] jest prawdziwe; oczywiście '$\Box(P \rightarrow Q)$' ['$\Box(A \rightarrow B)$'] także jest prawdziwe, ale wniosek '$\Box Q$' ['$\Box B$'] jest fałszywy, ponieważ nie jest koniecz-

[3] Jak zauważa Perzanowski, fakt iż wydaje się, że jakaś reguła jest za mocna powinien skłaniać do zmiany podstawy formalnej danego rozumowania na logikę odpowiednio słabszą, a nie do kwestionowania reguł logiki silniejszej. Logika L jest silniejsza od logiki L' wtw gdy zbiór tez logiki L jest nadzbiorem właściwym logiki L'.

[4] „Having two children necessarily implies having children, but from the fact that Peter has two children it does not follow that Peter necessarily has children".

ne to, że Jones jest nieżonaty — wiele okoliczności mogłoby lub mogło było się zdarzyć, w których Jones ożeniłby się" (s. 6).[5]

W uzasadnieniu tezy o niemożliwości stosowania we wnioskowaniach pozalogicznych schematu (D) ten sam autor przytacza rozumowanie:

„[...] jest możliwe, że teraz wszędzie pada i jest możliwe, że teraz wszędzie jest sucho, ale jest oczywiście niemożliwe, by te dwa stany rzeczy występowały razem" (por. [Forbes, 1985], s. 5).[6]

Jednakże wątpliwości co do tego, czy przytoczone przykłady są przekonujące, pojawiają się już na etapie ich wstępnej analizy.

Po pierwsze, można zauważyć, że interpretacja reguły Sleigha podana przez Schurza nadużywa swobody czytania zwrotów modalnych w języku naturalnym lub sugeruje przyjęcie założenia o równoważności wyrażeń „konieczne, że x jest y" oraz „x jest z konieczności y". Założenie owej równoważności jest tu niepotrzebne, ponieważ brane pod uwagę reguły nie odzwierciedlają struktury zdań prostych.[7] Aby uniknąć dyskusji co do zasadności takiego założenia, Schurz powinien więc wniosek swojego rozumowania sformułować następująco: „Jest konieczne, że Piotr posiada dzieci" zamiast: „Piotr koniecznie posiada dzieci". Komentarz we wniosku rozumowania przebiegającego według schematu (D) (który to komentarz podaje Forbes) sugeruje natomiast, że w tym wypadku chodzi o modalność jakiejś relacji między zdarzeniami.

Warto, po drugie, odnotować, że Schurz w swoim kontrprzykładzie zwraca uwagę na co innego niż Forbes. Zgodnie z przytoczonymi fragmentami, pierwszy z autorów stwierdza brak wynikania między przesłankami a wnioskiem, a drugi wskazuje na fałszywość wniosku przy prawdziwości przesłanek. Można by powiedzieć, że Schurz stwierdza w swoim kontrprzykładzie fakt braku wynikania, który Forbes uzasadnia fałszywością wniosku przy prawdziwych przesłankach. Należy jednak pamiętać, że w wypadku logik modalnych można mówić o różnych rodzajach prawdziwości (a także fałszu). Powstaje więc wątpliwość: o jaką prawdziwość (i fałszywość) odpo-

[5] „Let P [A] be 'Jones is a bachelor' and Q [B] be 'Jones is unmarried'. Suppose 'P' ['A'] is true; '$\Box(P \rightarrow Q)$' ['$\Box(A \rightarrow B)$'] is also true, of course, but the conclusion '$\Box Q$' ['$\Box B$'] is false, for it is not necessary that Jones is unmarried — there are many things could go or could have gone in which Jones gets married.".

[6] „[...] it is possible that it now be raining everywhere and possible that it now be dry everywhere, but it is evidently not possible to have both these states affairs obtaining together".

[7] Założenie to jest jednym z możliwych (ale odrzucanych przez np. filozofów klasycznych) rozstrzygnięć dyskusji o stosunku między modalnościami *de re* i *de dicto*. Zgodnie ze stanowiskiem o równoważności wspomnianych modalności należałoby np. uznać, że zdania: *Konieczne jest, że człowiek jest bezpióry* oraz *Człowiek musi być bezpióry* są równoważne. Tak samo trzeba by było postąpić w wypadku zdań: *Jan może stać się mądry* oraz *Możliwe, że Jan staje się mądry*. Nowe sformułowanie problemu równoważności modalności *de re* i *de dicto* na gruncie współczesnej logiki modalnej sprowadza się do analizy semantycznej tzw. formuły Barcan (ew. formuły Buridana) ale — jak się zdaje — nie ma ono wiele wspólnego z rozróżnieniami modalności, o których dyskutowali filozofowie średniowieczni.

wiednich przesłanek i wniosków chodzi. W argumentacji za niemożliwością stosowania poza logiką rozważanych modalnych reguł inferencji istotną rolę pełnią pojęcia: *prawda przypadkowa* i *prawda konieczna*. Czytamy w tekście Schurza:

„Nie powinny być one [takie reguły, jak reguła Sleigha] stosowane do przesłanek, które są przypadkowo prawdziwe, tj. prawdziwe na mocy faktów w świecie aktualnym [...]: ponieważ nie zachowują one prawdy, wniosek przy takim zastosowaniu może być fałszywy" (s. 378).[8]

Schurz dokonuje precyzacji pojęć *prawdy przypadkowej* oraz *prawdy koniecznej*, odwołując się do pojęcia interpretacji. Argumentacja sformułowana przez tego autora pokazuje, iż w wypadku takich reguł modalnych jak reguła Sleigha (lub reguła dołączania konieczności) prawdziwość przypadkowa przesłanek nie jest dziedziczona przez wniosek. Jak zamierzamy pokazać, semantyka światów możliwych generuje takie pojęcie *interpretacji*, za pomocą którego można zdefiniować przynajmniej dwa rodzaje prawdziwości przypadkowej. Jeden z tych rodzajów jest dziedziczony ze względu na reguły inferencji uważane przez Schurza za paralogiczne.

2. SYNTAKTYCZNA CHARAKTERYSTYKA REGUŁ UWAŻANYCH ZA ŹRÓDŁO PARALOGIZMÓW MODALNYCH NA GRUNCIE WYBRANYCH RACHUNKÓW

Zgodnie z tym, co zostało powiedziane we „Wstępie", w dalszych rozważaniach będę brać pod uwagę dwa modalne rachunki wyrażone w dowolnie ustalonym modalnym języku zdaniowym J: K_J oraz $S5_J$. Syntaktyczne definicje tych systemów oraz «podejrzanych» reguł inferencji zostaną podane w punkcie (2.1). W punkcie (2.2) omówię wybrane metalogiczne własności reguł, które mają związek z zarzutem *modal fallacy*.

2.1 Syntaktyczne definicje logik K_J i $S5_J$ oraz analizowanych reguł inferencji

Jednym z tzw. modalnych języków zdaniowych jest język ST, na którego słownik składają się: proste zmienne zdaniowe: p, q, r,... ; spójniki prawdziwościowe: $\sim$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$; modalne funktory: $\Box$, $\Diamond$ (czytane: „konieczne, że" i „możliwe, że") oraz nawiasy. Zbiór wyrażeń sensownych branego pod uwagę języka (For) definiujemy tak, że jest to najmniejszy zę zbiorów spełniający koniunkcję następujących warunków: (1) jego podzbiorem jest zbiór prostych zmiennych zdaniowych ($Zm \subset For$) oraz (2) jeżeli A, B $\in$ For, to $\sim A$, $\Box A$, $\Diamond A$, $A \wedge B$, $A \vee B$, $A \rightarrow B$, $A \leftrightarrow B \in$ For.

[8] „They [such rules as Sleigh's rule] should not be applied to premises which are contingently true, i.e., true by virtue of facts of an actual world [...]: since they do not preserve truth, the conclusion of such an application can be false".

Modalnym językiem zdaniowym jest każdy język, dla którego można wyznaczyć algebrę z uniwersum w zbiorze jego wyrażeń sensownych, w której określone są operacje: $\sim$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$, $\Box$, $\Diamond$.

DEFINICJA 1

Niech $\mathbf{FOR_J}$ będzie zbiorem wszystkich wyrażeń sensownych dowolnego modalnego języka zdaniowego **J**, zaś $\underline{\mathbf{R}}$ będzie rodziną przyporządkowań taką, że: $\emptyset \neq \underline{\mathbf{R}} \subset \mathbf{FOR_J}^{(\mathbf{FOR_J})^n}$ (gdzie $n \geq 1$), wówczas:

r_J jest regułą inferencji wtw, gdy $r_J \in \underline{\mathbf{R}}$.

Zgodnie z def1, reguły inferencji będą rozumiane jako pewne zbiory dwójek uporządkowanych, w których pierwszym elementem jest n-tka uporządkowana (są to tzw. przesłanki), zaś drugim elementem jest pojedyncza formuła (tzw. wniosek). Dla większej przejrzystości zapisu, elementy reguł będę odnotowywać, pomijając nawiasy oznaczające uporządkowaną n-tkę przesłanek. W ten sposób zamiast pisać: $((A_1,\ldots,A_n),B) \in r_J$, będę używać zapisu: $(A_1,\ldots,A_n,B) \in r_J$, gdzie $A_1,\ldots,A_n,B \in \mathbf{FOR_J}$.

Niech J będzie dowolnie ustalonym modalnym językiem zdaniowym, zaś $A_1,\ldots,A_n,B \in \mathbf{FOR_J}$. Schematy wymieniane w pracach Plantingi, Forbesa i Schurza w związku z problemem *modal fallacy* generują następujące reguły inferencji:

DefRNA. $(A_1,A_2,B) \in RNA_J$ wtw, gdy $A_1=\Box(C \vee D)$, $A_2=\sim C$, $B=\Box D$ (tzw. reguła opuszczania alternatywy z koniecznością — por. schemat (A));

DefRS. $(A_1,A_2,B) \in RS_J$ wtw, gdy $A_1=\Box(A_2 \rightarrow C)$, $B=\Box C$ (tzw. reguła Sleigha — por. schemat (B));

DefRMO. $(A,B) \in RMO_J$ wtw, gdy $A=\Box(C \rightarrow D)$, $B=(C \rightarrow \Box D)$ (tzw. reguła Moore'a — por. schemat (C));

DefRKP. $(A_1,A_2,B) \in RKP_J$ wtw, gdy $A_1=\Diamond C$, $A_2=\Diamond D$, $B=\Diamond(C \wedge D)$ (reguła dołączania koniunkcji z możliwością — por. schemat (D));

DefRN. $(A,B) \in RN_J$ wtw, gdy $B=\Box A$ (tzw. reguła Gödla — por. schemat (E));

DefRIP. $(A_1,A_2,B) \in RIP_J$ wtw, gdy $A_1=\Diamond C$, $A_2=\Diamond(C \rightarrow D)$, $B=\Diamond D$ (reguła opuszczania implikacji z możliwością — por. schemat F).

Reguła odrywania RO_J jest zbiorem takim, że:

DefRO. $(A_1,A_2,B) \in RO_J$ wtw, gdy $A_1=A_2 \rightarrow B$.

Gdy brany jest pod uwagę język ST, nazwy dla reguł będą pisane bez żadnego indeksu. Taki sam sposób notacji będzie się stosować dla nazw odpowiednich logik.

Rachunki formalne K i S5 wyrażone są więc w języku ST, a charakteryzują je następujące definicje:

DEFINICJA 2

Logika $K=(\mathcal{AX},\mathcal{R})$ jest wyznaczona przez: $\mathcal{AX}$ — zbiór wszystkich formuł ($\mathcal{AX} \subset For$) o następujących postaciach:

a1. $A \rightarrow (B \rightarrow A)$,

a2. $(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$,

a3. $(\sim B \rightarrow \sim A) \rightarrow (A \rightarrow B)$, a4. $\Box(A \rightarrow B) \rightarrow (\Box A \rightarrow \Box B)$,

a5. $\Box A \leftrightarrow \sim\Diamond\sim A$

oraz zbiór reguł inferencji $\mathcal{R}$, do którego należą reguła odrywania i reguła Gödla: $\mathcal{R} = \{RO, RN\}$.

DEFINICJA 3

Logika $S5=(\mathcal{A}S5, \mathcal{R})$ jest wyznaczona przez zbiór aksjomatów $\mathcal{A}S5$, będący sumą zbioru $\mathcal{AK}$ i zbioru wszystkich formuł o postaciach:

a6. $\Box A \rightarrow A$,

a7. $\sim\Box A \rightarrow \Box\sim\Box A$ oraz przez zbiór reguł $\mathcal{R}$, do którego należą RO i RN.

Zbiory tez logik K i S5 wyznacza operacja konsekwencji zdefiniowana standardowo:

DEFINICJA 4

(I) Zbiór tez logiki K: $C(\mathcal{R}, \mathcal{AK})$ jest najmniejszym z podzbiorów zbioru For takim, że dla każdej formuły A: (a) $A \in \mathcal{AK} \Rightarrow A \in C(\mathcal{R}, \mathcal{AK})$ oraz (b) $\forall_{r \in R} \forall_{A_1,\ldots,A_n \in For}: \{A_1,\ldots,A_n\} \subset C(\mathcal{R}, \mathcal{AK})$ i $(A_1,\ldots,A_n,A) \in r \Rightarrow A \in C(\mathcal{R}, \mathcal{AK})$.

(II) Zbiór tez logiki S5: $C(\mathcal{R}, \mathcal{A}S5)$ jest natomiast najmniejszym z podzbiorów zbioru For takim, że dla każdej formuły A: (a') $A \in \mathcal{A}S5 \Rightarrow A \in C(\mathcal{R}, \mathcal{A}S5)$ oraz (b') $\forall_{r \in R'} \forall_{A_1,\ldots,A_n \in For}: \{A_1,\ldots,A_n\} \subset C(\mathcal{R}, \mathcal{A}S5)$ i $((A_1,\ldots,A_n,A) \in r \Rightarrow A \in C(\mathcal{R}, \mathcal{A}S5))$.

Logiki K_J i $S5_J$ wyrażone są w dowolnym zdaniowym języku modalnym J i zdefiniowane w taki sam sposób jak pokazują to definicje def2 i def3. Zbiory tez dla logik K_J i S_J wyznacza się tak samo jak w definicji def4.

2.2 Dopuszczalność, ważność, wyprowadzalność rozważanych reguł inferencyjnych

Niech **L**=(**AL**,**R**) będzie dowolną logiką wyznaczoną przez zbiór aksjomatów **AL** i zbiór reguł **R**, taką, że standardowa operacja konsekwencji wyznacza zbiór jej tez: C(**R**,**AL**).[9]

Niektóre reguły inferencji są dopuszczalne w logice **L**=(**AL**,**R**) tzn. takie, że zbiór tez danej logiki jest domknięty ze względu na nie:

DEFINICJA 5

$r \in Dop\ (\mathbf{AL},\mathbf{R})$ wtw, gdy $\forall_{(A_1,\ldots,A_n,B) \in r}: \{A_1,\ldots,A_n\} \subset C(\mathbf{R},\mathbf{AL}) \Rightarrow B \in C(\mathbf{R},\mathbf{AL})$.

Oczywiście, na mocy def 4 każda reguła pierwotna systemów K i S5 jest w tych logikach dopuszczalna:

L1. (a) RN, RO $\in$ Dop (K) oraz (b) RN, RO $\in$ Dop (S5).

