Piotr Błaszczyk

O przedmiocie matematycznym

Filozofia Nauki 12/2, 5-19

2004

Filozofia Nauki
Rok XII, 2004, Nr 2(46)

Piotr Błaszczyk

O przedmiocie matematycznym[1]

0. W ramach filozofii matematyki zagadnienie przedmiotu matematycznego wyznacza szereg pytań, np. takie: Czym jest przedmiot matematyczny? Czy istnieje, a jeżeli istnieje, to w jaki sposób? Czy jest konstruowany, czy też odkrywany? Czy jest zależny, czy też niezależny od człowieka?

Z klasycznych szkół filozofii matematyki stosunkowo najwięcej miejsca temu zagadnieniu poświęca szeroko rozumiany realizm. Realiści utrzymują, że przedmioty matematyczne istnieją poza czasem i przestrzenią i nie wchodzą w związki przyczynowe; a także istnieją obiektywnie, niezależnie od tego czy są poznawane, czy też nie, istnieją niezależnie od naszych definicji i konstrukcji. Zdaniem realistów poznanie matematyczne polega na odkrywaniu tych przedmiotów lub ich własności. Mówiąc najogólniej, przedmioty matematyczne to „byty platońskie", nie są to więc ani przedmioty fizyczne, ani psychiczne.

Proponuję, aby pytanie o przedmiot matematyczny potraktować jako pytanie z zakresu ontologii — ontologii rozumianej jako nauka o przedmiocie w ogóle. Oczywiście są różne ontologie i należy wybrać adekwatną do stawianego problemu. W ontologiach, które dopuszczają jedynie przedmioty fizyczne, psychiczne i ewentualnie idealne, nawet jeżeli te ostatnie są charakteryzowane tylko negatywnie, sposób istnienia przedmiotów matematycznych jest w zasadzie przesądzony drogą eliminacji: przedmioty matematyczne nie są przedmiotami fizycznymi, bo są np. niezmienne, nie są przedmiotami psychicznymi, bo są np. intersubiektywne, pozostaje zatem trzecia możliwość, broniona zwykle jeszcze bez jasnego rozpoznania idealnego sposobu ist-

[1] Jest to rozszerzony tekst wystąpienia przedstawionego w ramach sesji *Wokół filozofii Karla R. Poppera*, zorganizowanej przez Instytut Filozofii Uniwersytetu Zielonogórskiego w roku 2002.

nienia. Takie ujęcie zagadnienia nie jest przekonywujące — przede wszystkim w punkcie wyjścia. Wydaje się, że świat jest bardziej różnorodny.[2]

Proponuję, aby pytanie o przedmiot matematyczny rozpatrzyć w ontologii wypracowanej przez Romana Ingardena, a wyłożonej w jego *Sporze o istnienie świata*. Dlaczego? Otóż w ontologii Ingardena sfera tego, co nie jest fizyczne i nie jest psychiczne, jest zróżnicowana; występują tam trzy rodzaje przedmiotów: idee, indywidualne przedmioty idealne oraz przedmioty intencjonalne, dokładniej, przedmioty pochodnie intencjonalne, przedmioty intencjonalne w znaczeniu określonym przez Ingardena w pracy *O dziele literackim*, te, które występują w warstwie przedmiotów przedstawionych. Dodajmy, że wszystkie te przedmioty są intersubiektywne, są poza czasem i przestrzenią i nie wchodzą w związki przyczynowe. Ponadto, ich charakterystyka jest na tyle rozbudowana, że aby wykazać, iż przedmiot matematyczny jest przedmiotem takiego a nie innego rodzaju, że jest np. ideą, musimy zdobyć się na w miarę bogatą i co najważniejsze pozytywną charakterystykę, innymi słowy: w ramach tej ontologii samo stwierdzenie, że przedmiot matematyczny nie jest przedmiotem fizycznym i nie jest przedmiotem psychicznym jest dalece niewystarczające.

