Bolesław Sobociński

W sprawie dobrze skonstruowanej aksjomatyki

Filozofia Nauki 12/1, 123-136

2004

Filozofia Nauki
Rok XII, 2004, Nr 1(45)

Bolesław Sobociński

W sprawie dobrze skonstruowanej aksjomatyki

W prezentowanej pracy nie zamierzam rozważać żadnych podstawowych zagadnień metalogicznych, dotyczących teorii dedukcyjnych. Chcę tylko omówić pewne, niejako zewnętrzne własności systemów dedukcyjnych, a przy tym proponuję podjąć [s. 55] postawione zagadnienie bez wiązania moich rozważań z jakąkolwiek szczególną symboliką.[1] W obrębie tej samej teorii często mówimy, że spośród dwóch systemów aksjomatycznych, które są oparte na tych samych terminach pierwotnych i które są wzajemnie inferencyjnie równoważne ze względu na te same reguły postępowania, jeden z nich jest lepszy niż drugi, ponieważ spełnia pewne z góry ustalone wymagania, których ten drugi system nie spełnia. Tak więc jesteśmy skłonni na przykład sądzić, że jedyny aksjomat implikacyjnego rachunku zdań, odkryty przez Łukasiewicza w 1925[2]:

A1. C C C p C q p C C C C C r s t u C C s u C r u v v

ma niższą rangę w porównaniu z jedynym aksjomatem tej teorii, ustalonym przez Wajsberga w 1926:

---

[1] Wszystkie twierdzenia, którymi będę się posługiwał w roli przykładów, zostaną wyrażone za pomocą dobrze znanej symboliki Łukasiewicza lub też za pomocą nieco zmodyfikowanej symboliki Peano i Russella. Ta ostatnia została też wyjaśniona w pracy B. Sobocińskiego, *Studies in Leśniewski's Mereology*, Rocznik V Polskiego Towarzystwa Naukowego Na Obczyźnie (Londyn, 1955), s. 34-43, na którą będę się powoływał za pomocą odsyłacza: Sobociński, op. cit. W pracy tej wyjaśnione też zostało znaczenie różnych terminów mereologicznych. Określenie „D" stosowane przez Łukasiewicza znaczy to samo, co „/", tj. zastępuje pierwszą funkcję Sheffera.

[2] Co się tyczy A1 i A2 por. J. Łukasiewicz i A. Tarski, *Untersuchungen über den Aussagenkalkül*, Comptes Rendus des séances de la Societé des Sciences et des Lettres de Varsovie XXIII, Cl. III, Satz 30. Por. także M. Wajsberg, *Ein neues Axiom des Aussagenkalküls in der Symbolik von Sheffer* (Monatshefte f. Math. U. Phys., XXXIX, 1932), gdzie podane są dedukcje początkowe z A2.

A2. C C C p q C C r s t C C u C C r s t C C p u C s t

Sądzimy tak, ponieważ A1, który ma tę samą długość, co A2, jest nieorganiczny (patrz s. 129), podczas gdy A2 nie ma tej wady.

Natomiast aksjomat odkryty przez Łukasiewicza w 1936[3]:

A3. C C C p q r C C r p C s p

niewątpliwie jest lepszy niż Waisberga A2, ponieważ jest znacznie krótszy. Byłoby tak nawet wówczas, gdyby był on nieorganiczny. Jest oczywiste w oparciu o ten przykład, że zagadnienia, które nas będą interesowały w tej pracy, nie wiążą się ze strukturą wewnętrzną teorii. Ponieważ każde z tych trzech twierdzeń może zostać użyte jako jedyny aksjomat implikacyjnego rachunku zdań. Będzie nam chodziło, by tak rzec, o wymogi „**estetyczne**", które powinny by zostać spełnione przez dobrze skonstruowane systemy aksjomatów. Powinniśmy jednak pamiętać, że poprawność systemu aksjomatycznego nie zostaje naruszona w żaden sposób, jeśli te wymagania estetyczne nie są przestrzegane w całości lub w części.

Jakkolwiek zrobiono wiele w zakresie badań związanych z upraszczaniem systemów aksjomatycznych i z odkrywaniem pojedynczych i jak najkrótszych aksjomatów, to jednak, tak jak to widzę, zagadnienie dobrze skonstruowanych systemów aksjomatycznych nie zostało w pełni omówione wedle mojej wiedzy w literaturze logicznej. Leśniewski ustanowił cały szereg wymogów dotyczących dobrze skonstruowanych systemów aksjomatów, ale nigdy nie opracował ich w sposób systematyczny ani też nie omawiał ich szczegółowo w trakcie wykładów. Były one znane tylko niektórym uczniom, z którymi je omawiał przy różnych okazjach. Dlatego też uznałem, że warto zaprezentować nieco szerzej doktrynę Leśniewskiego w szczególności dlatego, że została ona milcząco przyjęta [s. 56] przez tych, którzy kontynuują rozwijanie jego systemu podstaw matematyki. W moich zamierzeniach zostałem wielce umocniony przez uwagę uczynioną ostatnio przez Profesora Churcha, który, w związku z zagadnieniem ustalania najprostszych aksjomatów, wskazał, że w badaniach tego typu nie mamy żadnej określonej metody, która by nami kierowała: „nie uczyniono nigdy nawet najmniejszej sugestii (a i recenzent także nie ma żadnej do zaproponowania) w kierunku teorii ogólnej tego zagadnienia, i w żadnym właściwym sensie. A jednak wydaje się, że warto zadać pytanie, czy nie powinno się wynaleźć takiej teorii, przynajmniej częściowej".[4] Warto odnotować, że w przypadku teorii należących do systemu Leśniewskiego, ich pojedyncze aksjomaty, które wydają się najkrótszymi z możliwych, zawsze spełniają większość wymogów ustanowionych przez Leśniewskiego i jego szkołę. Wydaje się to wskazywać, że w tych wymogach może leżeć klucz do rozwiązania problemu wysuniętego przez Churcha.

[3] Por. J. Łukasiewicz, *The shortest axiom of the implicational calculus of propositions*, Proceedings of the Royal Irish Academy, v. 52, Section A, No. 3, Dublin 1948.

[4] Por. A. Church *Review of C.A. Meredith, 'Single axioms for the systems (C, N), (C, O), and (A, N) of the two-valued propositional calculus'*. The Journal of Symbolic Logic, v. 19, pp. 143-144.