---

[9] Mówiąc o standardowej operacji konsekwencji, będę zakładać jedynie, iż jest ona skończona i posiada cechy wymienione w aksjomatyce Tarskiego (por. przyp. 2). Ponadto rozważania ograniczam do konsekwencji, które są domknięte na regułę odrywania: (kon') $C(\mathbf{R}, X \cup \{A \rightarrow B\}) \subset C(\mathbf{R},X) \Rightarrow C(\mathbf{R},X \cup \{B\}) \subset C(\mathbf{R},X \cup \{A\})$ oraz są takie, że: (kon'') $C(\mathbf{R},X \cup C(\mathbf{R},Y)) \subset C(\mathbf{R},X \cup Y)$.

Własnością, którą także wezmę pod uwagę w dalszych rozważaniach jest tzw. ważność reguł inferencji. Powiemy, że reguła r jest ważna w logice **L**=(**AL**,**R**), gdy tezą logiki **L** jest implikacja, której poprzednikiem jest koniunkcja przesłanek, a następnikiem — wniosek:

DEFINICJA 6

r ∈ Ważn (**AL**,**R**) wtw, gdy $\forall_{(A1,\ldots,An,B)\in r}$: $(A_1\wedge\ldots\wedge A_n\rightarrow B) \in$ **C**(**R**,**AL**).[10]

Przyjęte definicje pozwalają zauważyć, że między pojęciami *ważności* i *dopuszczalności* zachodzi następujący związek:

T1. Ważn(**AL**,**R**) ⊂ Dop(**AL**,**R**)

Dowód: na podstawie def5, def6 oraz (kon').[11]

Zależność odwrotna do tej, którą opisuje T1 nie zachodzi. W wypadku systemów K oraz S5 zbiór reguł dopuszczalnych jest nadzbiorem właściwym reguł ważnych, ponieważ np. reguła RN jest dopuszczalna w tych systemach (por. L1), ale nie jest w nich ważna:

L2. (a) RN∉Ważn(K) i RN∉Ważn(S5), chociaż: (b) RO∈Ważn(K) i RO∈ Ważn(S5).

Dowód: (a) (p,□p)∈RN oraz (p→□p) ∉ **C**($\mathcal{R}$, $\mathfrak{a}\mathcal{K}$) oraz (p→□p)∉ **C**($\mathcal{R}$, $\mathfrak{a}\mathcal{S}5$);

(b) $\forall_{(A\rightarrow B,\, A,B)\in RO}$: ((A→B)∧A→B)∈ **C**($\mathcal{R}$, $\mathfrak{a}\mathcal{K}$) i ((A→B)∧A→B)∈ **C**($\mathcal{R}$, $\mathfrak{a}\mathcal{S}5$).

Dlatego też:

T1a. Ważn(K) ⊊ Dop(K) oraz Ważn(S5) ⊊ Dop(S5) [T1, L2].

Reguła RN w ograniczeniu zbioru przesłanek do zbioru tez danej logiki jest jednak także ważna w tej logice:

L3. (a) $RN_{/C(\mathcal{R},\,\mathfrak{a}\mathcal{K})}$ ∈ Ważn(K) oraz $RN_{/C(\mathcal{R},\,\mathfrak{a}\mathcal{S}5)}$ ∈ Ważn(S5) (gdzie: $RN_{/C(\mathbf{R},\mathbf{AL})}$= {(A,□A): A∈**C**(**R**,**AL**)}) [12]

Dowód nie wprost na podstawie.: def4, def6, defRN.

W dalszych rozważaniach będę także posługiwać się pojęciem *wyprowadzalności reguły na gruncie logiki L*.

DEFINICJA 7

r ∈ Wypr(**AL**,**R**) wtw, gdy $\forall_{(A1,\ldots,An,B)\in r}$(B∈**C**(**R**,**AL**∪{$A_1,\ldots,A_n$})).

Reguła r jest wyprowadzalna na gruncie określonej logiki **L**, gdy każdy wniosek tej reguły można otrzymać po rozszerzeniu zbioru aksjomatów logiki **L** o przesłanki owej reguły za pomocą pierwotnych reguł logiki **L**.

Na podstawie definicji def4 oraz def7 można zauważyć, że dla dowolnej logiki **L**=(**AL**,**R**) zbiór reguł wyprowadzalnych jest nadzbiorem reguł dopuszczalnych w tej logice:

---

[10] Przy standardowym znaczeniu implikacji można zapisać równoważnie: r ∈ Ważn (**AL**,**R**) wtw, gdy $\forall_{(A1,\ldots,An,B)\in r}$: $(A_1\rightarrow(\ldots\rightarrow(A_n\rightarrow B)\ldots)) \in$ **C**(**R**,**AL**)).

[11] Por. przyp. 9.

[12] Oczywiście: $RN_{/C(\mathcal{R},\mathfrak{a}\mathcal{S}5)}$ ∉ Ważn(K), ponieważ np. (◊(p→p), □◊(p→p)) ∈ $RN_{/C(\mathcal{R},\mathfrak{a}\mathcal{S}5)}$ oraz (◊(p→p)→ □◊(p→p))∉ **C**($\mathcal{R}$, $\mathfrak{a}\mathcal{K}$).

T2. Wypr(**AL**,**R**) $\subset$ Dop(**AL**,**R**).

Dowód: 1. $\forall_{(A1,\dots An,B)\in r}$:$A\in \mathbf{C}(\mathbf{R},\mathbf{AL}\cup\{A_1,\dots,A_n\})$, 2. $\exists_{(A1,\dots,An,B)\in r}$:$\{A_1,\dots,A_n\}\subset \mathbf{C}(\mathbf{R},\mathbf{AL})$ i $B\notin \mathbf{C}(\mathbf{R},\mathbf{AL})$ [zdn], 3. $(C_1,\dots,C_n,D)\in r$ i $\{C_1,\dots,C_n\}\subset \mathbf{C}(\mathbf{R},\mathbf{AL})$ i $D\notin \mathbf{C}(\mathbf{R},\mathbf{AL})$ [2],[13] 4. $(C_1,\dots,C_n,D)\in r \Rightarrow D\in \mathbf{C}(\mathbf{R},\mathbf{AL}\cup\{C_1,\dots,C_n\})$ [1], 5. $D\in \mathbf{C}(\mathbf{R},\mathbf{AL}\cup\{C_1,\dots,C_n\})$ [3,4], 6. $\{C_1,\dots,C_n\}\subset \mathbf{C}(\mathbf{R},\mathbf{AL})$ i $D\in \mathbf{C}(\mathbf{R},\mathbf{AL}\cup\{C_1,\dots,C_n\})$ [3,5], 7. $D\in \mathbf{C}(\mathbf{R},\mathbf{AL})$ [6], 8. $D\notin \mathbf{C}(\mathbf{R},\mathbf{AL})$ [3]; sprz:7,8.

W ogólności nie jest jednak prawdą, że każda reguła dopuszczalna jest wyprowadzalna,[14] o czym świadczy choćby reguła DN=$\{(A,B)$: $A=\Box B\}$ na gruncie logiki K. Jak wskazuje się w [Schurz, 1994, s. 386], reguła DN jest dopuszczalna i nie jest wyprowadzalna w tej logice. Podobnie jest w wypadku reguły RN i opisanych w [Kripke, 1963] fragmentów zdaniowych pewnych kwantyfikatorowych logik modalnych. Fragmenty owe wyznaczają odpowiednio zbiory tez logik K i S5, a ich charakterystyka wymaga wprowadzenia pojęcia *koniecznościowego domknięcia*:

DEFINICJA 8

Formuła B jest koniecznościowym domknięciem formuły A wtw, gdy $B = \Box_1\dots\Box_n A$, gdzie $n\in N$.

Zbiory tez logik K oraz S5 wyznaczone w def4 charakteryzują również następujące definicje:

DEFINICJA 9

(I) Zbiór tez logiki K: $\mathbf{C}(\mathcal{R}', \mathcal{AK}')$ jest najmniejszym ze zbiorów zawierającym zbiór aksjomatów $\mathcal{AK}'$, do którego należą wszystkie koniecznościowe domknięcia formuł o postaciach: a1-a5 z def.1 i domkniętym ze względu na regułę odrywania RO (która jest jedyną regułą pierwotną: $\mathcal{R}'=\{$RO$\}$).

(II) Zbiór tez logiki S5: $\mathbf{C}(\mathcal{R}', \mathcal{AS5}')$ jest najmniejszym ze zbiorów, do którego należą wszystkie elementy zbioru $\mathcal{AK}'$ oraz wszystkie koniecznościowe domknięcia postaci: a6 i a7 z def2 ($\mathcal{AS5}'$), domkniętym ze względu na regułę pierwotną RO.

Aksjomatyzacje zbiorów tez systemów K i S5 z def9 pozwalają zauważyć, że:

L4. (a) RN$\in$ Dop($\mathcal{AK}'$, $\mathcal{R}'$) i RN$\in$ Dop($\mathcal{AS5}'$, $\mathcal{R}'$) oraz (b) RN$\notin$ Wypr($\mathcal{AK}'$, $\mathcal{R}'$) i RN$\notin$ Wypr($\mathcal{AS5}'$, $\mathcal{R}'$.)

Dowód: (a) przez indukcję; (b) $(p,\Box p)\in$ RN oraz $\Box p\notin \mathbf{C}(\mathcal{R}', \mathcal{AK}'\cup\{p\})$ a także $\Box p\notin \mathbf{C}(\mathcal{R}', \mathcal{AS5}'\cup\{p\})$.[15]

[13] W prezentowanych dowodach opuszcza się kwantyfikator szczegółowy bez przechodzenia na wyrażenia stałe, zgodnie z ograniczeniami sformułowanymi np. w [Kalish, Montague, 1964].

[14] Własności wyprowadzalności oraz dopuszczalności reguł wyznaczają ten sam zbiór wtedy, gdy rozważana logika jest pełna w sensie Posta (por. [Pogorzelski, 1992, s. 402]).

[15] W grupie normalnych logik modalnych reguła RN jest wyprowadzalna w systemie K[SR], który definiuje się np. w [Perzanowski, 1989] przez dodanie do zbioru aksjomatów systemu K formuł o postaci: (sr) $A\rightarrow\Box A$. W logice tej RN jest bowiem ważna, zaś ważność implikuje wyprowadzalność (por. T3). Dla wyjaśnienia należy dodać, że zbiór tez systemu K[SR] jest iloczynem zbiorów tez logik TR oraz Ver. Logiki TR oraz Ver są z kolei tzw. logikami kongruencyjnymi. Logiki kongruencyjne są, zgodnie z wyjaśnieniami Perzanowskiego, nadzbiorem normalnych logik modalnych. Każdy system kongruencyjny generowany jest przez dowolną odrywaniową aksjomatykę

Można powiedzieć, że chociaż definicje: def4 (I), (II) opisują ten same zbiory co odpowiednio: def9 (I), (II), to systemy: $(\mathcal{AK}',\mathcal{R}')$, $(\mathcal{A}S5',\mathcal{R}')$ są w tym sensie słabsze od odpowiednio: $(\mathcal{AK},\mathcal{R})$, $(\mathcal{A}S5,\mathcal{R})$, że nie wszystkie reguły wyprowadzalne w: $(\mathcal{AK},\mathcal{R})$, $(\mathcal{A}S5,\mathcal{R})$ są także wyprowadzalne w: $(\mathcal{AK}',\mathcal{R}')$, $(\mathcal{A}S5',\mathcal{R}')$.

Odnotujmy dodatkowo, że ważność reguły w dowolnej logice, której zbiór tez jest wyznaczony przez standardową operację konsekwencji, implikuje wyprowadzalność tej reguły:

T3. Ważn(**AL**,**R**) $\subset$ Wypr(**AL**,**R**)[16].

Dowód: 1. $\exists_{r\in \mathbf{R}}\exists_{(A_1,\dots A_n,B)\in r}:\{A_1\wedge\dots\wedge A_n\to B\}\subset \mathbf{C}(\mathbf{R},\mathbf{AL})$ i $\{B\}\not\subset \mathbf{C}(\mathbf{R},\mathbf{AL}\cup\{A_1,\dots,A_n\})$ [zdn] 2. $r'\in\mathbf{R}$ i $(C_1,\dots C_n,D)\in r'$ i $\{C_1\wedge\dots\wedge C_n\to D\}\subset \mathbf{C}(\mathbf{R},\mathbf{AL})$ [1], 3. $\{D\}\not\subset \mathbf{C}(\mathbf{R},\mathbf{AL}\cup\{C_1,\dots,C_n\})$ [1], 4. $\mathbf{C}(\mathbf{R},\{C_1\wedge\dots\wedge C_n\to D\})\subset \mathbf{C}(\mathbf{R},\mathbf{C}(\mathbf{R},\mathbf{AL}))$ [2][17], 5. $\mathbf{C}(\mathbf{R},\{C_1\wedge\dots\wedge C_n\to D\})\subset \mathbf{C}(\mathbf{R},\mathbf{AL})$[4], 6. $\mathbf{C}(\mathbf{R},\{C_1\wedge\dots\wedge C_n\to D\})\cup\mathbf{AL}\subset \mathbf{C}(\mathbf{R},\mathbf{AL})\cup\mathbf{AL}$ [5], 7. $\mathbf{C}(\mathbf{R},\mathbf{C}(\mathbf{R},\{C_1\wedge\dots\wedge C_n\to D\})\cup\mathbf{AL})\subset \mathbf{C}(\mathbf{R},\mathbf{C}(\mathbf{R},\mathbf{AL})\cup\mathbf{AL})$ [6], 8. $\mathbf{C}(\mathbf{R},\mathbf{C}(\mathbf{R},\{C_1\wedge\dots\wedge C_n\to D\})\cup\mathbf{AL})\subset \mathbf{C}(\mathbf{R},\mathbf{AL})$ [7,kon''], 9. $\{C_1\wedge\dots\wedge C_n\to D\}\subset\mathbf{C}(\mathbf{R},\{C_1\wedge\dots\wedge C_n\to D\})$, 10. $\mathbf{C}(\mathbf{R},\{C_1\wedge\dots\wedge C_n\to D\}\cup\mathbf{AL})\subset \mathbf{C}(\mathbf{R},\mathbf{C}(\mathbf{R},\{C_1\wedge\dots\wedge C_n\to D\}\cup\mathbf{AL}))$ [9], 11. $\mathbf{C}(\mathbf{R},\{C_1\wedge\dots\wedge C_n\to D\}\cup\mathbf{AL})\subset\mathbf{C}(\mathbf{R},\mathbf{AL})$ [8,10], 12. $\mathbf{C}(\mathbf{R},\mathbf{AL}\cup\{D\})\subset\mathbf{C}(\mathbf{R},\mathbf{AL}\cup\{C_1\wedge\dots\wedge C_n\})$ [11, kon'], 13. $\mathbf{AL}\cup\{D\}\subset \mathbf{C}(\mathbf{R},\mathbf{AL}\cup\{D\})$, 14. $\{D\}\subset \mathbf{C}(\mathbf{R},\mathbf{AL}\cup\{D\})$ [13], 15. $\{D\}\subset \mathbf{C}(\mathbf{R},\mathbf{AL}\cup\{C_1\wedge\dots\wedge C_n\})$ [12, 14]; sprz: 3, 15.