Wprowadzając w ontologię Ingardena powiedzmy już w tym miejscu, że to, co dotąd nazywałem przedmiotem fizycznym, u Ingardena jest przedmiotem realnym, to, co nazywałem przedmiotem psychicznym, u Ingardena jest przedmiotem pierwotnie intencjonalnym — przedmiotem, który jest konstytuowany w aktach świadomości spełnianych przez pewien podmiot i który jest bezpośrednio dany tylko temu podmiotowi. Z kolei — i to jest dla nas najważniejsze — napięcie związane z pytaniami, czy przedmiot matematyczny jest odkrywany, czy też stwarzany, czy jest zależny, czy też niezależny od człowieka, w ramach tej ontologii przenosi się na opozycję idealny — intencjonalny; przedmiot idealny jest niezależny od człowieka, a jego poznanie można nazwać odkrywaniem, o przedmiocie pochodnie intencjonalnym można powiedzieć, że jest stwarzany przez człowieka i w tym sensie jest zależny, ale jednocześnie — powtórzmy — jest to przedmiot intersubiektywny.

W ramach ontologii Ingardena można zatem, przynajmniej w punkcie wyjścia, zgadzać się co do tego, że przedmioty matematyczne nie są przedmiotami fizycznymi i nie są przedmiotami psychicznymi, a jednocześnie nie zgadzać się co do tego, że przedmioty matematyczne są „bytami platońskimi" w wyżej naszkicowanym sensie.

I jeszcze jedna uwaga porządkująca. W ontologii Ingardena — jak już zostało zauważone — są dwie odmiany przedmiotu intencjonalnego: pierwotnie i pochodnie intencjonalny. Dalej, mówiąc o przedmiocie intencjonalnym, będziemy mieli na uwa-

[2] Wzorcowym przykładem prezentacji założeń ontologicznych w kontekście pytania o sposób istnienia przedmiotów matematycznych jest stanowisko Abrahama Robinsona przedstawione w jego manifeście filozoficznym *Formalism 64*: „Wielkości nieskończone nie istnieją w żadnym sensie tego słowa (tj. ani realnie, ani idealnie)" (Robinson 1967, s. 229). W tym przypadku *explicite* przyjmowane są tylko dwa rodzaje przedmiotów: fizyczne oraz idealne. Zazwyczaj jednak kontekst ontologiczny nie jest tak wyraźny, a dodatkowo kwestia dopuszczalnych sposobów istnienia spowita jest wątkami epistemologicznymi.

dze przedmiot pochodnie intencjonalny — ten intersubiektywny przedmiot intencjonalny. Tyle tytułem wstępu.

W kolejnych punktach przedstawię argumentację zmierzającą do wykazania, że przedmiot matematyczny jest przedmiotem intencjonalnym, przy czym nie będę mówił o przedmiocie matematycznym w ogóle, lecz, aby być najbliżej konkretu, o wybranym, aczkolwiek jednym z ważniejszych przedmiotów matematycznych, mianowicie o liczbach rzeczywistych. Liczby rzeczywiste natomiast traktuję tak jak są one traktowane w matematyce, tj. jako ciało uporządkowane w sposób ciągły — $\langle R, +, \cdot, < \rangle$.

Plan wywodu jest następujący: najpierw, aby przybliżyć intuicyjnie przedmiot intencjonalny, przedstawię klasyczny przykład takiego przedmiotu, następnie podam jego charakterystykę ontologiczną, aż wreszcie, zaczynając od punktu 4., zajmę się wprost liczbami rzeczywistymi.

1. Klasycznym przykładem przedmiotu intencjonalnego jest postać literacka. Niech to będzie Lolita, bohaterka powieści Vladimira Nabokova *Lolita*.