Wymagania dotyczące dobrze skonstruowanych systemów aksjomatów mogą zostać pogrupowane wedle następujących tytułów: I. Wymagania ogólne, które powinny zostać spełnione przez systemy aksjomatów każdej teorii; II. Wymagania dotyczące terminów pierwotnych systemu aksjomatycznego; III. Wymagania szczególne, dające się zastosować do systemów aksjomatów każdej teorii; IV. Wymagania szczególne, dające się zastosować do systemów aksjomatów teorii, która należy do systemu Leśniewskiego.

I. **Wymagania ogólne, które powinny zostać spełnione przez systemy aksjomatów każdej teorii.** Wymagania te są zupełnie trywialne i znane każdemu. Dotyczą one (a) spójności systemu aksjomatów, (b) jego adekwatności i (c) wzajemnej niezależności jego aksjomatów. Żaden system nie może nie spełnić wymogów wskazanych w (a) i (b).

(a) **Spójność systemu aksjomatów.** Wskazane jest odróżnienie spójności teorii i spójności jej systemu aksjomatycznego. Jest bowiem najzupełniej naturalne, że interesują nas teorie, których spójność jest bądź ustalona, bądź też założona. Może się jednak zdarzyć, że nie zauważymy, iż przyjęliśmy za aksjomat teorii takie wyrażenie, które nie należy do teorii, jakkolwiek jest sensowne w jej dziedzinie i które, wraz z pozostałymi aksjomatami, prowadzi do sprzeczności. Co więcej, możemy popaść w sprzeczności jeśli skonstruujemy system aksjomatyczny dla teorii spójnej, ale nie uda nam się dostosować reguł postępowania do własności terminów pierwotnych, które występują w systemie aksjomatycznym. Rozważmy np. aksjomat Nicoda[5]:

A4. D D p D q r D D t D t t D D s q D D p s D p s

sformułowany za pomocą jednego z funktorów Scheffera. Jak dobrze wiemy, rachunek zdań jest teorią spójną. Popadlibyśmy jednak szybko w kłopoty, gdybyśmy zastąpili A4 przez A3 i stosowali nadal regułę odrywania, traktując ją jako dostosowaną do „D". Zatem, zagadnienie spójności systemu aksjomatów teorii spójnej można zredukować do pytań następujących: czy wszystkie twierdzenia, które tworzą system aksjomatów, należą do dziedziny teorii? oraz czy reguły postępowania są dostosowane do terminów pierwotnych, które występują w systemie aksjomatów?

(b) **Adekwatność systemu aksjomatów.** Posługuję się terminem „**adekwatność**" zamiast terminu „**zupełność**", a czynię to z powodów następujących. Po pierwsze, pojęcie zupełności systemu aksjomatów było dotąd ściśle związane z zagadnieniem metalogicznym zupełności odpowiedniej teorii. Jak [s. 67] to obecnie wiemy, tylko pewne odmiany teorii dedukcyjnych mogą być zupełne. W rezultacie, odwieczne dążenie ku zupełnym systemom aksjomatów, tj. systemom aksjomatów dostatecznie mocnych do implikowania każdego prawdziwego zdania teorii, jest po prostu nierealistyczne w przypadku teorii, które są zasadniczo niezupełne. Zatem nasz wymóg adekwatności powinien być rozumiany w ten sposób: jeśli dana teoria jest zupełna, w takim czy innym sensie, wówczas każde twierdzenie należące do teorii powinno

[5] Por. J. Nicod *A reduction in the number of primitive propositions of logic*. Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, v. 19 (1917-20).

być wywodliwe z przyjętego systemu aksjomatów; jeśli zaś, z drugiej strony, teoria okazuje się być zasadniczo lub z zamierzenia niezupełną, wówczas wszystkie twierdzenia prawdziwe i pożądane powinny być wywodliwe z systemu aksjomatów. Po drugie, możemy nie chcieć skonstruowania teorii zupełnej. Często się zdarza, że teorie częściowe lub z zamierzenia niezupełne są dla nas bardziej użyteczne niż teorie mocniejsze. W takich przypadkach nie wydaje się rzeczą właściwą mówienie o „**zupełnych**" systemach aksjomatów.

(c) **Wzajemna niezależność aksjomatów**. Zgodnie z tym raczej trywialnym wymogiem, dobrze skonstruowany system aksjomatów nie powinien zawierać żadnego aksjomatu, który wynika z pozostałych, na mocy reguł postępowania dostępnych w teorii. Jest zupełnie jasne, że nie narażamy się na trudności, jeśli nie uwzględniamy tego wymogu. A w rzeczywistości, dla celów heurystycznych, jest czymś prawomocnym używanie systemu aksjomatów składających się z twierdzeń, które nie są wzajemnie niezależne. Czujemy jednak, że żadne rozwodnienie nie powinno być dopuszczalne w dobrze skonstruowanym systemie aksjomatów.

Trzy wymogi, które właśnie omówiliśmy, można uznać za podstawowe. Wszelkie dalsze wymagania są tylko wynikami drobiazgowej analizy podanych powyżej wymogów (b) i (c).

II. **Wymagania dotyczące terminów pierwotnych systemu aksjomatycznego**. Przez terminy pierwotne teorii rozumiem stałe, które występują w systemie aksjomatów i które nie należą do żadnej z zakładanych wcześniej teorii. Jak dobrze wiemy, w każdej teorii dostatecznie rozwiniętej mamy do dyspozycji szereg stałych, które mogą być użyte jako terminy pierwotne i dla których możemy ustanowić odpowiednie aksjomaty. Wybierając terminy pierwotne dla danej teorii, możemy się kierować różnymi względami, lecz jesteśmy ograniczeni w naszym wyborze przez pierwszy z podanych poniżej wymogów. Wymóg drugi i trzeci, a być może i czwarty oraz piąty, także powinny być spełnione, jeśli chcemy mieć dobrze skonstruowany system aksjomatów.

(a) **Adekwatność terminów pierwotnych**. Na pierwszym miejscu musimy się upewnić, że za pomocą naszych terminów pierwotnych możemy skonstruować system adekwatny aksjomatów dla teorii. Wymóg jest tak oczywisty, że nie ma potrzeby dodawania żadnych dalszych uwag. Nie jest on spełniony przez funktory „C" i „K", ponieważ za ich pomocą nie możemy uzyskać adekwatnego systemu aksjomatów dla klasycznego rachunku zdań.