Zależność odwrotna do opisanej w T3 w ogólności nie zachodzi już choćby dlatego, że np. reguła RN jest wyprowadzalna zarówno w logice K jak i w S5, ale nie jest w tych systemach ważna:

L5. (a) RN$\in$ Wypr (K); RN$\in$ Wypr(S5) oraz (b) RN$\notin$ Ważn(K); RN$\notin$ Ważn(K)

Dowód na podstawie tego, że RN$\in$ $\mathcal{R}$ oraz L2.

T3a. Ważn(K) $\subsetneq$ Wypr(K) oraz Ważn(S5) $\subsetneq$ Wypr(S5) [T3, L5].

Jak można wykazać, nie tylko RN ale również żadne inne z branych pod uwagę reguł, które są uważane za źródło paralogizmu modalnego, nie są ważne w logikach K i S5:

L6. (a) RNA, RS, RMO, RKP, RIP $\notin$ Ważn(K) oraz (b) RNA, RS RMO, RKP, RIP $\notin$ Ważn(S5).

Dowód: (a) $\Box(p\vee q)\wedge\sim p\to\Box q$, $(p\to q)\wedge\Box p\to\Box q$, $\Box(p\to q)\to(p\to\Box q)$, $\Diamond p\wedge\Diamond q\to\Diamond(p\wedge q)$, $\Diamond p\wedge\Diamond(p\to q)\to\Diamond q\notin \mathbf{C}(\mathcal{R}, \mathcal{AK})$; (b) wymienione w (a) funkcje zdaniowe nie są także tezami logiki S5.

Reguły opuszczania alternatywy z koniecznością (RNA) oraz reguła Sleigha (RS) są jednak wyprowadzalne w zakładanych logikach:

L7. (a1) RNA$\in$ Wypr(K), (a2) RNA$\in$Wypr(S5) oraz (b1) RS$\in$ Wypr(K), (b2) RS$\in$Wypr(S5)

KRZ, oraz dwie reguły pierwotne: *modus ponens* i regułę o schemacie: $A\leftrightarrow B\vDash\Box A\leftrightarrow\Box B$. Aksjomatem specyficznym logiki TR jest formuła: $\Box A\leftrightarrow A$, zaś dla systemu Ver formuła: $\Box A$. Reguła RN jest także wyprowadzalna w systemach TR i Ver. Ponadto: reguła RN jest także ważna w logikach: TR i Ver.

[16] Gdy logika L jest pełna w sensie Posta, zależność ta wynika wprost z T1 i konwersu T2 (por. przyp. 14).

[17] Wszystkie zakładane własności operacji konsekwencji opisują aksjomatyka Tarskiego oraz: (kon') i (kon'') — por. przyp. 2 i 9.

Dowód: (a1) 1. $\{\Box B\} \subset C(\mathcal{R}, \mathcal{AK} \cup \{\Box{\sim}A \to \Box B, \Box{\sim}A\})$ [RO∈Wypr(K), def7], 2. $C(\mathcal{R}, \mathcal{AK} \cup \{\Box{\sim}A \to \Box B, \Box{\sim}A\}) \subset C(\mathcal{R}, \mathcal{AK} \cup \{\Box({\sim}A \to B), \Box{\sim}A\})$ [a4 z def2, kon'][18] 3. $C(\mathcal{R}, \mathcal{AK} \cup \{\Box({\sim}A \to B), \Box{\sim}A\}) \subset C(\mathcal{R}, \mathcal{AK} \cup \{\Box(A \vee B), \Box{\sim}A\})$ [a4 z def2, kon'], 4. $\{\Box{\sim}A\} \subset C(\mathcal{R}, \mathcal{AK} \cup \{{\sim}A\})$ [RN∈Wypr(K)], 5. $\{\Box{\sim}A\} \cup \{\Box(A \vee B) \cup \mathcal{AK} \subset C(\mathcal{R}, \mathcal{AK} \cup \{{\sim}A\}) \cup \{\Box(A \vee B)\} \cup \mathcal{AK}$ [4], 6. $C(\mathcal{R}, \mathcal{AK} \cup \{\Box(A \vee B), \Box{\sim}A\}) \subset C(\mathcal{R}, \mathcal{AK} \cup \{\Box(A \vee B), {\sim}A\})$ [5,kon"], 7. $\{\Box B\} \subset C(\mathcal{R}, \mathcal{AK} \cup \{\Box(A \vee B), {\sim}A\})$ [1,2,3,6], 8. RNA∈ Wypr(K) [7,def7];

(a2) dowód dla: RNA∈Wypr(S5) ma taki sam przebieg jak w (a1).

(b1) 1. $\{\Box B\} \subset C(\mathcal{R}, \mathcal{AK} \cup \{\Box A \to \Box B, \Box A\})$ [RO∈ Wypr(K), def7], 2. $C(\mathcal{R}, \mathcal{AK} \cup \{\Box A \to \Box B, \Box A\}) \subset C(\mathcal{R}, \mathcal{AK} \cup \{\Box(A \to B), \Box A\})$ [a4 z def2, kon'], 3. $C(\mathcal{R}, \mathcal{AK} \cup \{\Box(A \to B), \Box A\}) \subset C(\mathcal{R}, \mathcal{AK} \cup \{\Box(A \to B), A\})$ [RN∈Wypr(K), kon"], 4. $\{\Box B\} \subset C(\mathcal{R}, \mathcal{AK} \cup \{\Box(A \to B), A\})$ [1,2,3], 5. RS∈Wypr(K) [4,def7];

(b2) dowód ma taki sam przebieg jak w (b1).

Reguły RNA oraz RS są więc także dopuszczalne w systemach K i S5:

L8. (a1) RNA∈Dop(K), (a2) RNA∈Dop(S5), (b1) RS∈Dop(K), (b2) RS∈Dop(S5) [T2, L7].

Reguły RKP oraz RIP są dopuszczalne w K ale nie są dopuszczalne w S5:

L9. (a) RKP∈ Dop(K), (b) RIP∈Dop(K),

Dowód nie wprost dla (a) i (b) opiera się na fakcie, iż żadna formuła poprzedzona znakiem: $\Diamond$ — nie jest tezą systemu K.[19]

L10. (a) RKP∉ Dop(S5) oraz (b) RIP∉Dop(S5)

Dowód: (a) $\Diamond(\Diamond p \to p) \in C(\mathcal{R}, \mathcal{A}S5)$, $\Diamond((\Diamond p \to p) \to \Box(\Diamond p \to p)) \in C(\mathcal{R}, \mathcal{A}S5)$ oraz $\Diamond((\Diamond p \to p) \wedge ((\Diamond p \to p) \to \Box(\Diamond p \to p))) \notin C(\mathcal{R}, \mathcal{A}S5)$;

(b) $\Diamond(\Diamond p \to p) \in C(\mathcal{R}, \mathcal{A}S5)$, $\Diamond((\Diamond p \to p) \to \Box(\Diamond p \to p)) \in C(\mathcal{R}, \mathcal{A}S5)$ oraz $\Diamond\Box(\Diamond p \to p) \notin C(\mathcal{R}, \mathcal{A}S5)$.

Na podstawie L10, twierdzenia, zgodnie z którym, jeżeli dana regułą jest wyprowadzalna w logice L, to także jest ona dopuszczalna w każdej nadlogice logiki L[20], oraz tego, że system S5 jest nadlogiką systemu K, możemy zauważyć, iż:

L11. RKP∉ Wypr(K) oraz RIP∉ Wypr(K).

Reguła Moore'a nie jest natomiast dopuszczalna ani w K, ani w S5:

L12. RMO∉Dop(K) oraz RMO∉Dop(S5)

Dowód: $\Box(p \to p) \in C(\mathcal{R}, \mathcal{AK})$ oraz $(p \to p) \in C(\mathcal{R}, \mathcal{A}S5)$, jednakże: $(p \to \Box p) \notin C(\mathcal{R}, \mathcal{AK})$ i $(p \to \Box p) \notin C(\mathcal{R}, \mathcal{A}S5)$.[21]

---

[18] Por. przyp. 9.

[19] W taki sam sposób dowodzi się dopuszczalności reguły opuszczania możliwości (OM= $\{(A,B):A = \Diamond B\}$) w systemie K w [Hughes, Creswell, 1996, s.43]. W pracy tej słusznie zauważa się, że reguła opuszczania możliwości jest dopuszczalna w sposób „nietrywialny" (tj. zbiór jej przesłanek nie jest rozłączny ze zbiorem tez określonej logiki) dopiero w wypadku systemu D, który powstaje z K przez dodanie do zbioru aksjomatów formuł o postaci: $\Diamond A \to \Box A$. Można także odnotować, że reguła OM jest nietrywialnie dopuszczalna w systemach TR, Ver oraz K[SR] (por. przyp. 15). Reguła OM jest ważna w systemach: D, TR, Ver i K[SR].

[20] Por. [Pogorzelski, 1992, s. 418]

[21] Reguła Moore'a jest dopuszczalna i ważna w systemach: D, TR, Ver i K[SR].

Dla reguły RMO można także ustalić, że:
L13. RMO∉ Wypr(K) oraz RMO∉ Wypr(S5) [T2, L12].

Dokonane ustalenia syntaktyczne przedstawia następująca tabela:

Tabela 1

	Dop(K)	Dop(S5)	Wypr(K)	Wypr(S5)	Ważn(K)	Ważn(S5)
RO	∈	∈	∈	∈	∈	∈
RN	∈ ·	∈	∈	∈	∉	∉
RNA	∈	∈	∈	∈	∉	∉
RS	∈	∈	∈	∈	∉	∉
RKP	∈	∉	∉	∉	∉	∉
RIP	∈	∉	∉	∉	∉	∉
RMO	∉	∉	∉	∉	∉	∉

Każda z reguł: RN, RS, RNA, RKP, RIP i RMO jest ważna (a co za tym idzie: wyprowadzalna i dopuszczalna) w logice, w której do zbioru tez należą formuły o postaci: $A \to \Box A$.

Lematy: L1—L13 opisują własności odpowiednich reguł na gruncie logik K i S5. To samo można również powiedzieć w odniesieniu do reguł wyznaczonych przez: **DefRNA, DefRS, DefRMO, DefRKP, DefRN, DefRIP, DefRO** na gruncie logik K_J i $S5_J$, gdzie J jest dowolnym zdaniowym językiem modalnym.

3. MODELE BRANYCH POD UWAGĘ LOGIK ORAZ SEMANTYCZNE KORELATY WAŻNOŚCI, DOPUSZCZALNOŚCI I WYPROWADZALNOŚCI

W prowadzonych rozważaniach będę korzystać ze standardowej semantyki światów możliwych dla systemów K oraz S5 — szczegółowo opisanej w [Chagrov, Zakharyaschev, 1997]. W punkcie (3.1) odnotuję podstawowe pojęcia i twierdzenia dotyczące interpretacji rachunków K i S5 na gruncie tej semantyki. Poczynione ustalenia będą służyły do wyznaczenia niektórych związków zachodzących między własnościami: dopuszczalności, ważności i wyprowadzalności wybranych reguł inferencji — a różnymi rodzajami wynikania semantycznego. Jak się okaże, nie wszystkie z owych związków ustalonych dla logik K i S5 oraz ich modeli powtórzą się w odniesieniu do dowolnych systemów K_J i $S5_J$ oraz odpowiadających im struktur semantycznych.

3.1 Interpretacje logik K i S5 w standardowej semantyce światów możliwych

W standardowej semantyce światów możliwych przyjmuje się, że w dowolnym niepustym zbiorze W (tzw. zbiorze światów możliwych) określona jest relacja δ (tzw. relacja dostępności światów możliwych): $W \neq \emptyset$ i $\delta \subset W \times W$.

Dwójka: (W, δ) jest tzw. ramą, na której można oprzeć różne struktury światów możliwych:

DEFINICJA 9

Strukturą światów możliwych opartą na ramie (W, δ) jest dwójka: $M = ((W, \delta), \pi)$, gdzie π jest wartościowaniem zmiennych zdaniowych w zbiór 2^W (π: $Zm \rightarrow 2^W$).[22]

Za pomocą pojęcia *struktury światów możliwych* definiuje się pojęcie *prawdziwości formuły A w świecie możliwym w struktury M*:

DEFINICJA 10

Dla dowolnej struktury M opartej na pewnej ramie (W,δ) (tj. $M= ((W, \delta), \pi)$), dowolnego świata możliwego $w \in W$ oraz dowolnej $A \in For$, relacja prawdziwości ($\models$) jest taka że:

$(M,w) \models A$ wtw, gdy $w \in \pi(A)$, gdzie $A \in Zm$,

$(M,w) \models (A \wedge B)$ wtw, gdy $(M,w) \models A$ oraz $(M,w) \models B$,

$(M,w) \models (\sim A)$ wtw, gdy $(M,w) \not\models A$,

$(M,w) \models (\Box A)$ wtw, gdy $(M,w') \models A$ dla każdego $w' \in W$ takiego, że: $w \delta w'$.

Na gruncie semantyki światów możliwych mówi się nie tylko o prawdziwości w świecie możliwym, ale także o prawdziwości w strukturze:

DEFINICJA 11

$\models^M A$ wtw, gdy $\forall_{w \in W} (M,w) \models A$.

Prezentowana teoria semantyczna pozwala także sformułować pojęcia *prawdziwości w ramie (W,δ)* oraz *K-ważności*. Można powiedzieć, że jeżeli dana formuła A jest prawdziwa we wszystkich strukturach światów możliwych opartych na określonej ramie (W,δ), to A jest prawdziwa w ramie (W,δ):

DEFINICJA 12

$\models^{(W,\delta)} A$ wtw, gdy $\forall_\pi \models^{(W,\delta,\pi)} A$[23].

Przez K-ważność należy natomiast rozumieć prawdziwość danej formuły w dowolnej ramie:

DEFINICJA 13

$\models^K A$ wtw, gdy $\forall_{(W,\delta)} \models^{(W,\delta)} A$.[24]

---

[22] Funkcja π przyporządkowuje każdej zmiennej zdaniowej zbiór światów, w których zmienna ta posiada wartość prawdy. Wobec tego, że w wypadku każdej ramy można wyznaczyć wiele takich przyporządkowań, na jednej ramie można oprzeć wiele struktur.

[23] Na podstawie def 9, równoważne są zapisy: $(M,w) \models A$ oraz $(((W, \delta), \pi),w) \models A$ (także: $\models^M A$ oraz $\models^{((W,\delta),\pi)} A$).

Sprecyzowane pojęcia *prawdziwości* umożliwiają wyznaczenie czterech różnych rodzajów wynikania semantycznego. W definicjach 14—17 wyznacza się odpowiednio pojęcia: *wynikania punktowego* ($\models^{t}$), *wynikania strukturalnego* ($\models^{S}$), wynikania *ramowego* ($\models^{F}$) oraz *wynikania inferencyjnego*($\models^{v}$).[25]

DEFINICJA 14

$A \models^{t} B$ wtw, gdy $\forall_{(W,\delta)} \forall_{\pi} \forall_{w \in W} [(((W, \delta), \pi), w) \models A \Rightarrow (((W, \delta), \pi), w) \models B]$.