Opisy Lolity są liczne i różnorakie, a przy tym wszystkie pochodzą od wielbiącego jej dziewczęcą urodę mężczyzny — Humberta Humberta. Obok zapisów antropometrycznych: wzrost, waga, obwód uda, łydki, szyi itd., znajdujemy detale medycznej natury, takie jak ten, że wyrostek robaczkowy nie został usunięty, że na boku ma drobne, ciemnobrązowe znamię, a u dołu zgrabnej łydeczki, kilka cali nad brzegiem grubej, białej skarpetki, małą bliznę; że na ramieniu ma bliznę w kształcie ósemki po szczepionce przeciwko ospie. W większości jednak opisy są bardziej osobiste, co bynajmniej nie ujmuje im konkretności. Oczy Lolity są puste, jasnoszare, rzęsy czarne jak sadza. Twarz pokrywają piegi, z czego pięć rozłożonych jest niesymetrycznie na zadartym nosku; wargi są czerwone jak oblizany czerwony cukierek, a dolna z nich jest uroczo pełniejsza; przednie zęby — duże; głos — przenikliwie wysoki; włosy — ciepło brązowe, z grzywką i falami po bokach, z naturalnymi lokami puszczonymi z tyłu, a do tego, kilka razy zauważony przez Humberta Humberta, jedwabisty połysk nad skronią, przechodzący w żywy brąz włosów. Karnacja i opalenizna są subtelnie cieniowane: ramiona mają kolor miodu, a po płaczu twarz Lolity przyjmuje odcień różu Botticellego. Do tego należy dodać przebogaty portret psychologiczny oddający rozwój i dojrzewanie Lolity.

Taka była Lolita między dwunastym a czternastym rokiem życia. To, że rosła i zmieniała się jest w powieści precyzyjnie zapisywane.

Po trzech latach niewidzenia Lolity Humbert Humbert znajduje ją znacznie odmienioną. Jest wyższa o parę cali, ma nową fryzurę, nowe uszy, a jej głowa jakby się zmniejszyła, policzki zapadły się, piegi zbladły. Tyle o Lolicie (Nabokov 1991).

W opisach tych rysuje się coś, co ma strukturę realnego przedmiotu; to coś zarazem, w odróżnieniu od przedmiotu realnego *sensu stricto*, nie istnieje autonomicznie, lecz istnieje tylko jako wyznaczone przez tekst. Do tego przedmiotu odnoszą się wszystkie wyżej przytoczone określenia. Jednocześnie temu czemuś, temu przedmiotowi można przypisywać określenia, których nie sposób uznać za charakterystykę

Lolity, jak na przykład to, że owo coś w całości zostało wymyślone przez Nabokova, że zostało następnie utrwalone w piśmie, że jest w jakiś sposób odtwarzane przez każdego czytelnika. Całość, do której odnoszą się te dwie grupy określeń nazywa Ingarden przedmiotem intencjonalnym. Tak więc Lolita z całym zestawem określeń jakie otrzymała od Nabokowa jest tylko częścią przedmiotu intencjonalnego; ta część nazywa się zawartością.

Mamy tu zatem trzy zasadnicze elementy: twórcę, tekst oraz przedmiot intencjonalny — ową całość, w której postać Lolity stanowi zawartość. W poniższej charakterystce przedmiotu intencjonalnego będę odwoływał się do tej modelowej sytuacji.

2. Ontologiczna charakterystyka przedmiotu intencjonalnego będzie dwojaka: najpierw scharakteryzowany zostanie sposób istnienia, a następnie budowa formalna.

Opis sposobu istnienia polega na zestawieniu różnych aspektów istnienia, które Ingarden nazywa momentami bytowymi. Istnienie przedmiotu intencjonalnego charakteryzują następujące momenty: pochodność, samodzielność, zależność, niesamoistność oraz nieaktualność.