(b) **Wzajemna niezależność terminów pierwotnych**. Jeśli w systemie aksjomatów teorii występuje szereg terminów pierwotnych, powinniśmy wykazać, że na mocy reguł postępowania żaden z tych terminów nie da się zdefiniować za pomocą pozostałych. Wymóg ten jest podobny do wymogu dotyczącego wzajemnej niezależności aksjomatów i znany był już od Padoa.[6] Daje on wyraz tendencji unikania niepotrzebnych założeń wcześniejszych.

---

[6] Por. A. Padoa, *Essai d'une théorie algébraiques des nombres entiers, précédé d'une introduction logique à une théorie deductive quelconque*, Bibliothèque du Congrès International de

(c) **Wyłączność terminów pierwotnych**. Ten wymóg był pierwszym, którego znaczenie uwypuklił Łukasiewicz. Akceptowany był bez zastrzeżeń przez Leśniewskiego. Wymóg ten postuluje, aby żaden termin definiowany nie był używany do [s. 58] formułowania systemu aksjomatów. Definicje mogą być wprowadzane do teorii dopiero po ustanowieniu w pełni systemu aksjomatów. W systemie Leśniewskiego jedynym wyjątkiem od tej zasady są *quasi*-aksjomatyczne twierdzenia, które mogą być dołączane do systemu na mocy specjalnych reguł postępowania, takich jak np. reguła ekstensjonalności. Z omawianego wymogu wynika, że dobrze skonstruowany system aksjomatów powinien zostać sformułowany za pomocą terminów pierwotnych teorii. Wszelkie krótsze lub bardziej intuicyjne odpowiedniki aksjomatów, sformułowane za pomocą terminów zdefiniowanych, mogą wystąpić w teorii jako twierdzenia wydedukowane z aksjomatów. Zarówno Łukasiewicz, jak i Leśniewski przywiązywali wielkie znaczenie do omawianego wymogu, jakkolwiek jest on pomijany przez wielu autorów.[7] Uczynili tak nie tylko ze względów estetycznych, lecz także z pewnych względów teoretycznych. Przejrzystość, jaką uzyskujemy, stosując terminy zdefiniowane do celów formułowania systemu aksjomatów, jest myląca. W rzeczywistości, skrywa to tylko właściwą strukturę aksjomatów, co może prowadzić do nieporozumień, ponieważ w takich przypadkach dołączamy definicję nie do całego systemu, lecz do jego części. W teoriach Leśniewskiego wyłączność terminów pierwotnych jest zabezpieczana przez reguły postępowania.

(d) **Jedyność terminu pierwotnego**. Dobrze skonstruowany system aksjomatów powinien być oparty na jedynym terminie pierwotnym, chyba że teoria jest tak słaba, iż nieosiągalne są jedyne terminy pierwotne w jej dziedzinie. W takim przypadku system aksjomatów powinien zostać oparty na możliwie najmniejszej liczbie wzajemnie niezależnych terminów pierwotnych. Wymóg ten został wymuszony na Leśniewskim, który sformułował go w związku z pewnymi wynikami uzyskanymi przez Nicoda. Wymóg ten podkreśla tendencję redukowania nieistotnych założeń uprzednich i, jak praktyka pokazała, gwarantuje najprostsze i najkrótsze systemy aksjomatów. Wszystkie główne teorie rozwinięte przez Leśniewskiego są oparte na odpowiednich jedynych terminach pierwotnych. Lecz wymóg ten nie ma charakteru absolutnego. Dla celów analizy podstaw jakiejś teorii często konstruujemy system aksjomatów, w którym występuje szereg wzajemnie niezależnych terminów pierwotnych. Co więcej, wymóg ten jest słabszy niż wymóg dotyczący długości aksjomatów. Zgodnie z koncepcją Leśniewskiego, z dwu aksjomatów inferencyjnie równoważnych, krótszy z nich jest lepszy, nawet gdyby zawierał więcej różnych terminów

Philosophie, v. 3 (1901), s. 309-365.

[7] Przykładem klasycznym niespełnienia tego wymogu jest system aksjomatów rachunku zdań w „Principia Mathematica", v. 1, s. 91-97. Negacja i alternatywa są tam używane jako terminy pierwotne, ale implikacja występuje w aksjomatach. Jest ona definiowana przedtem, nim ustanowione są aksjomaty. Jak dobrze wiemy, system aksjomatów Principia nie jest niezależny, ponieważ aksjomat *1.5 wynika z pozostałych. Por. P. Bernays, *Axiomatische Untersuchungen des Aussagenkalküls der 'Principia Mathematica'*, Math. Z., v. 25 (1926), s. 305-320.

pierwotnych niż dłuższy aksjomat. Tak na przykład, jedyny aksjomat klasycznego rachunku zdań, ustalony przez Mereditha[8]

A5. C C C C C p q C N r N s r t C C t p C s p

jest lepszy niż Nicoda A4, ponieważ jest krótszy. Lecz twierdzenie równie długie lub krótsze, które mogłoby zostać użyte jako jedyny aksjomat dla „D", byłoby jeszcze lepsze.

(e) **Prostota terminów pierwotnych**. To pojęcie zostało wprowadzone przez Leśniewskiego. Jego definicja precyzyjna jest dziełem Lindenbauma.[9] Ujmując ją nieformalnie, [s. 59] o funktorze A mówi się, że jest prostszy niż funktor B, jeśli spełniony jest co najmniej jeden z następujących warunków: 1) liczba argumentów wymaganych przez A jest mniejsza niż liczba argumentów wymaganych przez B; 2) liczba argumentów wymaganych przez którykolwiek z funktorów jest ta sama, lecz co najmniej jeden z argumentów A jest niższego typu logicznego niż każdy argument B, podczas gdy żaden z argumentów A nie jest wyższego typu logicznego niż dowolny argument B; w przypadku teorii należących do systemu Leśniewskiego, i ogólnie, w przypadku teorii, w których imiona własne i imiona pospolite są uważane za wyrażenia tego samego typu logicznego (kategorii semantycznej), dochodzi jeszcze dodatkowy warunek alternatywny: 3) liczba argumentów wymaganych przez którykolwiek z funktorów jest ta sama, lecz liczba argumentów A, które są indywiduami, jest większa niż liczba argumentów B, które są indywiduami, podczas gdy żaden z argumentów A nie należy do wyższego typu logicznego niż którykolwiek z argumentów B. Zgodnie z powyższymi warunkami możemy powiedzieć, że spośród trzech terminów mereologicznych, el(A), Kl(a) i Cmpl(AC),[10] pierwszy jest prostszy niż drugi, który z kolei jest prostszy niż trzeci. Zarówno „el" jak i Kl" wymagają każdy jednego argumentu, podczas gdy „Cmpl" wymaga dwu argumentów, a co więcej, jedyny argument „el" jest indywiduum, podczas gdy jedyny argument „Kl" nie musi być takim.