DEFINICJA 15

$A \models^{S} B$ wtw, gdy $\forall_{M} [\models^{M} A \Rightarrow \models^{M} B]$.

DEFINICJA 16

$A \models^{F} B$ wtw, gdy $\forall_{(W,\delta)} (\models^{(W,\delta)} A \Rightarrow \models^{(W,\delta)} B)$.

DEFINICJA 17

$A \models^{v} B$ wtw, gdy $[\models^{K} A \Rightarrow \models^{K} B]$.[26]

Zgodnie z def14, prawdziwość w świecie w struktury M jest dziedziczna ze względu na wynikanie punktowe. Na mocy def15 taka sama zależność występuje między własnością prawdziwości w strukturze M i relacją wynikania strukturalnego. W wypadku wynikania ramowego (def16) można natomiast mówić o dziedziczeniu prawdziwości w ramie: prawdziwość w ramie pierwszego argumentu relacji wynikania ramowego jest wystarczającym warunkiem prawdziwości w ramie drugiego argumentu tej relacji. Zgodnie z def17, między formułami zachodzi wynikanie inferencyjne wtedy, gdy K-ważność pierwszej z tych formuł jest warunkiem wystarczającym K-ważności drugiej z nich.

Autorzy [Fagin, Halpern, Vardi, 1992, s.1030—1031] wykazują następujące zależności między zdefiniowanymi relacjami wynikania:

L14. $\models^{t} \subsetneq \models^{S} \subsetneq \models^{F} \subsetneq \models^{v}$[27]

Dowód: (a) $\models^{t} \subsetneq \models^{S}$ ponieważ: (a1) $\models^{t} \subset \models^{S}$ oraz (a2) $\models^{t} \neq \models^{S}$ bo:

---

[24] Znaki: $\models$, $\models^{M}$, $\models^{(W,\delta)}$, $\models^{K}$ (zdefiniowane odp. w: def10—13) będą w dalszych rozważaniach używane także w kontekstach:$(M,w) \models X$,$\models^{M} X$, $\models^{(W,\delta)} X$, $\models^{K} X$, gdzie X jest zbiorem formuł. Gdy: $X = \{A_1, \ldots A_n\}$, wówczas: (Def10a) $(M,w) \models X$ wtw, gdy $(M,w) \models (A_1 \wedge \ldots \wedge A_n)$; (Def11a) $\models^{M} X$ wtw, gdy $\forall_{w \in W} [(M,w) \models (A_1 \wedge \ldots \wedge A_n)]$; (Def12a) $\models^{(W,\delta)} X$ wtw, gdy $\forall_{\pi} (\models^{(W,\delta,\pi)} X)$; (Def13a) $\models X$ wtw, gdy $\forall_{(W,R)} (\models^{(W,\delta)} X)$.

[25] Przyjęte terminy są dosłownym tłumaczeniem odpowiednich terminów używanych przez autorów [Fagin, Halpern, Vardi, 1992]: point consequence, structure consequence, frame consequence, inferential consequence.

[26] Wyrażenia: $\models^{t}$, $\models^{S}$, $\models^{F}$, $\models^{v}$ będą również występować w kontekstach $X \models^{t} B$, $X \models^{S} B$, $X \models^{F} B$, $X \models^{v} B$, gdzie X jest zbiorem formuł. Gdy $X = \{A_1, \ldots A_n\}$, wówczas zapisy tego rodzaju należy rozumieć tak, że: (Def14a) $X \models^{t} B$ wtw, gdy $\forall_{(W,R)} \forall_{\pi} \forall_{w \in W} [(((W, R), \pi), w) \models X \Rightarrow (((W, R), \pi), w) \models B]$; (Def15a) $X \models^{S} B$ wtw, gdy$\forall_{M} [\models^{M} X \Rightarrow \models^{M} B]$; (Def16a) $X \models^{F} B$ wtw, gdy $\forall_{(W,R)} (\models^{(W,R)} X \Rightarrow \models^{(W,R)} B)$; (Def17a) $X \models^{v} B$ wtw, gdy$[\models^{K} X \Rightarrow \models^{K} B]$. Por. także przyp. 23, 24.

[27] Aby nie komplikować zbytnio zapisu, znaki: $\models^{t}$, $\models^{S}$, $\models^{F}$, $\models^{v}$ będą także używane na oznaczenia zbiorów generowanych przez def14—17.

(ad a1)

1. $A \models^{t} B$ [zd], 2. $\forall_M \forall_{w\in W}$ $((M,w)\models A \Rightarrow (M,w)\models B)$ [1, def14], 3. $\forall_M$ $(\forall_{w\in W}$ $(M,w)\models A \Rightarrow \forall_{w\in W}$ $(M,w)\models B)$ [2], 4. $\forall_M(\models^M A \Rightarrow \models^M B)$ [3, def11], 5. $A \models^S B$ [4, def15];

(ad a2)

1. $p\models^S \Box p$ [bo: 1.1 $\models^M p$ [zd], 1.2 $\forall_{w\in W}$ $(M,w)\models p$ [def11, 1.1], 1.3 $\forall_{w'\in W}(w'\delta w \Rightarrow (M,w)\models p)$ [1.2], 1.4 $\forall_{w\in W}$ $(M,w)\models \Box p$ [def 10, 1.3]] oraz 2. $\neg(p\models^t \Box p)$ [bo: dana jest struktura światów możliwych $\mathbf{M}=((\mathbf{W},\delta),\pi)$, gdzie: $\mathbf{W}=\{w_1,w_2\}$, $\delta=\{<w_1,w_2>\}$, $\pi(p)=\{w_1\}$. Wówczas: $(\mathbf{M},w_1)\models p$ oraz $\neg((\mathbf{M},w_1)\models \Box p)$];

(b) $\models^S \subsetneq \models^F$, ponieważ: (b1) $\models^S \subset \models^F$ oraz (b2) $\models^S \neq \models^F$ bo:

(ad b1)

1.$A\models^S B$ [zd], 2. $\forall_M[\models^M A \Rightarrow \models^M B]$ [1, def15], 3. $\forall_M$ $[\forall_{w\in W}$ $(M,w)\models A \Rightarrow \forall_{w\in W}$ $(M,w)\models B]$ [2, def11], 4. $\forall_{(W,\delta)}\forall_\pi(\forall_{w\in W}$ $(((W,\delta),\pi),w)\models A \Rightarrow \forall_{w\in W}$ $(((W,\delta),\pi),w)\models B)$ [3],

5. $\forall_{(W,\delta)}(\forall_\pi\forall_{w\in W}$ $(((W,\delta),\pi),w)\models A \Rightarrow \forall_\pi \forall_{w\in W}$ $(((W,\delta),\pi),w)\models B))$ [4], 6. $A \models^F B$ [5, def16];

(ad b2)

1.$(\Diamond p\wedge\Diamond\sim p)\models^F (p\wedge\sim p)$ (ponieważ: $\neg(\models^F (\Diamond p\wedge\Diamond\sim p))$. Dla każdej ramy (W,δ) można wskazać takie przyporządkowanie π, że $\pi(p)=W$. Dlatego: $\exists_\pi \models^{((W,\delta),\pi)} \Box p$ [def10] a także: $\exists_\pi\models^{((W,\delta),\pi)}(\Box p \vee \Box\sim p)$. Na mocy standardowej definicji funktora: $\exists_\pi \models^{((W,R),\pi)} \sim(\Diamond p \wedge \Diamond\sim p)$, a stąd też: $\exists_\pi \neg(\models^{((W,R),\pi)} (\Diamond p \wedge \Diamond\sim p))$ [def10]. Zgodnie z def16 należy więc uznać iż: $\neg(\models^F (\Diamond p\wedge\Diamond\sim p))$;

1.$\neg((\Diamond p\wedge\Diamond\sim p)\models^S (p\wedge\sim p))$ (dana jest struktura światów możliwych $\mathbf{M}'=((\mathbf{W},\delta'),\pi')$, gdzie: $\mathbf{W}=\{w_1, w_2\}$, $\delta'=\{<w_1,w_2>,<w_1,w_1>,<w_2,w_1>,<w_2,w_2>\}$, $\pi'(p)=\{w_1\}$. Wówczas: $\forall_{w\in W}$ $((\mathbf{W},\delta'),\pi'), w)\models(\Diamond p\wedge\Diamond\sim p)$ oraz $\neg(\forall_{w\in W}((\mathbf{W},\delta'),\pi'),w) \models(p\wedge\sim p))$;

(c) $\models^F \subsetneq \models^v$ ponieważ: (c1) $\models^F \subset \models^v$ oraz (c2) $\models^F \neq \models^v$ bo:

(ad c1)

1, $A\models^F B$[zd], 2. $\forall_{(W,\delta)}(\models^{(W,\delta)}A \Rightarrow \models^{(W,\delta)} B)$ [1, def16, 3. $\forall_{(W,\delta)} \models^{(W,\delta)}A \Rightarrow \forall_{(W,\delta)} \models^{(W,\delta)} B$ [2],

4. $\models^K A \Rightarrow \models^K B$ [3, def13], 5. $A \models^v B$ [4, def17];

(ad c2)

1. $\Box p\models p$ $[\neg(\forall_{(W,R)}\forall_\pi((W, R), \pi)\models \Box p)]$, 2. $\neg(\Box p\models^F p)$ [bo: $\mathbf{W}=\{w_1, w_2\}$, $\delta^*=\varnothing$. Wówczas: $\forall_\pi\forall_{w\in W'}$ $(((\mathbf{W}, \delta^*), \pi),w)\models \Box p$ oraz : $\exists_\pi((\mathbf{W}, \delta^*), \pi)\models \sim p$].

W dalszych rozważaniach weźmiemy także pod uwagę rodzinę wszystkich ram Kripkego, w których relacje dostępności między światami możliwymi są równoważnościowe:

DEFINICJA 18

Rama $(W,\delta) \in \underline{C_{S5}}$ wtw, gdy $\delta\in$ równ(W).

Pojęcie *S5-ważności* opisuje następująca definicja:

DEFINICJA 19

$\models^{S5}A$ wtw, gdy $\forall_{(W,\delta)\in \underline{CS5}} \models^{(W,\delta)} A$.

S5-ważność jest własnością dziedziczną ze względu na relację wynikania S5-inferencyjnego ($\models^{S5}$):

DEFINICJA 20

$A\models^{S5}B$ wtw, gdy $(\models^{S5}A \Rightarrow \models^{S5}B)$.

Jak zauważa się w [Fagin, Halpern, Vardi, 1992, s. 1034], prawdziwa jest następująca równoważność:

L15. $[\models^{S5}A$ i $\exists_{(W,\delta)\in \underline{CS5}}\exists_{\pi}\exists_{w\in W}(((W,\delta),\pi),w)\models B]$ wtw, gdy $[\exists_{(W,\delta)\in \underline{CS5}}(\models^{(W,\delta)}A$ i $\exists_{\pi}\exists_{w\in W}(((W,\delta),\pi),w)\models B)$.[28]

Własności prawdziwości formuł w świecie możliwym, w strukturze i w ramie formuł — rozważane w odniesieniu do ram, w których relacja dostępności jest równoważnościowa (tj. do klasy $\underline{C}_{S5}$) — pozwalają zdefiniować pojęcia wynikania: S5-punktowego ($\models^{S5\text{-}t}$), S5-strukturalnego ($\models^{S5\text{-}S}$), S5-ramowowego ($\models^{S5\text{-}F}$). Pojęcia te są podrzędne zakresowo odpowiednio względem pojęć wynikania punktowego, strukturalnego i ramowego. Definicje relacji: $\models^{S5\text{-}t}$, $\models^{S5\text{-}S}$, $\models^{S5\text{-}F}$ otrzymujemy odpowiednio z def14, def15, def16 przez ograniczenie branych pod uwagę ram do takich, które należą do $\underline{C}_{S5}$.

Związki między relacjami: $\models^{S5\text{-}t}$, $\models^{S5\text{-}S}$, $\models^{S5\text{-}F}$, $\models^{S5}$ opisuje lemat:

L16. $\models^{S5\text{-}t} \subsetneq \models^{S5\text{-}S} \subsetneq \models^{S5\text{-}F} = \models^{S5}$

Dowody zależności: (A) $\models^{S5\text{-}t} \subsetneq \models^{S5\text{-}S}$, (B) $\models^{S5\text{-}S} \subsetneq \models^{S5\text{-}F}$ oraz (c1) $\models^{S5\text{-}F} \subset \models^{S5}$ przebiegają tak jak dowody zależności z L14 oznaczonych odpowiednio: (a), (b) i (c1) (należy jedynie ograniczyć klasę branych pod uwagę struktur do $\underline{C}_{S5}$). Dowiedziemy tu dodatkowo, że:

(c2) $\models^{S5} \subset \models^{S5\text{-}F}$ bo: 1. $A \models^{S5} B$, 2. $\neg(A \models^{S5\text{-}F} B)$ [zdn], 3. $\neg(\models^{S5}A$ i $\exists_{(W,\delta)\in \underline{CS5}}\exists_{\pi}\exists_{w\in W}(((W,\delta),\pi),w)\models {\sim}B)$ [1, def19, def20, def 10], 4. $\exists_{(W,\delta)\in \underline{CS5}}(\models^{(W,\delta)}A$ i $\neg(\models^{(W,\delta)}B))$ [2, def16], 5. $\exists_{(W,\delta)\in \underline{CS5}}(\models^{(W,\delta)}A$ i $\exists_{\pi}\exists_{w\in W}(((W,\delta),\pi),w)\models {\sim}B)$ [4, def12, def10], 6. $\models^{S5}A$ i $\exists_{(W,\delta)\in \underline{CS5}}\exists_{\pi}\exists_{w\in W}(((W,\delta),\pi),w)\models {\sim}B$ [5], sprz: 3, 6.

Z punktu widzenia prowadzonych rozważań istotne jest, że wszystkie formuły ważne wyznaczają zbiór tez logiki K, zaś wszystkie formuły S5-ważne wyznaczają zbiór tez systemu S5:

L17. (a) $\mathbf{C}(\mathcal{R},\mathcal{AK}) = \{A : \models^{K} A\}$ oraz (b) $\mathbf{C}(\mathcal{R},\mathcal{A}S5) = \{A : \models^{S5} A\}$.[29]

3.2 Semantyczna interpretacja pojęć: *dopuszczalności, ważności* i *wyprowadzalności*

Na podstawie L17, definicji zbiorów tez logik K i S5 (def4) oraz definicji dopuszczalności i ważności reguł inferencji (def5, def6) mamy:

L18. (a1) $r \in$ Dop (K) wtw, gdy $\forall_{(A1,\ldots,An,B)\in r}(\{A_1,\ldots,A_n\} \models^{v} B)$,

---

[28] Dowód implikacji: $(\models^{S5}A$ i $\exists_{(W,\delta)\in CS5}\exists_{\pi}\exists_{w\in W}(((W,\delta),\pi),w)\models B) \Rightarrow (\exists_{(W,\delta)\in CS5}(\models^{(W,\delta)}A$ i $\exists_{\pi}\exists_{w\in W}(((W,\delta),\pi),w)\models B))$ nie jest skomplikowany: 1. $\models^{S5}A$ i $\exists_{(W,\delta)\in CS5}\exists_{\pi}\exists_{w\in W}(((W,\delta),\pi),w)\models B$ [zd], 2. $\forall_{(W,\delta)\in \underline{CS5}}\models^{(W,\delta)}A$ i $\exists_{(W,\delta)\in \underline{CS5}}\exists_{\pi}\exists_{w\in W}(((W,\delta),\pi),w)\models B$ [1, def. 20], 3. $\forall_{(W,\delta)\in \underline{CS5}}(\models^{(W,\delta)}A$ i $\exists_{\pi}\exists_{w\in W}(((W,\delta),\pi),w)\models B)$ [2], 4. $\exists_{(W,\delta)\in \underline{CS5}}(\models^{(W,\delta)}A$ i $\exists_{\pi}\exists_{w\in W}(((W,\delta),\pi),w)\models B)$ [3].