2.1. Pochodność bytowa oznacza, że przedmiot „istnieć może tylko z wytworzenia przez inny przedmiot" (Ingarden 1987a, s. 92). Dla naszego przykładu oznacza to, że źródło istnienia przedmiotu intencjonalnego jest w odpowiednich aktach świadomości Nabokowa, że przedmiot intencjonalny zaczyna istnieć dzięki pisarzowi.

2.2. Samodzielność oznacza, że przedmiot intencjonalny nie musi współistnieć „w obrębie jednej całości z jakimś innym przedmiotem" (Ingarden 1987a, s. 116), innymi słowy, że jest odrębnym przedmiotem, a nie jest aspektem, częścią czy własnością jakiegoś przedmiotu. Dla nas znaczy to, że przedmiot intencjonalny nie jest częścią przeżyć czy to Nabokova, czy też czytelnika, że nie jest częścią, czy własnością książki, rozumianej jako konkretny realny przedmiot.

2.3. Zależność. We wstępie była mowa o zależności w dość ogólnym rozumieniu, teraz mamy na uwadze czysto techniczne znaczenie. Tak więc zależność oznacza, że przedmiot intencjonalny jest samodzielną całością, która „wymaga dla swego istnienia istnienia jakiegoś innego przedmiotu bytowo samodzielnego" (Ingarden 1987a, s. 121-122). O ile pochodność bytowa oddaje to, że przedmiot powstaje, zaczyna istnieć, to zależność ujmuje to, że dla swego dalszego istnienia przedmiot intencjonalny wymaga jakiegoś innego przedmiotu, że jego dalsze istnienie musi być podtrzymywane przez coś innego. To coś, co podtrzymuje istnienie przedmiotu intencjonalnego nazywane jest podstawą bytową.

Co to znaczy? Dzieło literackie powstaje w aktach twórczych pisarza, ale jego dalsze istnienie jest możliwe dzięki temu, że zostało zapisane. Książka rozumiana jako konkretny, materialny przedmiot, jest tym, co pozwala dziełu trwać. Z drugiej strony podstawę bytową tworu literackiego stanowi język — słowa oraz zdania, które same też są tworami intencjonalnymi. Znaczenia słów i sensy zdań są intersubiektywne, również intersubiektywna jest podstawa materialna przedmiotu intencjonalnego — konkretne egzemplarze książki. Wszystko to razem sprawia, że przedmiot intencjonalny, w odróżnieniu od aktów pisarza i aktów czytelnika, jest przedmiotem intersubiektywnym.

2.4. Niesamoistność wiąże się z tym, że przedmiot intencjonalny nie jest sam w sobie immanentnie określony. Za tym technicznym językiem stoi stosunkowo prosta intuicja: Lolita posiada te i tylko te cechy, które są przypisane jej w tekście. Ingarden tak to ujmuje: „immanentne kwalifikacje nie występują [...] w zawartości przedmiotów czysto intencjonalnych. Wszystkie określenia [...], które w ich zawartości występują, są przedmiotowi czysto intencjonalnemu w jakiś sposób jedynie przypisane, 'domniemane'" (Ingarden 1987a, s. 89).

2.5. Nieaktualność. Ten moment bytowy nie poddaje się krótkiej charakterystyce, ale z drugiej strony nie będzie on przywoływany w dalszych rozważaniach, poprzestaniemy więc tylko na wskazaniu trzech istotnych momentów z nim związanych. Otóż z nieaktualnością wiąże się brak oddziaływań przyczynowych między przedmiotem intencjonalnym a przedmiotami realnymi, co oznacza, że wytwarzanie przedmiotu intencjonalnego nie ma charakteru przyczynowego. Z tym wiąże się niezmienność przedmiotu intencjonalnego. A wreszcie nieaktualność wiąże się z aczasowością (pozaczasowością) przedmiotu intencjonalnego.[3] (Trzeba jednak przyznać, że idzie tu o ściśle określone pojęcia zmiany i czasowości, które w ontologii Ingardena zostały wypracowane dla przedmiotu realnego. Faktem jednak jest, że przedmioty intencjonalne w jakimś sensie zmieniają się, co w pewnym zakresie jest zaznaczone np. w historii języka, czy w historycznej zmienności odczytywania dzieła literackiego. Jaki jest ontologiczny sens tych zmian? Kwestia ta wymaga opracowania.)