Jeśli więc w dziedzinie danej teorii mamy dwa systemy aksjomatów, które są tej samej długości (tj. które składają się z tej samej liczby funkcji elementarnych) i które są oparte na dwu różnych terminach pierwotnych, mówimy, że ten system aksjomatów jest lepszy, którego jedyny termin pierwotny jest prostszy. Tak na przykład, spośród dwu jedynych aksjomatów mereologii w ujęciu Lejewskiego[11], E2 i E4 (patrz Dodatek, § 1), które składają się z tej samej liczby funkcji elementarnych, E4 jest lepszy niż E2, ponieważ funktor „ov" jest prostszy niż funktor „Kl". W celu ustano-

---

[8] Por. C. A. Meredith, *Single axioms for the system (C, N), (C, O) and (A, N) of the two-valued propositional calculus*, The Journal of Computing Systems, v. 1, s. 155-164.

[9] Por. A. Lindenbaum, *Sur la simplicité formelle des notions*, Actes du Congrès International de Philosophie Scientifique, VII Logique, Paris 1936.

[10] Jeśli chodzi o znaczenie tych terminów, patrz Sobociński, *op. cit.*

[11] Por. Sobociński, *op. cit.*, a także C. Lejewski, *A Contribution to Leśniewski's Mereology*, s. 43-50.

wienia najkrótszych z możliwych aksjomatów, wymóg dotyczący prostoty terminu pierwotnego ma znaczenie niewielkie.

III. **Wymagania szczególne, dające się zastosować do systemów aksjomatów dowolnej teorii.** Wyliczone poniżej wymogi można stosować do systemów aksjomatów dowolnej teorii, niezależnie od tego, czy należy, czy też nie należy do systemu Leśniewskiego.

(a) **Długość systemu aksjomatów**. Mówimy, że dwa systemy aksjomatów danej teorii mają tę samą długość, jeśli, sformułowane w tej samej symbolice, składają się z tej samej liczby symboli. Nawiasy, symbole kwantyfikatorów i zmienne w kwantyfikatorach nie liczą się. Zgodnie z tą konwencją o aksjomatach Lejewskiego E2 i E4 można powiedzieć, że są tej samej długości, jakkolwiek liczba zmiennych w kwantyfikatorach E2 przewyższa o jeden liczbę zmiennych w kwantyfikatorach E4.

Zatem, z dwu systemów aksjomatów opartych na tym samym terminie pierwotnym lub na tych samych terminach pierwotnych ten jest lepszy, który jest krótszy. Tak więc, na przykład A3 jako jedyny aksjomat implikacyjnego rachunku zdań jest lepszy niż A2.

(b) **Liczba różnych zmiennych**. Z dwu systemów aksjomatów, które są oparte na tym samym terminie pierwotnym lub na tych samych terminach pierwotnych i które są tej samej długości, ten jest lepszy, w którym liczba różnych zmiennych (czy to wolnych, czy związanych) jest mniejsza. Tak więc, na przykład, jedyny aksjomat klasycznego rachunku zdań odkryty przez Łukasiewicza[12] [s. 60]

A6. D D p D q r D D s D s s D D s q D D p s D p s

jest lepszy niż Nicod'a A4. Oba aksjomaty są tej samej długości, ale w A6 występują przypadki czterech różnych zmiennych, podczas gdy pięć różnych zmiennych występuje w A4.[13]

(c) **Organiczność systemu aksjomatów**. Pojęcie twierdzenia organicznego zostało wprowadzone przez Leśniewskiego. Jego definicję zawdzięczamy Wajsbergowi.[14] Mówimy, że twierdzenie jest organiczne, jeśli nie zawiera żadnego członu, który bądź jest twierdzeniem, bądź też staje się twierdzeniem, gdy tylko jego zmienne zostaną związane przez odpowiedni kwantyfikator. W świetle powyższego, aksjomat Łukasiewicza A1 nie jest twierdzeniem organicznym, ponieważ jego dwa człony:

C p C q p oraz C C C C r s t u C C s u C r u

---

[12] Por. J. Łukasiewicz, *Uwagi o aksjomacie Nicod'a i o 'dedukcji uogólniającej'*, Księga pamiątkowa Polskiego Towarzystwa Filozoficznego we Lwowie, Lwów 1931.

[13] Nie należy mylić tego wymogu z zagadnieniem, które polega na znalezieniu najmniejszej liczby **n** takiej, że dla danej teorii można skonstruować system aksjomatów, którego każde twierdzenie zawiera co najwyżej **n** zmiennych, zarówno równokształtnych, jak i nierównokształtnych. Dla rachunku zdań **n** = 5, por. B. Sobociński, *Note on a problem of Paul Bernays*, The Journal of Symbolic Logic, v. 20 (1955), s. 109-114.

[14] Por. Łukasiewicz-Tarski, *op. cit.*, Satz 9.

same są twierdzeniami. Podobnie E3 (patrz Dod. § 2), który, jak to wykazał Lejewski, może być użyty jako jedyny aksjomat dla funktora mereologicznego „extr", nie jest organiczny.[15]

Zgodnie z wymogiem organiczności, każde twierdzenie dobrze skonstruowanego systemu aksjomatów powinno być organiczne. Wymóg ten ma bardzo wielkie znaczenie. Często zdarza się tak, że jeśli dla pewnego terminu pierwotnego dostatecznie mocnej teorii mamy szereg systemów aksjomatycznych, z których najkrótszy jest nieorganiczny, to istnieje prawie pewność, że można będzie znaleźć aksjomat organiczny, który będzie jeszcze krótszy.