W dowodzie implikacji odwrotnej autorzy przytaczanej pracy korzystają z tego, że:

(i) $(W,\delta)\in \underline{C}_{S5} \Rightarrow [(\models^{(W,\delta)}A$ i $\exists_{\pi}\exists_{w\in W}(((W,\delta),\pi),w)\models B \Rightarrow \exists_{\pi}(\models^{((W,\delta),\pi)}(A\wedge B)$ i $\exists_{M^{**}}(\models^{M^{**}}B)]$ oraz

(ii) $\exists_{(W,\delta)\in \underline{CS5}}\exists_{\pi}(\models^{((W,\delta),\pi)}(A\wedge B)$ i $\exists_{M^{**}}(\models^{M^{**}}B)] \Rightarrow (\models^{S5}A$ i $\exists_{(W,\delta)\in \underline{CS5}}\exists_{\pi}\exists_{w\in W}(((W,\delta),\pi),w)\models B)$,

gdzie: M** jest dowolną strukturą, w której uniwersum jest jednoelementowe (*ibidem*, s. 1034—1035).

[29] Por. Th. 3.53 w [Chagrov, Zakharyaschev, 1997, s. 86] oraz Cor 5.18 i Prop. 3.75, 3.76 [tamże, s. 137, s. 93].

(a2) $r \in$ Dop(S5) wtw, gdy $\forall_{(A1,\ldots,An,B)\in r}(\{A_1,..,A_n\} \models^{S5} B)$,

(b1) $r \in$ Ważn(K) wtw, gdy $\forall_{(A1,\ldots,An,B)\in r}(\{A_1,..,A_n\} \models^{t} B)$,

(b2) $r \in$ Ważn(S5) wtw, gdy $\forall_{(A1,\ldots,An,B)\in r}(\{A_1,..,A_n\} \models^{S5\text{-}t} B)$.

Zależności opisane w L18 mogą być uważane za semantyczne definicje dopuszczalności i ważności reguł na gruncie odpowiednich logik. Zgodnie z tym, jak rozumie się pojęcia *wynikania (S5-) punktowego* i *(S5-) inferencyjnego* (por. def14, def17, def20), w wypadku reguł dopuszczalnych na gruncie danej logiki wniosek dziedziczy (S5-, *K*-) ważność przesłanek, natomiast w wypadku reguł ważnych dziedziczona jest prawdziwość w świecie możliwym struktury $((W,\delta),\pi)$.

Dla wygody przyjmijmy, że ω jest dowolnym z indeksów: t, S, F, v, występujących w kontekstach: $\models^{t}, \models^{S}, \models^{F}, \models^{v}$, natomiast S5-$\omega$ jest dowolnym z indeksów występujących w wyrażeniach: $\models^{S5\text{-}t}, \models^{S5\text{-}S}, \models^{S5\text{-}F}, \models^{S5}$.

Możemy dodatkowo zauważyć, iż:

L19. (a) $\forall_{\omega}$ ($r \in$ Ważn(K) $\Rightarrow \forall_{(A1,\ldots,An,B)\in r}(\{A_1,..,A_n\} \models^{\omega} B)$ [L18,L14] oraz

(b) $\forall_{S5\text{-}\omega}$ ($r \in$ Ważn(S5) $\Rightarrow \forall_{(A1,\ldots,An,B)\in r}(\{A_1,..,A_n\} \models^{S5\text{-}\omega} B)$ [L18,L16].

Zależności odwrotne do tych, które opisuje się w L19, nie zachodzą. Na mocy L18, L14 i L16 są natomiast prawdziwe równoważności:

L20. (a) $r \in$ Ważn(K) wtw, gdy $\forall_{\omega} \forall_{(A1,\ldots,An,B)\in r}(\{A_1,..,A_n\} \models^{\omega} B)$,

(b) $r \in$ Ważn(S5) wtw, gdy $\forall_{S5\text{-}\omega} \forall_{(A1,\ldots,An,B)\in r}(\{A_1,..,A_n\} \models^{\omega} B)$.

Wobec tego, że reguły: RN, RNA oraz RS nie są ważne w logikach K i S5, w ich wypadku wnioski nie dziedziczą prawdziwości w świecie w dowolnej struktury $((W,\delta),\pi)$, ponieważ:

L21. $r \in \{$RN, RNA, RS$\} \Rightarrow$ (a) $\exists_{(A1,\ldots,An,B)\in r} \neg(\{A_1,..,A_k\} \models^{t} B)$ oraz

(b) $\exists_{(A1,\ldots,An,B)\in r} \neg(\{A_1,..,A_n\} \models^{S5\text{-}t} B)$ [L2, L6, L18].

Reguły: RN, RNA oraz RS są jednak dopuszczalne w branych pod uwagę logikach i dlatego ich wnioski dziedziczą K-ważność oraz S5-ważność:

L22. $r \in \{$RN, RNA, RS$\} \Rightarrow$ (a) $\forall_{(A1,\ldots,An,B)\in r} \{A_1,..,A_k\} \models^{v} B$ oraz

(b) $\exists_{(A1,\ldots,An,B)\in r} \{A_1,..,A_n\} \models^{S5} B$ [L1,L8,L18].

Między przesłankami a wnioskami reguł: RN, RNA, RS zachodzą także relacje słabsze od relacji wynikania (S5-) inferencyjnego: wynikanie strukturalne i S5-strukturalne:

L23. $r \in \{$RN, RNA, RS$\} \Rightarrow \forall_{(A1,\ldots,An,B)\in r}(\{A_1,..,A_n\} \models^{S} B)$

Dowód: (a) dla r=RN

1.$\exists_{A}\exists_{(W,\delta)}\exists_{\pi}(\models^{((W,\delta),\pi)} A$ i $\neg(\models^{((W,R),\pi)} \Box A))$ [zdn], 2. $\forall_{w\in W'}(((W',\delta'),\pi'),w) \models B$ [1], 3. $\neg(\forall_{w\in W'}(((W',\delta'),\pi'),w)) \models B$ [1], 4. $\forall_{w'}\forall_{w}(w\delta' w' \Rightarrow (((W',\delta'),\pi'),w')) \models B$ [2], 5. $\forall_{w\in W'}(((W',\delta'),\pi'), w) \models B$ [4, def10]; sprz:3,5.

(b) dla r=RNA

1.$\exists_{A,B}\exists_{(W,\delta)}\exists_{\pi}(\models^{((W,\delta),\pi)} \Box(A\vee B)$ i $\models^{((W,\delta),\pi)} {\sim}A$ i $\neg(\models^{((W,\delta),\pi)} \Box B))$ [zdn], 2. $\forall_{w}(\forall_{w'}(w\delta' w' \Rightarrow ((W',\delta'),\pi'), w') \models (C\vee D)$ [1], 3. $\forall_{w\in W'}(((W',\delta'),\pi'), w) \models {\sim}C$ [1], 4. $\exists_{w}\exists_{w'}(w\delta' w'$ i $\neg((((W',R'),\pi'), w') \models D))$ [1], 5. $w''\delta' v$ i $\neg((((W',\delta'),\pi'), v) \models C)$ i $\neg((((W',\delta'),\pi'), v) \models D)$ [3,4], 6. $w''\delta' v$ i $\neg((((W',\delta'),\pi'), v) \models (C\vee D))$ [5, def10], 7. $w''\delta' v \Rightarrow ((W',\delta'),\pi'), v) \models (C\vee D)$ [2], 8. $((W',\delta'),\pi'), v) \models (C\vee D)$ [7, 6], 9. $\neg((((W',R'),\pi'), v) \models (C\vee D))$ [6]; sprz: 8,9

(c) dla r=RS

1.$\exists_{A,B}\exists_{(W,\delta)}\exists_{\pi}(\models^{((W,\delta),\pi)} \Box(A\to B)$ i $\models^{((W,\delta),\pi)} A$ i $\neg(\models^{((W,\delta),\pi)} \Box B))$ [zdn], 2. $\forall_{w}(\forall_{w'}(w\delta' w' \Rightarrow ((W',\delta'),\pi'), w') \models (C\to D)$ [1], 3. $\forall_{w\in W'}(((W',\delta'),\pi'), w) \models C$ [1], 4. $\exists_{w}\exists_{w'}(w\delta' w'$ i $\neg((((W',R'),\pi'), w') \models D))$ [1], 5. $w''\delta' v$ i $((W',\delta'),\pi'),v) \models C$ i $\neg((((W',R'),\pi'), v) \models D)$ [3,4], 6.$\neg((((W',\delta'),\pi'),v) \models (C\to D))$ [5, def10], 7. $w''\delta' v \Rightarrow (((W',\delta'),\pi'),v) \models (C\to D)$ [2], 8. $(((W',\delta'),\pi'),v) \models (C\to D)$ [7, 5]; sprz: 6, 7.

Zgodnie z L5 i L7, reguły: RN, RNA i RS są wyprowadzalne na gruncie logik K i S5. Ogólnie można powiedzieć, że wyprowadzalność reguły jest warunkiem wystarczającym występowania relacji wynikania (S5-) strukturalnego między przesłankami a wnioskami tej reguły:

L24. (a) $r\in$ Wypr(K)$\Rightarrow \forall_{(A1,\dots,An,B)\in r}$ $(\{A_1,..,A_n\}\models^{S} B)$, (b) $r\in$ Wypr(S5) $\Rightarrow \forall_{(A1,\dots,An,B)\in r}$ $(\{A_1,..,A_n\}\models^{S5\text{-}S} B)$.

Dowód: (a) 1. $r\in$ Wypr(K), 2. $\neg\forall_{(A1,\dots,An,B)\in r}$ $(\{A_1,..,A_n\}\models^{S} B)$ [zdn], 3. $(C_1,\dots,C_n,D)\in r$ oraz $\neg(\{C_1,..,C_n\}\models^{S} D)$ [2], 4. $D\in \mathbf{C}(\mathcal{R}, \mathcal{AX}\cup\{C_1,..,C_n\})$ [def7,1], 5. $\neg\forall_{M}$ $(\models^{M}\{C_1,..,C_n\}\Rightarrow \models^{M}D)$ [def16,3], 6. $(\models^{M}\{C_1,..,C_n\}$oraz $\neg\models^{M}D)$ [5], 7.$\models^{M}(\mathcal{AX}\cup\{C_1,..,C_n\})$ [bo:L17,def14,6], 8. $\neg\models^{M}D$ [6], 19. $D\notin \{C_1,..,C_n\}$ [6], 9. $\exists_{A,B\in \mathbf{C}(\mathcal{R}, \mathcal{AX}\cup\{C1,\dots,Cn\})}$ $(A,B,D)\in$ RO lub $\exists_{A\in \mathbf{C}(\mathcal{R}, \mathcal{AX}\cup\{C1,\dots,Cn\})}$ $(A,D)\in$ RN [4], 10. $\models^{M}D$ [bo: 9 oraz: 1.1 $\exists_{A,B\in \mathbf{C}(\mathcal{R}, \mathcal{AX}\cup\{C1,\dots,Cn\})}$ $(A,B,D)\in$ RO [zdd], 1.2 $E,F\in \mathbf{C}(\mathcal{R}, \mathcal{AX}\cup\{C_1,..,C_n\})$ i $(E,F,B)\in$ RO [1.1], 1.3 $E,F \in \mathcal{AX}\cup\{C_1,..,C_n\})$ [1.2], 1.4$\models^{M}(E\wedge F)$ [7, 1.3], 1.5 $(E\wedge F\to D)\in \mathbf{C}(\mathcal{R}, \mathcal{AX})$ [DefRO, Def16, L2(b)], 1.6$\models^{M}$ $(E\wedge F\to D)$ [L17, 1.5, Def14], $\models^{M}D$ [bo:1.4, 1.6] a także: 2.1 $\exists_{A\in \mathbf{C}(\mathcal{R}, \mathcal{AX}\cup\{C1,\dots,Cn\})}$ $(A,D)\in$ RN [zdd], 2.2 $E\in \mathbf{C}(\mathcal{R}, \mathcal{AX}\cup\{C1,..,Cn\})$ i $(E,D)\in$ RN [2.1], 2.3 $\models^{M}E$ [2.2,7], 2.4 $\models^{M}D$ [L22(a), Def16, 2.3] sprz: 8, 10.

Dowód ma taką samą konstrukcję jak w (a).

W konsekwencji mamy także:

L25. $r\in$ {RN, RNA, RS} $\Rightarrow\forall_{(A1,\dots,An,B)\in r}$ [(a) $\{A_1,..,A_n\}\models^{F} B$ oraz (b) $\{A_1,..,A_n\}\models^{S5\text{-}S} B$ oraz (c)$\{A_1,..,A_n\}\models^{S5}B$].

Dowód na podstawie: L14, L23, Def19, L16.

Na podstawie L25 oraz L4(a) można zauważyć, że implikacja odwrotna do L24 nie jest prawdziwa.

Zgodnie z twierdzeniami L21—25 można powiedzieć, że — z wyjątkiem prawdziwości w świecie możliwym — w wypadku reguł: RN, RNA i RS wnioski dziedziczą wszystkie rodzaje prawdziwości przesłanek. Inaczej jest natomiast z regułami RIP oraz RKP. Wobec tego, że reguły te są dopuszczalne w rachunku K, *K*-ważność przesłanek jest warunkiem wystarczającym *K*-ważności wniosków. Zależności takiej nie ma jednak w wypadku *S5*—ważności, ponieważ reguły te nie są dopuszczalne w S5:

L26. $r\in$ {RIP, RKP} $\Rightarrow$ [(a) $\forall_{(A1,\dots,An,B)\in r}$ $\{A_1,..,A_n\}\models^{V} B$ oraz
(b) $\neg\ \forall_{(A1,\dots,An,B)\in r}$ $\{A_1,..,A_n\}\models^{S5} B$].

Dowód na podstawie: L9, L10, L18.

Aby wykazać, że odnośnie do RIP oraz RKP nie można mówić o żadnym innym wynikaniu jak tylko o inferencyjnym, wystarczy dowieść, że:

L27. $r\in$ {RIP, RKP} $\Rightarrow \neg\forall_{(A1,\dots,An,B)\in r}$ $\{A_1,..,A_n\}\models^{S}B$

Dowód: (a) dla r=RIP

$\exists_{((W,\delta),\pi)}(\models^{(W,\delta),\pi)}[\Diamond(\Diamond p\to p)]$ oraz$\models^{(W,\delta),\pi)}[\Diamond((\Diamond p\to p)\to\Box(\Diamond p\to p))]$ oraz $\neg\models^{(W,\delta),\pi)}[\Diamond((\Diamond p\to p) \wedge ((\Diamond p\to p) \to (\Diamond p\to p)))])$ [L10(a), L18];

(b) dla r=RKP

$\exists_{((W,\delta),\pi)}$ $(\models^{(W,\delta),\pi}$ $[\Diamond(\Diamond p\rightarrow p)]$ oraz$\models^{(W,\delta),\pi}$ $[\Diamond((\Diamond p\rightarrow p)\rightarrow\Box(\Diamond p\rightarrow p))]$ oraz $\neg\models^{(W,\delta),\pi}[\Diamond(\Diamond p\rightarrow p)])$ [L10(b), L18].