(d) **Wymóg dotyczący liczby aksjomatów**. Jedną z istotnych właściwości dobrze skonstruowanego systemu aksjomatów jest to, że powinien on się składać z jedynego aksjomatu. W rzeczywistości jest to zagadnienie naczelne w rozważaniach nad własnościami „estetycznymi" systemu aksjomatów. Nicod pierwszy pokazał, że można oprzeć całą teorię na jedynym aksjomacie.[16] Odtąd inni logicy podejmowali szereg prób wieńczonych sukcesami w konstruowaniu jedynych aksjomatów dla różnych teorii. Pojęcie jedynego aksjomatu nie powinno być rozumiane w sensie absolutnym. Zgodnie z koncepcją Leśniewskiego, którą przyjmujemy, należy rozróżnić trzy odmiany podstawowe aksjomatów: aksjomaty właściwe, aksjomaty wynikające z reguł postępowania i aksjomaty egzystencjalne. Przez aksjomaty właściwe rozumiemy twierdzenia, które wysuwamy na czoło teorii, z których nie możemy wydedukować, że coś istnieje. Twierdzenia, które w systemie Leśniewskiego dotyczą ekstensjonalności, mogą służyć za przykłady aksjomatów wynikających z reguł postępowania. Aksjomatów tego rodzaju powinno być nieskończenie wiele, w przeciwnym razie moglibyśmy je wysunąć w roli aksjomatów właściwych, eliminując w ten sposób odpowiednią regułę postępowania. Aksjomaty egzystencjalne zakładają istnienie pewnych przedmiotów. Tutaj za przykład może służyć aksjomat nieskończoności. Wedle Leśniewskiego, wszelkie aksjomaty, niezależnie od ich odmiany, powinny być formułowane za pomocą terminów pierwotnych teorii, ale dobrze skonstruowany system aksjomatów teorii powinien się składać, jeśli to możliwe, z jedynego aksjomatu właściwego. Jest najzupełniej jasne, że system aksjomatów nie może zawierać aksjomatów, które wynikają z reguł postępowania, ponieważ takich aksjomatów jest nieskończenie wiele. Co się tyczy aksjomatów egzystencjalnych, Leśniewski nie dopuściłby ich do systemu aksjomatów na tej podstawie, że teoria dedukcyjna, a w szczególności teoria logiczna, powinna być [s. 61] neutralna, tj. nie powinna przesądzać, jaka odmiana przedmiotów istnieje i ile jest ich w świecie. Oczywiście, możemy badać teorie wzmocnione przez różne założenia egzystencjalne, jasno jednak trzeba odróżnić od tego podstawę teorii, jako cechującą się nieegzystencjalnymi aksjomatami właściwymi.

Jeśli system zakładany przez daną teorię i sama ta teoria są dostatecznie mocne, i jeśli jej system aksjomatów składa się ze skończonej liczby aksjomatów właści-

[15] Por. Sobociński, *op. cit.*, s. 38 i Lejewski, *op. cit.*, s. 43.
[16] Por. Nicod, *op. cit.*

wych, to z zasady jest możliwe skonstruowanie jedynego aksjomatu dla tej teorii. Nie konstruujemy go mechanicznie, tworząc koniunkcję wszystkich aksjomatów, lecz próbujemy znaleźć jedyny aksjomat, który w pierwszym rzędzie spełnia wymóg organiczności. Doświadczenie pokazuje, że jeśli możemy skonstruować jedyny aksjomat, który nie jest tylko zestawieniem twierdzeń, to jest bardziej prawdopodobne niż coś przeciwnego, że można będzie znaleźć jedyny aksjomat z tymi samymi terminami pierwotnymi, który jest krótszy niż dowolny system aksjomatów składający się z kilku aksjomatów i oparty na tych samych terminach pierwotnych.

Podsumowując, dobrze skonstruowany system aksjomatów składa się z jedynego aksjomatu właściwego, który powinien być twierdzeniem organicznym najkrótszym z możliwych, opartym na jedynym terminie pierwotnym i spełniającym wymóg najmniejszej liczby różnych zmiennych.

IV. **Wymagania szczególne, dające się zastosować do systemów aksjomatów teorii, która należy do systemu Leśniewskiego.** Wszystkie omówione powyżej wymagania dotyczą teorii w systemie Leśniewskiego. Dodatkowo podać można jeszcze dalsze wymagania, które wynikają z pewnych specyficznych własności systemu. W formie zmienionej, wymagania te mogą także być stosowane do dowolnej innej teorii. Warto odnotować, że jedyne aksjomaty, które spełniają wymagania typowe dla systemu Leśniewskiego, z reguły są bardzo krótkie i zupełnie intuicyjne.

W tej części omówionych zostanie pięć wymogów.

(a) **Wymóg dotyczący kategorii semantycznych.** System Leśniewskiego różni się od innych systemów tym, że nie podaje żadnych wyszczególnień dotyczących kategorii semantycznych (lub typów logicznych), do których wyrażenia systemu mogą należeć. Zamiast takiego wyszczególnienia, które bardzo często cierpi na brak precyzji, reguły postępowania ustalają, w jaki sposób można wprowadzić nową kategorię semantyczną do teorii. Każde wyrażenie występujące w systemie aksjomatów teorii, za wyjątkiem nawiasów i kwantyfikatorów, należy do określonej kategorii semantycznej, która jest zaliczana do pierwotnych kategorii semantycznych teorii. W celu wprowadzenia nowej kategorii semantycznej wraz z jej odpowiednimi zmiennymi, musimy zdefiniować najpierw termin stały należący do tej kategorii. Warunek dotyczący kategorii semantycznych wymaga, aby liczba różnych pierwotnych kategorii semantycznych teorii była najmniejszą z możliwych. Wymóg ten ma pierwszeństwo nawet przed wymogiem dotyczącym długości systemów aksjomatów. Jeśli jednak przestrzegamy stale tego wymogu, to ostatecznie uzyskujemy bardzo krótkie aksjomaty. W celu zilustrowania prezentowanych rozważań, posłużę się moim systemem aksjomatów dla prototetyki, składającym się z Ł1 i B1 (patrz Dod. § 3).[17] W tym

[17] Por. B. Sobociński, *Z badań nad aksjomatyką prototetyki Stanisława Leśniewskiego*, „Rocznik IV Polskiego Towarzystwa Naukowego na Obczyźnie", Londyn 1954, s. 18-20. Por. także J. Słupecki, *St. Leśniewski's Protothetics*. „Studia Logica", v. 1, Warszawa 1953, s. 99, i A. Grzegorczyk, *The systems of Leśniewski in relation to contemporary logical research*, ibidem, v. 2, Warszawa 1954, s. 82. Sformułowanie B1 przez Słupeckiego różni się nieco, lecz jest równoważne infe-

systemie aksjomatów mamy następujące kategorie semantyczne: zdania, funktory tworzące zdania dla dwóch argumentów, z których każdy jest zdaniem i, w B1, mamy funktor zmienny, który tworzy zdanie [s. 62] i wymaga jednego argumentu zdaniowego. Zgodnie z omawianym wymogiem, uzyskujemy lepszy system aksjomatów gdy zastąpimy B1 przez B2 (patrz Dod. § 4), w którym kategoria funktorów tworzących zdanie dla jednego argumentu zdaniowego została wyeliminowana.

Nie należy mylić wymogu dotyczącego kategorii semantycznych z zagadnieniem konstruowania **elementarnych** systemów aksjomatów dla danej teorii, tj. systemów aksjomatów ze zmiennymi typu logicznego najniższego z możliwych. Aksjomaty mereologii, E2 i E4, nie są elementarne, ponieważ można skonstruować systemy aksjomatów dla tej teorii bez użycia zmiennych kategorii semantycznej, do której należy zmienna „f" w tych dwu aksjomatach. Jeśli chcielibyśmy mieć teorie elementarne w systemie Leśniewskiego, to powinniśmy zmienić nieco jego reguły postępowania.

(b) **Kanoniczność aksjomatów**. Wymóg ten dotyczy zarówno aksjomatów właściwych, jak i aksjomatów wynikających z reguł postępowania. Co się tyczy tych ostatnich, to żąda się, aby miały one formę standardową, ustaloną raz na zawsze przez odpowiednią regułę postępowania. System aksjomatów właściwych jest kanoniczny, jeśli składa się z pojedynczego aksjomatu, który spełnia warunki następujące: 1) jest oparty na pojedynczym terminie pierwotnym; 2) ma postać równoważności, której lewa część jest wyrażeniem typu „F(a b c ...)", gdzie „F" jest funktorem tworzącym zdanie, lub typu „A jest F(a b c ...)", gdzie „F" jest funktorem tworzącym nazwę, natomiast „A", „a", „b", „c" itd. są zmiennymi; 3) w kwantyfikatorze na początku aksjomatu występują tylko te zmienne, które występują po lewej stronie równoważności. Krótko, jeśli chodzi o kształt, to aksjomat kanoniczny przypomina definicje u Leśniewskiego. Warto odnotować, że wymóg kanoniczności gwarantuje aksjomaty najkrótsze i najbardziej intuicyjne dla wszystkich teorii, które mogą być oparte na systemie logiki Leśniewskiego. E2, E3 i E4 (patrz Dod. §§ 1 i 2) są przykładami aksjomatów kanonicznych, ale aksjomat Leśniewskiego dla prototetyki, Ah (patrz Dod. § 5),[18] jest tylko quasi-kanoniczny, ponieważ nie spełnia podanego powyżej warunku 3.

(c) **Wymóg dotyczący jednorodności ontologicznej systemów aksjomatów**. Ten wymóg nie stosuje się do prototetyki lub ontologii, lecz obowiązuje w stosunku do każdej teorii, która zakłada ontologię. Stwierdza on, że jakkolwiek wolno nam używać dowolnej stałej prototetycznej w celu konstruowania systemów aksjomatów, to jedynym funktorem ontologicznym, który może być używany w związku z tym, jest ten, który gra rolę terminu pierwotnego w przyjętym aksjomacie ontologii. Jest to wymóg konieczny, ponieważ w przeciwnym wypadku zagadnienie znalezienia jedynych i najkrótszych aksjomatów straciłoby swe znaczenie. Załóżmy bowiem, że „S^1

---

rencyjnie w stosunku do sformułowania podanego w tej pracy i w mojej pracy cytowanej powyżej. Żaden z autorów nie wymienia mojego nazwiska w związku z tym systemem aksjomatów.

[18] Por. S. Leśniewski, *Grundzüge eines neuen Systems der Grundlagen der Mathematik*, Fundamenta Mathematicae, v. 14 (1929), s. 59, a także moją pracę wymienioną w przypisie 17.

(f g h)", „S^2 (f g h)" itd., reprezentują system aksjomatów teorii, natomiast litery „f", „g" i „h" są jego terminami pierwotnymi. Zatem, zgodnie z regułami postępowania dla ontologii, możemy wprowadzić definicję typu D1 (patrz Dod. § 6), gdzie „S^1" i „S^2" itd. reprezentują odpowiednio rozwinięte wyrażenia. Gdy tylko mamy tego typu definicję w ontologii, to możemy przyjąć wyrażenie „G(f g h)" w roli jedynego aksjomatu naszej teorii, ponieważ jest oczywiste, że z tego wyrażenia i z tej definicji natychmiast wynikają aksjomaty wyjściowe.[19] [s. 63]

Aksjomaty E2, E3 i E4 (patrz Dod. §§ 1 i 2) spełniają wymóg jednorodności ontologicznej. Nie jest tak w przypadku twierdzenia F1 (patrz Dod. § 7), które zakomunikował mi ostatnio dr Lejewski, a które także implikuje wszystkie twierdzenia mereologiczne.[20]

(d) **Niezależność wewnętrzna jedynych aksjomatów**. Ten wymóg nie stosuje się do prototetyki. Zawiera żądanie, aby wszystkie twierdzenia, które można wywieść z jedynego aksjomatu kanonicznego na mocy logiki zdań lub praw dotyczących użycia kwantyfikatorów, były wzajemnie niezależne. Aksjomat ontologii, ustanowiony przez Leśniewskiego w 1920, nie spełnia tego wymogu, podczas gdy aksjomat ostateczny, który odkrył w roku 1929, spełnia ten wymóg (patrz Dod. § 8).[21]