Wobec tego, że reguła RMO nie jest dopuszczalna w systemach K i S5, odnotujemy, iż:

L28. r=RMO $\Rightarrow$ (a) $\neg\forall_{(A1,\ldots,An,B)\in r}$ $(\{A_1,..,A_n\}\models^{v}$ B) i (b) $\neg\forall_{(A1,\ldots,An,B)\in r}$ $(\{A_1,..,A_n\}\models^{S5}$ B).

Dowód na podstawie: L12, L18.

W wypadku reguły odrywania (która jest ważna w branych pod uwagę rachunkach) między przesłankami a wnioskami zachodzą wszystkie wyróżnione rodzaje wynikania semantycznego:

L29. r=RO$\Rightarrow$ (a) $\forall_{\omega}$ $\forall_{(A1,\ldots,An,B)\in r}$ $(\{A_1,..,A_n\}\models^{\omega}$ B), (b) $\forall_{S5\text{-}\omega}$ $\forall_{(A1,\ldots,An,B)\in r}$ $(\{A_1,..,A_n\}\models^{\omega}$ B).

Dowód na podstawie: L2 i L20.

Wyniki ustaleń semantycznych, dotyczących różnych relacji wynikania zachodzących między przesłankami a wnioskami branych pod uwagę reguł inferencji, pokazuje następująca tabela:[30]

Tabela 2

	$\models^{t}$	$\models^{S}$	$\models^{F}$	$\models^{v}$	$\models^{S5\text{-}t}$	$\models^{S5\text{-}S}$	$\models^{S5\text{-}F}$	$\models^{S5}$
RO	$\subset$	$\subset$	$\subset$	$\subset$	$\subset$	$\subset$	$\subset$	$\subset$
RN	$\not\subset$	$\subset$	$\subset$	$\subset$	$\not\subset$	$\subset$	$\subset$	$\subset$
RNA	$\not\subset$	$\subset$	$\subset$	$\subset$	$\not\subset$	$\subset$	$\subset$	$\subset$
RS	$\not\subset$	$\subset$	$\subset$	$\subset$	$\not\subset$	$\subset$	$\subset$	$\subset$
RKP	$\not\subset$	$\not\subset$	$\not\subset$	$\subset$	$\not\subset$	$\not\subset$	$\not\subset$	$\not\subset$
RIP	$\not\subset$	$\not\subset$	$\not\subset$	$\subset$	$\not\subset$	$\not\subset$	$\not\subset$	$\not\subset$
RMO	$\not\subset$	$\not\subset$	$\not\subset$	$\not\subset$	$\not\subset$	$\not\subset$	$\not\subset$	$\not\subset$

Ustalenia poczynione w lematach L13—29 dotyczą logik K i S5 i nie wszystkie są ważne dla dowolnych systemów K_J i $S5_J$. Wyprzedzając tok prowadzonych rozważań, zauważmy że gdy J jest językiem, w którym wyrażeniami atomowymi są stałe zdaniowe, możemy mówić nie o wyrażeniach K-(S5-)ważnych (defl3, defl9), ale co najwyżej o wyrażeniach prawdziwych w każdej strukturze pewnej ustalonej ramy (defl2). Konsekwentnie, najsłabszą relacją wynikania, która może występować między wyrażeniami takiego języka jest wynikanie ramowe w obcięciu do owej ustalonej

[30] Zgodnie z defl, umową przyjętą w przyp. 26 oraz rozszerzeniem defl4—17 opisanym w przyp. 25 (por. defl4a—17a), fakt, iż między dowolnym zbiorem przesłanek i przyporządkowanym mu wnioskiem odpowiedniej reguły inferencji zachodzi (albo nie zachodzi) określony rodzaj wynikania semantycznego, sprowadza się do stwierdzenia, że między odpowiednimi podzbiorami iloczynu kartezjańskiego: $For^{(For)^n}$ (dla $n\geq1$) zachodzi (albo nie zachodzi) stosunek zawierania się.

ramy. Wynikanie to jest korelatem semantycznym dopuszczalności reguł na gruncie systemów K_J i $S5_J$. Semantyczne definicje ważności reguł na gruncie K_J i $S5_J$ są takie jak w wypadku systemów K i S5 (por. L18(b1),(b2)) — bierze się pod uwagę także wynikanie punktowe, tyle że w obcięciu do wspomnianej ramy, w której można rozważać także wynikanie strukturalne.

4. PRECYZACJA ZARZUTU PARALOGICZNOŚCI WYBRANYCH REGUŁ INFERENCJI W ZASTOSOWANIU DO ROZUMOWAŃ POZALOGICZNYCH

Przedstawione zależności między ważnością, dopuszczalnością i wyprowadzalnością wybranych reguł inferencji a różnymi rodzajami wynikania semantycznego mają istotny związek z dyskusją w sprawie występowania *modal fallacy*. Jak zostało to odnotowane we „Wstępie", błąd paralogizmu modalnego wskazywany jest w rozumowaniach pozalogicznych. W kontekście rozważanego problemu, rozumowanie pozalogiczne będzie się zaś uważać za dowód skonstruowany w ramach określonej zdaniowej teorii pozalogicznej opartej na danej logice K_J lub $S5_J$. Można powiedzieć, że ewentualna paralogiczność takiego dowodu sprowadza się do zastosowania w nim «nieodpowiedniej» reguły inferencji. Jak należy sądzić, owa «nieodpowiedniość» związana jest właśnie opisanymi w poprzednim punkcie określonymi własnościami reguł. Zanim ustalimy, o jakie zależności w tym wypadku chodzi, w punkcie (4.1) dokonane zostaną ustalenia w sprawie znaczenia terminu „teoria pozalogiczna", ponieważ *modal fallacy* jest błędem, o którym mówi się właśnie w odniesieniu do teorii pozalogicznych. W punkcie (4.2) sformułuje się określone warianty precyzacji zarzutu występowania *modal fallacy* na skutek użycia rozważanych reguł oraz warunki zasadności tych wariantów.

4.1 Zdaniowe teorie pozalogiczne oparte na wybranych systemach modalnych

Zdaniowe teorie pozalogiczne są pewnym rodzajem nietrywialnych rozszerzeń określonej logiki, która jest w takim wypadku podstawą formalną określonej teorii.

Niech **J** będzie dowolnym zdaniowym językiem modalnym zaś $\mathbf{L_J}$=(**AL**,**R**) — dowolną logiką wyrażoną w języku **J**.

DEFINICJA 21

Teorią opartą na logice $\mathbf{L_J}$=(**AL**,**R**) jest dwójka $\mathbf{T_J}$=($\mathbf{AL}\cup\mathcal{AS}$,**R**), gdzie $\mathcal{AS}$ jest niepustym i niesprzecznym zbiorem tzw. aksjomatów specyficznych tej teorii.

Z każdą teorią związany jest operator konsekwencji, który wyznacza zbiór jej tez:

DEFINICJA 22

Zbiór tez teorii $\mathbf{T_J}$: **C**(**R**, $\mathbf{AL}\cup\mathcal{AS}$) jest najmniejszym z podzbiorów zbioru $\mathbf{FOR_J}$ takim, że dla każdej formuły A: $A \in \mathbf{AL}\cup\mathcal{AS} \Rightarrow A \in \mathbf{C}(\mathbf{R}, \mathbf{AL}\cup\mathcal{AS})$ oraz (b)

$\forall_{r\in R}\forall_{A1,\ldots,An,\in ForJ}$: $\{A_1,\ldots,A_n\}\subset$ **C(R, AL**$\cup\mathcal{AS}$) i $(A_1,\ldots,A_n,A)\in r \Rightarrow A \in$ **C(R, AL**$\cup\mathcal{AS}$).[31]

Wśród tez teorii $\mathbf{T_J}$ wyróżnia się tzw. tezy logiczne — są to tezy logiki, na której oparta jest dana teoria. Różnica zbioru wszystkich tez teorii T_J i zbioru tez logicznych wyznacza zbiór tez specyficznych teorii T_J:

DEFINICJA 23

$SPEC_{T_J}$={A: A∈ **C(R, AL**$\cup\mathcal{AS}$)/ **C(R, AL)**}

Należy zauważyć, że zgodnie z definicjami: def2—4 oraz def21—23, każda z logik: K i S5 jest teorią opartą na samej sobie, w której zbiór tez specyficznych jest pusty. Chcąc ograniczyć nasze rozważania do teorii, których zbiór tez istotnie różni się od zbioru tez ich podstawy formalnej, wprowadzimy pojęcie *teorii nietrywialnej względem logiki L*:

DEFINICJA 24

Teoria $\mathbf{T_J}$=(**AL**$\cup\mathcal{AS}$,**R**) jest nietrywialna względem logiki $\mathbf{L_J}$=(**AL,R**) (inaczej: $\mathbf{T_J}$ jest istotnym rozszerzeniem $\mathbf{L_J}$) wtw, gdy $SPEC_{T_J} \neq \emptyset$

Pojęcie *teorii nietrywialnej* nie jest równoważne pojęciu *teorii pozalogicznej*. Można z łatwością wskazać teorię nietrywialną względem wybranej logiki, która sama jest systemem logicznym. Wystarczy tu wziąć pod uwagę logikę S5, którą da się przedstawić jako: ($\mathcal{AK}\cup$AS5,$\mathcal{R}$). Dwójka ($\mathcal{AK}\cup$AS5,$\mathcal{R}$) jest zaś teorią nietrywialną względem rachunku K (por. def3), gdzie zbiór AS5 jest wyznaczony przez schematy (a6) i (a7) z def3. Próby konstrukcji precyzyjnej definicji intuicyjnego pojęcia teorii pozalogicznej napotykają jednak na dobrze znane trudności. Chociaż próby te podejmowane są od lat przez logików, metodologów i filozofów w ramach sporu dotyczącego tzw. linii demarkacyjnej między logiką a pozostałymi naukami, to wydaje się, że dotąd nie można wskazać takiej definicji terminu „teoria pozalogiczna", która byłaby równie wyraźna, co adekwatna względem ogółu dokonań naukowych. Dla celów prowadzonych rozważań nie będzie się też konstruować i uzasadniać wspomnianej adekwatności takiej definicji. W przedstawianych analizach zostaną wskazane jedynie te konieczne warunki spełniane przez teorie pozalogiczne, które mają istotny związek z problemem paralogizmu modalnego, przy czym zakres analiz ograniczy się do teorii pozalogicznych wyrażonych w określonym modalnym języku zdaniowym J i opartych na systemach $S5_J$ i K_J.

DEFINICJA 25

Niech: JZ będzie takim modalnym językiem zdaniowym, że do zbioru jego wyrażeń atomowych należą wyłącznie stałe zdaniowe. Przyjmijmy także: T_{JZ}=(AL$\cup\mathcal{AS}$,R) i L_{JZ}=(AL, R).

$\mathbf{T_{JZ}} \in$ ***z-MT*** wtw, gdy $\mathbf{L_{JZ}} \in \{K_{JZ}, S5_{JZ}\}$, $SPEC_{T_{JZ}} \neq \emptyset$, $\mathcal{AS} \subsetneq SPEC_{T_{JZ}}$.

[31] Brane są pod uwagę wyłącznie teorie ze standardową operacją konsekwencji (por. przyp. 9).

Dla uproszczenia notacji przyjmiemy, że wyrażenia T_{JZ}^{K} oraz T_{JZ}^{S5} symbolizują dowolne elementy klasy ***z-MT*** oparte odpowiednio na rachunkach modalnych K_{JZ} oraz $S5_{JZ}$.

Zbiór ***z-MT*** jest rodziną zdaniowych teorii nietrywialnych opartych na logikach: K_{JZ} i $S5_{JZ}$. Pozostając w zgodzie z intuicyjnym rozumieniem pojęcia *teorii pozalogicznej* zauważamy, że tylko niektóre elementy zbioru ***z-MT*** są teoriami pozalogicznymi.

Należenie do rodziny ***z-MT*** jest nie wystarczającym, ale tylko koniecznym warunkiem bycia zdaniową teorią pozalogiczną:

(W1) Jeżeli T_{JZ} jest zdaniową teorią pozalogiczną opartą na logice K_{JZ} lub $S5_{JZ}$, to $T_{JZ} \in$ ***z-MT***.

Należy odnotować, że zbiór ***z-MT*** jest w istocie wyznaczony w sposób semantyczny, ponieważ w def25 odwołujemy się do semantycznego pojęcia *stałej zdaniowej*. Zgodnie z opisanymi w [Omyła, 1986, s. 59—62, 79] zasadami semantycznymi, można powiedzieć, że każda stała zdaniowa jest wyrażeniem, któremu odpowiada dokładnie jeden korelat semantyczny (sytuacja), podczas gdy zmiennej zdaniowej (w ujęciu przedmiotowym) odpowiada dowolny korelat semantyczny z branego pod uwagę uniwersum. Różnicę między stałą a zmienną zdaniową należy w naszym wypadku wyrazić w terminologii semantyki światów możliwych. W ramach przyjętej koncepcji nie będę korzystać z modyfikacji modalnej teorii modeli, w której wprowadza się pojęcie *sytuacji* i za pomocą niego definiuje się pojęcie *świata możliwego*, jednakże skorzystam z pewnych intuicji związanych z systemem zaprezentowanym w [Pietruszczak, 1997]. Zgodnie z tymi intuicjami, świat możliwy można pojmować jako pewnego rodzaju sytuację złożoną z sytuacji elementarnych, które są korelatami semantycznymi zdań.[32] Interpretacja języka, w którym występują stałe zdaniowe zakłada więc wybór stałego uniwersum sytuacji elementarnych. Definicje pojęć *prawdziwości* i *fałszywości* w świecie możliwym wymagają natomiast wyznaczenia określonej funkcji wartościowania (takiej, że jej wartości zależą od tego, jaka jest relacja bycia składnikiem w algebrze, której uniwersum stanowi ustalony wcześniej zbiór sytuacji). W ramach przyjętej tu aparatury pojęciowej nie mamy możliwości mówienia o częściach światów możliwych. Możemy jednak same światy możliwe uważać za sytuacje elementarne i wówczas interpretacja języka typu JZ zakłada wybór pewnego stałego uniwersum światów możliwych. Zgodnie ze wspomnianą zasadą jedno-jednoznacznego przyporządkowania: stała zdaniowa — korelat semantyczny, każdemu zdaniu byłyby przyporządkowane nie światy możliwe, ale zbiory światów możli-

[32] Dokładniej rzecz biorąc, autor branej pod uwagę pracy rozważa zbiór sytuacji elementarnych: SE, który tworzy razem z częściowo porządkującą relacją *bycia częścią* ($\leq$) kratę zupełną. W kracie tej definiuje się światy możliwe jako tzw. co-atomy — sytuacje, które nie są częścią żadnej sytuacji nie będącej elementem największym tej kraty (element największy tej kraty: λ jest tzw. sytuacją niemożliwą). Zbiór światów możliwych w tym ujęciu jest zbiorem co-atomów: $W^{*}=\{x: x \in SE$ i $\forall_{y \in SE}(x \leq y \Rightarrow y = \lambda)\}$. Dodatkowo, w kracie tej spełniony jest warunek, zgodnie z którym każda sytuacja (z wyjątkiem sytuacji niemożliwej) jest częścią jakiegoś świata możliwego: $\forall_{x \neq \lambda} \exists_{y \in W^{*}}(x \leq y)$.

wych (choćby jednoelementowe). Przy danej interpretacji, prawdziwość i fałszywość zdań w świecie możliwym są natomiast wyznaczone przez określoną funkcję π, zaś korelatami semantycznymi są zbiory światów możliwych.