(e) **Niezależność zewnętrzna jedynych aksjomatów**. Ten wymóg, który dodałem do wymogów wysuniętych przez Leśniewskiego, żąda, aby żadne twierdzenie, wywiedzione z jedynego aksjomatu kanonicznego w sposób opisany w punkcie (d), nie było wynikiem zastosowania reguły podstawiania do twierdzenia należącego do którejkolwiek z założonych uprzednio teorii. E2 (patrz Dod. § 1) może służyć za przykład aksjomatu, który nie spełnia tego wymogu (patrz Dod. § 9). Przykładem pozytywnym jest mój aksjomat mereologii, E1 (patrz Dod. § 1),[22] który jest kanoniczny i który spełnia zarówno wymóg niezależności wewnętrznej, jak i wymóg niezależno-

---

[19] Wymóg dotyczący jednorodności ontologicznej systemów aksjomatów był przestrzegany ściśle przez Leśniewskiego. Używał on funktora „=" w aksjomacie dla teorii grup, a także w swym aksjomacie dla teorii grup abelowskich (patrz Dod. § 6), ponieważ nie chciał uzależniać tych teorii od ontologii. Funktor „=" mógłby zostać łatwo wyeliminowany za pomocą funktora pierwotnego ontologii. Wspomniane właśnie aksjomaty zostały opublikowane przez Leśniewskiego w jego pracy, *Über Funktionen, deren Felder Gruppen mit Rücksicht auf diese Funktionen sind*, [s. 63] Fundamenta Mathematicae, v. 13, s. 319-332 i w *Über Funktionen, deren Felder Abelsche Gruppen in bezug auf diese Funktionen sind*, v. 14, s. 242-251.

[20] Co się tyczy znaczenia terminu „dscr" cf. Sobociński, *op. cit.*, s. 37, definicja D10.

[21] Szczegółowe omówienie tych aksjomatów por. B. Sobociński, *O kolejnych uproszczeniach aksjomatyki 'ontologii' Prof. St. Leśniewskiego*, Księga Pamiątkowa ku uczczeniu 15-lecia pracy nauczycielskiej w Uniwersytecie Warszawskim Prof. Tadeusza Kotarbińskiego, Warszawa 1934, s. 143-160.

[22] Por. Sobociński, *op. cit.*, s. 38 Lejewski, *op. cit.*, s. 43 i B. Sobociński, *L'analyse de l'antinomie russelien par Leśniewski*, Methodos, vol. 1-2, v. 2, Milano 1949-1950, s. 257. Nie zawsze można osiągnąć niezależność zewnętrzną poszczególnych aksjomatów. Aksjomaty Leśniewskiego, podane w Dod. § 11 nie spełniają tego wymogu.

ści zewnętrznej. To samo można powiedzieć o aksjomacie mereologii podanym przez Leśniewskiego, opartym na funktorze „extr" (patrz Dod. § 10).

Celem tych długich i pedantycznych rozważań było rzucenie pewnego światła na różne wymogi, które, w przekonaniu Leśniewskiego i jego następców, powinny być spełnione przez dobrze skonstruowane aksjomaty teorii należących do jego systemu. Jak już o tym poprzednio wspomniałem, wymagania te należy rozpatrywać raczej z punktu widzenia estetyki lub ładu niż z punktu widzenia jakiejkolwiek teorii metalogicznej. Uważałem, że warto przedstawić to zagadnienie w sposób systematyczny, ponieważ może się to przyczynić do lepszego zrozumienia pewnych uwag, które są czynione w pracach nawiązujących do logiki Leśniewskiego. Co więcej, prezentowane rozważania mogą się okazać pomocne dla logików, którzy interesują się badaniami podstaw aksjomatycznych teorii.

DODATEK

Z racji pozostających poza zasięgiem wpływu autora, wszystkie twierdzenia, sformułowane w zmienionej symbolice Peano-Russella, powinny zostać usunięte z tego, co następuje i umieszczone w tym Dodatku. [s. 64].

§1. E1 [A B] :::: A ε el(B) . ≡ ::·: B ε B ::·: [f a] ::: [C] :: C ε f(a) . ≡ ∴ [D]: D ε a . ⊃ . D ε el(C) ∴ [D] : D ε el(C) . ⊃ . [∃ E F] . E ε a . F ε el(D) . F ε el(E) :·: B ε el(B) . B ε a :·: ⊃ . A ε el(f(a))

E2 [A a] ::: A ε Kl(a) . ≡ :·: A ε A :·: [f] :: [B C] : B ε f(C) . ≡ . [∃ d] . B ε d . C ε Kl(d) ∴ A ε Kl(A) ∴ ⊃ ∴ [B b] : B ε a . A ε b . ⊃ . B ε f(Kl(b)) ∴ [B] : B ε f(A) . ⊃ . [∃ C D] . C ε a . D ε f(B) . D ε f(C)

E4 [A B] :::: A ε ov(B) . ≡ ::·: A ε A . B ε B ::·: [f] ::: [D a] :: D ε f(a) . ≡ ∴ D ε D ∴ [E] : D ε ov(E) . ≡ . [∃ F] . F ε a . F ε ov(E) :·: B ε ov(B) :·: ⊃ :: [∃ C] :: [b] ∴ A ε b . ∨ . B ε b : ⊃ . [∃ d] . C ε d . f(b) ε f(d)

§2. E3 [A b] :::: A ε extr(B) . ≡ ::·: ~ (A ε extr(A)) ::·: [f] ::: [C a] :·: C ε f(a) . ≡ :: C ε C :: [D] ∴ C ε extr(D) . ≡ : [E] : E ε a . ⊃ . E ε extr(D) :·: ⊃ :: [F] :: [∃ b] ∴ A ε b . ∨ . B ε b ∴ [d] : F ε d . ⊃ . ~ (f(b) ε f(d)) .

Ten aksjomat nie jest organiczny, ponieważ, jeśli postawimy kwantyfikator ogólny przed wyrażeniem „~ (A ε extr(A))", które jest członem E3, to otrzymamy wyrażenie następujące:

C1 [A] . ~ (A ε extr(A))

które jest twierdzeniem mereologii.