Stąd też, przyjmiemy, że:

(W2) Jeżeli do zbioru wyrażeń atomowych modalnego języka zdaniowego J należą wyłącznie stałe zdaniowe, to językowi J jest przyporządkowana jedna ustalona rama światów możliwych: $(W,\delta)_{\uparrow J}$ będąca modelem właściwym tego języka.

Odnotujmy, że według niektórych autorów warunek W2 może być uważany za zbyt rygorystyczny ze względu na czynniki pragmatyczne (por. np. [Przełęcki, 1972, s. 135—136]). Jak twierdzi Marian Przełęcki, te właśnie czynniki powodują, iż w odniesieniu do języków empirycznych należy mówić raczej o klasie ich modeli właściwych niż o jednym takim modelu. W prowadzonych rozważaniach nie będę jednak brać pod uwagę wielości pragmatycznie dopuszczalnych interpretacji, które zakładają przyporządkowywanie różnych modeli właściwych. Z punktu widzenia obiektywnych związków semantycznych między określoną strukturą teoriomodelową a danym językiem (które zostały zdefiniowane po to, aby opisać tę właśnie strukturę) możliwość przyporządkowywania jakiemuś językowi różnych interpretacji przez różnych użytkowników tego języka jest tak samo nieistotna, jak możliwość przypisywania różnych kwalifikacji pragmatycznych zdaniom, które niezależnie od tych kwalifikacji mają obiektywną wartość logiczną. Na podstawie przyjętego warunku (W2) oraz def13 i def19 można zauważyć, iż:

L28. (a) $\forall_{A\in For_{JZ}} \neg \models^{K} A$ oraz (b) $\forall_{A\in For_{JZ}} \neg \models^{S5} A$.

Konsekwencją definicji wyrażeń K—ważnych oraz S5-ważnych (por. def13, def19) jest to, że nie występują w nich jako podformuły stałe zdaniowe, ponieważ (zgodnie z warunkiem (W2)) ich występowanie wyklucza możliwość mówienia o prawdziwości w zbiorze wszystkich ram lub w rodzinie wszystkich ram z równoważnościową relacją dostępności: $\underline{C}_{S5}$ (por. def18). Wyrażenia K-ważne oraz S5-ważne są nie zdaniami, lecz schematami zdaniowymi — K-tautologiami oraz S5-tautologiami. Wyrażenia (K-) S5-tautologiczne należy odróżnić od (K-) S5-prawd logicznych, które są zdaniami w sensie logicznym wyrażonymi w ustalonym języku JZ, posiadającymi budowę tautologii. Dla przykładu weźmiemy język **JZ1**, w którym jedyną stałą zdaniową jest wyrażenie: (z1) *Sokrates jest człowiekiem.* Wyrażenie: $z1 \vee \sim z1$ nie jest ani K-tautologią, ani S5-tautologią, ponieważ nie jest ono prawdziwe ani w każdej ramie, ani w każdej ramie z rodziny $\underline{C}_{S5}$. Zdanie: $z1 \vee \sim z1$ jest jednak prawdziwe w ramie: $\mathbf{(W,\delta)_{\uparrow JZ1}}$ będącej interpretacją właściwą języka **JZ1**; innymi słowy — jest ono prawdziwe w każdej strukturze opartej na ramie $\mathbf{(W,\delta)_{\uparrow JZ1}}$.

Korzystając z definicji K-ważności oraz S5 — ważności, można sformułować definicje K-prawdy oraz S5-prawdy logicznej języka JZ:

DEFINICJA 26

(a) A jest K-prawdą logiczną języka JZ wtw, gdy $\models^{(W,\delta)_{\uparrow JZ}} A$ (tzn.: $\forall_{\pi} \models^{((W,\delta)_{\uparrow JZ},\, \pi)} A$ — por. def12).

(b) A jest S5-prawdą logiczną języka JZ wtw, gdy $((W,\delta)\!\uparrow_{JZ} \in \underline{C}_{S5} \Rightarrow \models^{(W,\delta)\uparrow_{JZ}} A)$ (tzn: $((W,\delta)\!\uparrow_{JZ} \in \underline{C}_{S5} \Rightarrow \forall_\pi \models^{(W,\delta)\uparrow_{JZ},\pi)} A)$ — por. def12).

Podobnie jak logiki K i S5 są wyznaczone przez wszystkie formuły odpowiednio: K- i S5- ważne (por. L17), zdania języka JZ będące odp. K- i S5- prawdziwe logicznie wyznaczają systemy K_{JZ} i $S5_{JZ}$:

L29. (a) $C(\mathcal{R}_{JZ},\mathcal{AK}_{JZ}) = \{A: \models^{(W,\delta)\uparrow_{JZ}} A\}$ oraz (b) $C(\mathcal{R}_{JZ},\mathcal{AS}5_{JZ}) = \{A: (W,\delta)\!\uparrow_{JZ} \in \underline{C}_{S5}$ oraz $\models^{(W,\delta)\uparrow_{JZ}} A\}$.

Skoro w odniesieniu do logik K_{JZ} i $S5_{JZ}$ nie można mówić o wyrażeniach K- i S5-ważnych, nie jest możliwe wyznaczenie takiej interpretacji pojęcia *dopuszczalności*, jak ustala to lemat L18 (a) i (b) dla logik K i S5. W modelach logik K_{JZ} i $S5_{JZ}$ najsłabszą relacją wynikania semantycznego jest wynikanie ramowe w obcięciu do ramy $(W,\delta)\!\uparrow_{JZ}$ (tj. $\models^{(W,\delta)\uparrow_{JZ}}$ — por. def16). Na podstawie: def5, def16 i L29, dopuszczalność reguły na gruncie rachunków K_{JZ} i $S5_{JZ}$ należałoby wówczas rozumieć tak, że:

L30. (a1) $r_{JZ} \in$ Dop (K_{JZ}) wtw, gdy $\forall_{(A1,\ldots,An,B)\in rJZ} (\{A_1,..,A_n\} \models^{(W,\delta)\uparrow_{JZ}} B)$,

(a2) $r_{JZ} \in$ Dop$(S5_{JZ})$ wtw, gdy $\forall_{(A1,\ldots,An,B)\in r_{JZ}} (\{A_1,..,A_n\} \models^{(W,\delta)\uparrow_{JZ}} B)$, gdzie: $(W,\delta)\!\uparrow_{JZ} \in \underline{C}_{S5}$.

W wypadku systemów wyrażonych w modalnym języku zdaniowym pojęcia *dopuszczalności* i *wyprowadzalności* także nie są równoważne. Dla uzasadnienia wystarczy zauważyć, że reguły RKP_{JZ} i RIP_{JZ} nie są wyprowadzalne w K_{JZ} (por. L11), chociaż są dopuszczalne w tym rachunku (por. L9, L30).

Korzystając z przyjętych definicji, zauważmy, że każda nietrywialna modalna teoria zdaniowa T_{JZ} generuje zbiór tez specyficznych rozłączny względem zbioru prawd logicznych:

L31. (a) $T_{JZ}{}^{K} \in$ ***z-MT*** $\Rightarrow \mathrm{SPEC}_{T_{JZ}} \supset\subset \{A: \models^{(W,\delta)\uparrow_{JZ}} A\}$;

(b) $T_{JZ}{}^{S5} \in$ ***z-MT*** $\Rightarrow \mathrm{SPEC}_{T_{JZ}} \supset\subset \{A: \models^{(W,\delta)\uparrow_{JZ}} A\}$, gdzie: $(W,\delta)\!\uparrow_{JZ} \in \underline{C}_{S5}$ [def25, L29].

4.2 Zasadność zarzutu występowania paralogizmów modalnych w rozumowaniach pozalogicznych opartych na logikach K i S5

Zgodnie z przyjętymi wcześniej definicjami różnych rodzajów prawdziwości, dopuszczalne jest, aby aksjomatom specyficznym dowolnej zdaniowej nietrywialnej teorii T_{JZ} (a także jej specyficznym tezom wtórnym) przypisywać co najmniej dwojaki status semantyczny. Zgodnie z L31 status ten musi być różny od tego, który przysługuje prawdom logicznym określonej teorii. Korzystając z def10 i def11, powiemy, że w wypadku dowolnej teorii $T_{JZ} \in$ ***z-MT*** jej aksjomaty specyficzne (nie będąc prawdziwymi w każdej strukturze opartej na ramie $(W,\delta)\!\uparrow_{JZ}$) mogą być:

(a) prawdziwe w niektórych strukturach światów możliwych opartych na ramie $(W,\delta)\!\uparrow_{JZ}$ lub

(b) prawdziwe w niektórych światach możliwych niektórych struktur opartych na ramie $(W,\delta)_{\uparrow JZ}$.[33]

Oczywiście, gdy rozważana teoria jest oparta na $S5_{JZ}$: $(W,\delta)_{\uparrow JZ} \in \underline{C}_{S5}$.

Należy zauważyć, że bez względu na to, jakiego rodzaju prawdziwość zostanie przypisana aksjomatom specyficznym danej teorii, istotne jest, by każda teza specyficzna tej teorii otrzymana z tychże aksjomatów dziedziczyła ową prawdziwość. Dziedziczenie odpowiedniego statusu semantycznego mają natomiast gwarantować reguły inferencji, które umożliwiają wyprowadzanie tez wtórnych z aksjomatów specyficznych. Można powiedzieć, że gdy dana reguła inferencji nie gwarantuje owego dziedziczenia, wówczas jest ona paralogiczna na gruncie danej teorii pozalogicznej. Jednakże możliwość przypisywania aksjomatom specyficznym co najmniej dwu różnych rodzajów prawdziwości implikuje to, że możemy mówić o dwu różnych rodzajach paralogiczności reguł inferencji na gruncie danej teorii: paralogiczności strukturalnej i punktowej. Intuicyjnie można powiedzieć, że dana reguła jest paralogiczna strukturalnie na gruncie teorii T_{JZ}, gdy istnieje taki układ zdań należących do tej reguły i będących tezami specyficznymi teorii T_{JZ} i taka struktura światów możliwych oparta na ramie $(W,\delta)_{\uparrow JZ}$, że zdania będące przesłankami są prawdziwe w tej strukturze, zaś zdanie będące wnioskiem nie jest w niej prawdziwe. Reguła inferencji jest paralogiczna punktowo na gruncie teorii T_{JZ} wtedy, gdy istnieje taka struktura oparta na ramie $(W,\delta)_{\uparrow JZ}$ i taki świat możliwy w (należący do jej uniwersum), oraz układ zdań (będących tezami specyficznymi teorii T_{JZ}), który jest elementem tej reguły, że zdania będące przesłankami są prawdziwe w świecie w, zaś wniosek jest w tym świecie fałszywy. Powyższe intuicje można zapisać następująco:

Niech r_{JZ} będzie dowolną regułą inferencji wyznaczoną w zbiorze wyrażeń sensownych dowolnego modalnego języka zdaniowego ze stałymi zdaniowymi JZ. $T_{JZ}=(\mathcal{AL}_{JZ} \cup \mathcal{AS}, \mathcal{R}_{JZ})$ jest dowolną teorią powstałą przez rozszerzenie logiki L $\in \{K_{JZ},S5_{JZ}\}$ o zbiór aksjomatów specyficznych $\mathcal{AS}$ (por. def21). $M_{\uparrow JZ}$ reprezentuje dowolną strukturę światów możliwych opartą na ramie $(W,\delta)_{\uparrow JZ}$. Powiemy, że:

DEFINICJA 27

$r_{JZ} \in$ s-parl$(T_{JZ}{}^{L})$ wtw, gdy $r_{JZ} \notin \mathrm{Dop}(L_{JZ})$ lub $\exists_{(A1,\dots,An,B)\in r_{JZ}}$ $[\{A_1,\dots A_n,B\} \subset \mathrm{SPEC}_{T_{JZ}}$ i $\exists_{M_{\uparrow JZ}} (\models^{M_{\uparrow JZ}} \{A_1,\dots A_n\}$oraz $\neg\models^{M_{\uparrow JZ}} B)]$.

DEFINICJA 28

$r_{JZ} \in$ t-parl$(T_{JZ}{}^{L})$ wtw, gdy $r_{JZ} \notin \mathrm{Dop}(L_{JZ})$ lub $\exists_{(A1,\dots,An,B)\in r_{JZ}}$ $[\{A_1,\dots A_n,B\} \subset \mathrm{SPEC}_{T_{JZ}}$ i $\exists_{M_{\uparrow JZ}} \exists_w((M_{\uparrow JZ},w)\models\{A_1,\dots A_n\}$ oraz $\neg(M_{\uparrow JZ},w)\models B)]$.

Zgodnie z powyższymi definicjami, zarzut występowania *modal fallacy* w rozumowaniach pozalogicznych może się odwoływać przynajmniej do dwu różnych rodzajów paralogiczności reguł inferencji i dlatego też można wskazać takie warianty

[33] Gdy aksjomaty specyficzne są prawdziwe tylko w jednym świecie możliwym jakiejś struktury, na gruncie niektórych koncepcji filozoficznych świat ten nazywa się „światem realnym" lub „światem rzeczywistym".

tego zarzutu, które są uzasadnione i takie — które są bezzasadne. W szczególności nie mają uzasadnienia wszelkie sformułowania zarzutu *modal fallacy*, które są sprzeczne z konsekwencjami następujących lematów:

L32. $r_{JZ} \in \mathrm{Ważn}(L_{JZ}) \Rightarrow \forall_{T_{JZ}^{L}} (r_{JZ} \notin \text{s-parl}(T_{JZ}^{L}))$ [L16 (a) i (b), def15, def27],

L33. $r_{JZ} \in \mathrm{Wypr}(L_{JZ}) \Rightarrow \forall_{T_{JZ}^{L}} (r_{JZ} \notin \text{s-parl}(T_{JZ}^{L}))$ [L24 (a) i (b), def15, def27],

L34. $\exists_{r_{JZ}} \exists_{T_{JZ}^{K}} (r_{JZ} \in \mathrm{Dop}(K_{JZ})$ i $T_{JZ}^{K} \in \boldsymbol{z\text{-}MT}$ i $r_{JZ} \in \text{s-parl}(T_{JZ}^{L}))$ [dowód na podstawie tego, że dla dowolnego JZ regułami strukturalnie paralogicznymi są reguły RKP_{JZ} oraz RIP_{JZ}, dla $S5_{JZ}=(\mathcal{AX}_{JZ} \cup AS5_{JZ}, \mathcal{R}_{JZ})$].

Zgodnie z warunkiem W1, definicjami: def21, def25 oraz lematami: L32, L33 należy odnotować, że także dla dowolnej teorii pozalogicznej opartej na logice K_{JZ} lub $S5_{JZ}$ zarówno reguły ważne, jak i reguły wyprowadzalne w rachunku będącym podstawą formalną tej teorii, nie są w niej strukturalnie paralogiczne. Zależność opisana w lemacie L33 jest wykorzystywana przez J. Perzanowskiego w argumentacji na rzecz bezpodstawności zarzutu występowania *modal fallacy* w rozumowaniach pozalogicznych, w których używa się reguły Sleigha [Perzanowski, 1989, s. 63]. Jeśli zarzut występowania *modal fallacy* w rozumowaniach pozalogicznych odwołuje się do paralogiczności strukturalnej, to krytyka tego zarzutu odnośnie do RKP_{JZ} (przynajmniej wtedy, gdy zakładaną podstawą formalną jest K_{JZ}) dokonana przez Perzanowskiego jest z kolei nieskuteczna (por. [Perzanowski, 1989, s. 82—83]), ponieważ na mocy lematu L34 dopuszczalność reguły nie jest w ogólności wystarczającym warunkiem tego, by nie była ona strukturalnie paralogiczna. Polemika Schurza ze stanowiskiem Perzanowskiego, w której Schurz twierdzi, iż wyprowadzalność reguły nie jest warunkiem wystarczającym możliwości stosowania tej reguły poza logiką, jest chybiona, kiedy bierzemy pod uwagę pojęcie *paralogiczności strukturalnej*. Jeśli jednak stanowisko Schurza odwołuje się do pojęcia *paralogiczności punktowej*, to należy je uznać za uzasadnione. Zgodnie bowiem z wprowadzonymi definicjami i lematami mamy:

L35. $r_{JZ} \in \mathrm{Ważn}(L_{JZ}) \Rightarrow \forall_{T_{JZ}^{L}} (r_{JZ} \notin \text{t-parl}(T_{JZ}^{L}))$ [L16 (a) i (b), def14, def28];

L36. $\exists_{r_{JZ}} \exists_{T_{JZ}^{L}} (r_{JZ} \in \mathrm{Wypr}(L_{JZ})$ i $(T_{JZ}^{L} \in \boldsymbol{z\text{-}MT})$ i $r_{JZ} \in \text{t-parl}(T_{JZ}^{L}))$ [dowód: Niech JZ będzie modalnym językiem zdaniowym ze stałymi zdaniowymi: z i d. Ramą, będącą interpretacją właściwą języka JZ jest $(W,\delta^*)_{\uparrow JZ}$ gdzie: δ^* jest równoważnościowa i spójna w zbiorze $W=\{w^*,w^{**}\}$. Rozważymy teorie: T_{JZ}^{K} i T_{JZ}^{S5}, w których aksjomatami specyficznymi są zdania: z, $\Box d$. Reguła RN_{JZ} jest regułą wyprowadzalną w logikach: K_{JZ} i $S5_{JZ}$ [por. L5] ale łatwo można wskazać strukturę, w której nie dziedziczy się prawdziwości punktowej. Taką strukturą jest choćby: $M_{\uparrow JZ}$, którą wyznacza funkcja π taka, że: $\pi(z)=\{w^*\}$ oraz $\pi(d)=\{w^*,w^{**}\}$. Wówczas: $z \in SPEC_{TJZK}$ oraz $z \in SPEC_{TJZS5}$ oraz $(z,\Box z) \in RN_{JZ}$ oraz $(M_{\uparrow JZ}, w^*) \models z$ oraz $\neg((M_{\uparrow JZ}, w^*) \models \Box z)$].

L37. $\exists_{r_{JZ}} \exists_{T_{JZ}^{L}} (r_{JZ} \in \mathrm{Dop}(L_{JZ})$ i $T_{JZ}^{L} \in \boldsymbol{z\text{-}MT}$ i $r_{JZ} \in \text{t-parl}(T_{JZ}^{L}))$ [T2,L36].

Wyznaczone lematy w odniesieniu do branych pod uwagę «podejrzanych» reguł modalnych pozwalają ustalić, że:

L38. $\forall_{T_{JZ}^{L}} (RN_{JZ}, RNA_{JZ}, RS_{JZ} \notin \text{s-parl}(T_{JZ}^{L}))$ [L5,L7,L33];

L39. $\exists_{T_{JZ}^{L}}$ (($T_{JZ}^{L} \in$ ***z-MT***) oraz RN_{JZ}, RNA_{JZ}, $RS_{JZ} \in$ t-parl(T_{JZ}^{L})) [dla RNA_{JZ} dowód jest taki sam jak w L36. Dla RNA_{JZ} dowód oparty jest na przykładzie teorii $T'_{JZ}{}^{K}$ i $T'_{JZ}{}^{S5}$ (por. dowód L36), gdzie aksjomatami specyficznymi są zdania: z i $\sim d$. W strukturze: $M'_{\uparrow JZ}$, którą wyznacza funkcja π' taka, że: $\pi'(z)=\{w^{**}\}$ oraz $\pi'(d)=\{w^{*}\}$.Wówczas: $z, \sim d \in SPEC_{T'_{JZ}{}^{K}}$ oraz $z, \sim d \in SPEC_{T'_{JZ}{}^{S5}}$ oraz $(\Box(d \vee z,), \sim d, \Box z) \in RNA_{JZ}$ oraz $(M'_{\uparrow JZ}, w^{**}) \models \{\Box(z \vee d), \sim d\}$ oraz $\neg((M'_{\uparrow JZ}, w^{**}) \models \Box z)$. Dla RS_{JZ} dowód można oprzeć na przykładzie teorii: $T''_{JZ}{}^{K}$ i $T''_{JZ}{}^{S5}$, w których aksjomatami specyficznymi są zdania: z i d. W takim przypadku weźmiemy pod uwagę strukturę: $M''_{\uparrow JZ}$, gdzie funkcja π'' taka, że: $\pi''(z)=\{w^{*}\}$ oraz $\pi''(d)=\{w^{*}\}$.Wtedy: $z, d \in SPEC_{T''JZK}$ oraz $z, d \in SPEC_{T''JZS5}$ oraz $(\Box(d \to z,), d, \Box z) \in RS_{JZ}$ oraz $(M''_{\uparrow JZ}, w^{*}) \models \{\Box(z \to d), d\}$ oraz $\neg((M''_{\uparrow JZ}, w^{*}) \models \Box z)$.]

L40. (a) $\exists_{T_{JZ}^{K}}$ (RKP_{JZ}, $RIP_{JZ} \in$ s-parl(T_{JZ}^{K})) oraz (b) $\exists_{TJZK}$ (RKP_{JZ}, $RIP_{JZ} \in$ t-parl (T_{JZ}^{K}))

W dowodzie (b) można skorzystać z teorii $T'_{JZ}{}^{K}$ oraz $M'_{\uparrow JZ}$ scharakteryzowanej w dowodzie L39 dla RNA_{JZ} .

Reguła RMO_{JZ} nie jest stosowalna w teoriach tworzonych na podstawie K_{JZ} i $S5_{JZ}$, ponieważ nie jest ona dopuszczalna w tych logikach. Tak samo jest w wypadku reguł RIP_{JZ} i RKP_{JZ} oraz teorii stanowiących (jakiekolwiek) rozszerzenie logiki $S5_{JZ}$:

L41. $\forall_{TJZL}$ ($RMO_{JZ} \in$ s-parl(T_{JZ}^{L}), t-parl(T_{JZ}^{L})) [def27, def28, L12].

L42. $\forall_{TJZS5}$ (RKP_{JZ}, $RIP_{JZ} \in$ s-parl(T_{JZ}^{S5}), t-parl(T_{JZ}^{L})) [def27, def28, L10].

5. ZAKOŃCZENIE

W wyniku prowadzonych rozważań ustalone zostały niektóre związki między dwoma rodzajami paralogiczności wybranych reguł inferencji (paralogicznością strukturalną i punktową) a własnościami ważności, wyprowadzalności i dopuszczalności tych reguł na gruncie systemów modalnych K_{JZ} i $S5_{JZ}$. Prowadzone analizy dotyczyły w szczególności reguł inferencji, które w dostępnej literaturze uważa się za źródło tzw. *modal fallacy* w rozumowaniach pozalogicznych. Sformułowane definicje pozwoliły stwierdzić, że zasadność zarzutu występowania *modal fallacy* w rozumowaniach pozalogicznych na skutek stosowania określonych modalnych reguł inferencyjnych zależy od zakładanego pojęcia *paralogiczności*. Konsekwencje dokonanego rozróżnienia paralogiczności strukturalnej i punktowej okazały się szczególnie interesujące w odniesieniu do reguły Gödla (RN_{JZ}), reguły Sleigha (RS_{JZ}) oraz reguły opuszczania alternatywy z możliwością (RNA_{JZ}). Wymienione reguły nie są paralogiczne strukturalnie w żadnej teorii pozalogicznej opartej na rachunkach K_{JZ} i $S5_{JZ}$. Ich zastosowanie do niektórych rozumowań pozalogicznych jest jednak powodem *modal fallacy* w tym znaczeniu, że reguły te są paralogiczne punktowo na gruncie niektórych nietrywialnych rozszerzeń zdaniowych systemów K_{JZ} i $S5_{JZ}$. Sytuacja paralogiczności punktowej tych reguł w ogólności pojawia się w wypadku każdej wyprowadzalnej w branych pod uwagę rachunkach reguły inferencji, która nie jest w tych rachunkach ważna. Zgodnie z tym, co zostało powiedziane, możliwość stosowania poza logiką takich reguł zależy więc od tego, jaki rodzaj prawdziwości ma być dziedziczony z przesłanek pozalogicznych (tj. aksjomatów specyficznych danej teorii) przez wniosek. Gdy przesłankom tym przypiszemy prawdziwość w świecie możliwym jakiejś struktury a nie prawdziwość w strukturze, pojawia się ryzyko błędu — wnioski nie dziedziczą prawdziwości w świecie możliwym. Należy przy tej okazji zwrócić uwagę na to, że ogólne rozstrzygnięcie, na mocy którego przyjmiemy, że aksjomatom specyficznym dowolnej teorii pozalogicznej będziemy przyporządkowywać prawdziwość w strukturach światów możliwych opartych na ramie będącej interpretacją właściwą języka tej teorii, zabezpiecza przed paralogizmem modalnym, ale z drugiej strony (przynajmniej w pewnym sensie) banalizuje pojęcie *konieczności.* Jeśli bowiem aksjomaty specyficzne mają być prawdziwe w jakiejś strukturze, to są one prawdziwe w każdym możliwym świecie tej struktury, z czego wynika, że prawdziwe są wyrażenia otrzymane z tych aksjomatów przez poprzedzenie ich znakiem konieczności (por. defl1, defl2). Wydaje się, że przynajmniej w wypadku niektórych rodzajów teorii pozalogicznych nie jest dopuszczalne takie rozumienie *konieczności.* (Być może opisany sens *konieczności* można by przypisywać niektórym teoriom filozoficznym — np. teoriom ontologicznym lub aksjologicznym, ale wydaje się, że nie byłby on dopuszczalny w wypadku teorii empirycznych). Przypisywanie aksjomatom specyficznym teorii pozalogicznej prawdziwości w jakimś świecie możliwym jakiejś struktury powoduje, że nie możemy stosować tych reguł wyprowadzalnych, które nie są ważne w zakładanej logice bez ryzyka otrzymania fałszywego wniosku przy prawdziwych przesłankach. Jak się jednak wydaje sytuacja ta nie jest bez wyjścia. Zbiory tez logik K_{JZ} i $S5_{JZ}$ można bowiem tak zaksjomatyzować, aby wszystkie reguły pierwotne były również ważne w tych logikach.[34] Wówczas ważność reguł pierwotnych byłaby dziedziczona przez wszystkie reguły wyprowadzalne i dlatego można by je stosować w rozumowaniach pozalogicznych bez ryzyka popełnienia paralogizmu modalnego w każdym ze wskazanych znaczeń. Jednym ze sposobów wyznaczenia zbiorów tez logik: K_{JZ} i $S5_{JZ}$, w którym korzysta się jedynie z ważnych reguł pierwotnych (eliminuje się ze zbioru reguł pierwotnych dopuszczalną, ale nie ważną regułę Gödla) jest taka aksjomatyzacja jak podano to w definicji def9 dla systemów K i S5, wyznaczona przez tzw. koniecznościowe domknięcia odpowiednich wyrażeń zdaniowych. Tak zaksjomatyzowane zbiory tez rozważanych rachunków można rozszerzać istotnie o dowolne (niesprzeczne) zbiory aksjomatów specyficznych bez obawy popełnienia paralogizmu modalnego. Przy takim ujęciu pojęcie *konieczności* nie jest banalne — jedynie prawdziwość tez logicznych jest równoważna prawdziwości wyrażeń otrzymanych z tych tez przez dopisanie funktora konieczności. Oczywiście aksjomaty specyficzne należałoby wówczas dołączać bez ich koniecznościowego domykania.

[34] Jak wskazuje się to w [Schurz, 1994], systemy te spełniałyby wówczas odpowiednio sprecyzowane twierdzenie o dedukcji.

BIBLIOGRAFIA

Chagrov, Alexander, Zakharyaschev, Michael (1997): *Modal Logic*, Clarendon Press, Oxford, ss. 605.

Fagin, Ronal, Halpern, Joseph Y., Vardi, Mosche Y. (1992): „What is an inference rule?", *The Journal of Symbolic Logic*, vol. 57, nr 3, s. 1018—1045.

Forbes, Graeme (1985): *The Methaphysics of Modality*, Clarendon Press, Oxford, ss. 255.

Hughes, G.E., Cresswell, M.J. (1996): *A new introduction to Modal Logic*, London and New York, ss.421.

Kalish, Donald, Montague, Richard (1964): *Logic: Techniques of Formal Reasoning*, Harcourt, Brace ans World, New York.

Kripke, Saul A. (1963): „Semantical considerations on modal logic", *Acta Philosophica Fennica*, 16, s. 83—94.

Omyła, Mieczysław (1986): *Zarys logiki niefregowskiej*, PWN, Warszawa, ss.170.

Perzanowski, Jerzy (1989): *Logiki modalne a filozofia*, Uniwersytet Jagielloński, Kraków, ss.159.

Pietruszczak, Andrzej (1997): „O zbiorze możliwych światów w kracie sytuacji elementarnych" [w:] *Skłonność metafizyczna*, red. M. Omyła, WFiS Uniwersytetu Warszawskiego, s. 67—81.

Plantinga, Alvin (1985): „Self-Profile" [w:] *Alvin Planinga*, ed. by J.E.Tomberlin, P. van Inwagen, D.Reidel Publ. Comp., Dordrecht—Boston—Lancaster,s. 3—93.

Pogorzelski, Witold (1992): *Elementarny słownik logiki formalnej*, Białystok, ss. 573.

Schurz, Gerhard (1994): „Admissible versus valid rules: a case study of the modal fallacy", *The Monist*, vol. 77, nr 3, s. 376—388.

Tarski, Alfred (1930): „Fundamentale Begriffe der Methodologie der deduktiven Wissenschaften I", *Monatschefte für Math. Und Physik* 37.