§3. Ł1 [p q r] ∴ p ≡ q . ≡ : q ≡ r . ≡ . r ≡ p

B1 $[f\,p] :: f(p) . \equiv \therefore f(p \equiv . [u] . u) . \equiv : [q] : f(p) . \equiv . f(q)$

§4. B2 $[f\,p] :: f(p\,p) . \equiv \therefore f(p\,p \equiv . [u] . u) . \equiv : [q] : f(p\,p) . \equiv . f(p\,q)$

§5. A_h $[f\,p\,q\,r\,s\,t] :\cdot: p \equiv q . \equiv :: [g] :: f(p\,[u] . u)) . \equiv \therefore [u] . f(q\,u) . \equiv : g(r \equiv s . \equiv t\,q) . \equiv . g(s \equiv t . \equiv r\,p)$

§6. D1 $[a\,b\,c\,\ldots] : S_1\,(a\,b\,c\,\ldots) . S_2\,(a\,b\,c\,\ldots) . \ldots . \equiv . G(a\,b\,c\,\ldots)$

§7. F1 $[a] :::: \mathrm{dscr}(a) . \equiv ::\cdot: [f\,A\,b] ::\cdot: [D\,c] :\cdot: D\,\varepsilon\,f(c) . \equiv :: D\,\varepsilon\,D :: [n] \therefore \mathrm{dscr}(D \cup n) . \supset . D\,\varepsilon\,n : \equiv : [\exists E] : E\,\varepsilon\,c : \mathrm{dscr}(E \cup n) . \supset . E\,\varepsilon\,n ::: \mathrm{dscr}(A) . A\,\varepsilon\,a ::: \supset ::: [V] : V\,\varepsilon\,a . \supset . V\,\varepsilon\,b \therefore \supset . f(b)\,\varepsilon\,f(b) ::: [B] :\cdot: B\,\varepsilon\,a . \sim(A\,\varepsilon\,B) . \supset :: [C] :: [\exists d] \therefore A\,\varepsilon\,d . \vee . B\,\varepsilon\,d \therefore [e] : C\,\varepsilon\,e . \supset . \sim(f(d)\,\varepsilon\,f(e))$

§8. Aksjomat ontologii, ustalony przez Leśniewskiego w 1920, ma postać wyrażenia następującego:

G $[A\,a] :: A\,\varepsilon\,a . \equiv \therefore [\exists B] . B\,\varepsilon\,A \therefore [B] : B\,\varepsilon\,A . \supset . B\,\varepsilon\,a \therefore [B\,C] : B\,\varepsilon\,A . C\,\varepsilon\,A . \supset . B\,\varepsilon\,C$

Za pomocą logiki zdań i praw dotyczących użycia kwantyfikatorów można wyprowadzić z G następujące twierdzenia:

G1 $[A\,a] : A\,\varepsilon\,a . \supset . [\exists B] . B\,\varepsilon\,A$

G2 $[A\,B\,a] : B\,\varepsilon\,A . A\,\varepsilon\,a . \supset . B\,\varepsilon\,a$

G3 $[A\,B\,C\,a] : A\,\varepsilon\,a . B\,\varepsilon\,A . C\,\varepsilon\,A . \supset . B\,\varepsilon\,C$

G4 $[A\,B\,a] :: B\,\varepsilon\,A \therefore [B] : B\,\varepsilon\,A . \supset . B\,\varepsilon\,a \therefore [B\,C] : B\,\varepsilon\,A . C\,\varepsilon\,A . \supset . B\,\varepsilon\,C \therefore \supset . A\,\varepsilon\,a$

Tarski dowiódł, że G3 wynika z G2, a mnie udało się dowieść, że G2 implikuje G4.

[s. 65] Aksjomat ontologii, odkryty przez Leśniewskiego w 1929, ma postać następującego wyrażenia:

H1 $[A\,a] : A\,\varepsilon\,a . \equiv . [\exists B] . A\,\varepsilon\,B . B\,\varepsilon\,a$

§9. C2 $[A\,a] : A\,\varepsilon\,\mathrm{Kl}(a) . \supset . A\,\varepsilon\,A$

C2, które wynika natychmiast z E2 (cf. §1 powyżej), jest wynikiem zastosowania reguły podstawiania do następującego twierdzenia ontologicznego:

H2 $[A\,a] : A\,\varepsilon\,a . \supset . A\,\varepsilon\,A$

§10. F2 $[A\,B] ::\cdot: A\,\varepsilon\,\mathrm{extr}(B) . \equiv ::: [f] ::: [C\,a] :\cdot: C\,\varepsilon\,f(a) . \equiv :: C\,\varepsilon\,C :: [D] \therefore C\,\varepsilon\,\mathrm{extr}(D) . \equiv : [E] : E\,\varepsilon\,a . \supset . E\,\varepsilon\,\mathrm{extr}(D) :\cdot: \supset :: [F] :: [\exists b] \therefore A\,\varepsilon\,b . \vee . B\,\varepsilon\,b \therefore [d] : F\,\varepsilon\,d . \supset . \sim(f(b)\,\varepsilon\,f(d))$

Gdy praca moja została ukończona, usłyszałem od dra Lejewskiego, że udało mu się wydedukować C1 (por. powyżej §2) z F2. Wynik ten pokazuje, że można użyć F2 jako jedynego aksjomatu mereologii (por. C. Lejewski, *A New Axiom of Mereology*, publikowane w tym Roczniku*).

§11. Jedyny aksjomat Leśniewskiego dla teorii grup ma postać następującego wyrażenia:

I. [A B C] ∷: φ(A B C) . ≡ ∴: [∃ D E F G] . φ(A D E) . φ(C F G) ∴: [H I] ∷ φ(H B I) . ≡ ∴ [∃ K L M N] . φ(K H L) . φ(M N I) ∴ [O P] : φ(O C I) . φ(P A H) . ⊃ . O = P

Jedyny aksjomat Leśniewskiego dla teorii grup ablowskich ma postać następującego wyrażenia:

II. [A B C] ∷: φ(B A C) . ≡ ∴: [∃ D E F G] . φ(A D E) . φ(F G C) ∴: [H I] ∷ φ(H B I) . ≡ ∴ [∃ K L M N] . φ(H K L) . φ(M I N) ∴ [O P] : φ(O C I) . φ(P A H) . ⊃ . O = P

Z języka angielskiego przełożył Józef Andrzej Stuchliński

* [Strony 65-70 — przypis tłumacza].