3. Aspekty strukturalne, czy jak mówi Ingarden charakterystykę formalnoontologiczną przedmiotu intencjonalnego, wyznaczają dwa momenty: dwustronność budowy oraz schematyczność (występowanie miejsc niedookreślenia).

3.1. Dwustronność budowy. Przedmiot intencjonalny posiada dwie jakby strony; tworzą je struktura intencjonalna (przedmiot intencjonalny jako taki) oraz zawartość. Z tym wiąże się występowanie dwóch podmiotów: podmiotu przedmiotu intencjonalnego jako takiego oraz podmiotu przedmiotu, który występuje w zawartości. Właściwym i ważniejszym jest pierwszy podmiot; ten podmiot niejako przyjmuje na siebie historyczność, określenia związane z genezą przedmiotu intencjonalnego.

3.2. Zawartość naszego przedmiotu intencjonalnego, tj. Lolita, ma formę rzeczy. Ona to — w pewnym uproszczeniu — stanowi drugi podmiot przedmiotu intencjonalnego. Lolita posiada te i tylko te określenia, które zostały przypisane jej przez Nabokova i zostały zapisane w tekście książki. Do zawartości przedmiotu intencjonalnego zalicza Ingarden także „charakter bytowy", tzn. wyznaczony wprost lub tylko domniemany sposób istnienia przedmiotu występującego w zawartości. Nie jest to

---

[3] Ingardena rozumienie zmiany oraz czasu przedstawiłem odpowiednio w artykułach: (Błaszczyk 1999, §§ 15,16) oraz (Błaszczyk 1996). Skądinąd właśnie z uwagi na aczasowość i niezmienność obiekty matematyczne uważane są za „byty platońskie".

istnienie *sensu stricto* i dlatego słowo „istnieje" ujmuje Ingarden w cudzysłów i mówi o „charakterze bytowym": „Albowiem w swej zawartości przedmiot intencjonalny 'jest' dokładnie taki, jakim jest domniemany, i 'istnieje' w ten sposób, jaki jest mu wyznaczony w akcie go określającym" (Ingarden 1987b, s. 201). Jest bowiem tak, że nawet jeżeli w tekście nie jest wprost powiedziane, że Lolita jest realnym przedmiotem, to owa realność jest domniema przez to, że jest ona elementem świata, który z kolei jest domniemany jako realny.

3.3. Schematyczność. Powiedziałem, że Lolita posiada te i tylko te własności, które przypisane są jej w tekście. Jeżeli uwzględnimy, że jest ona domniemana jako przedmiot realny, to jako taki przedmiot powinna posiadać jeszcze inne własności niż tylko te, które zostały jej przypisane. Owe luki w określeniu Lolity nazywane są miejscami niedookreślenia.

Przykłady. (1) Nic nie jest powiedziane o uszach Lolity, co jest znamienne o tyle, że spotykając ją po latach, Humbert Humbert notuje: „Nowa, spiętrzona fryzura, nowe uszy". Ale uszy człowieka nie rosną tak szybko, aby w ciągu trzech lat stały się większe czy zmieniły kształt. Zmieniła się twarz Lolity i na jej nowym obliczu uwydatniły się uszy, w zasadzie te same sprzed trzech lat. Ale jakie one właściwie są? Małe? Duże? Odstające? Przylegające? Wąskie? Zaokrąglone? Jaki jest ich płatek i czy w ogóle mają one jakiś płatek? W powieści nic nie jest na temat powiedziane. (2) Wiemy, że Lolita ma piegi, lecz nic nie jest powiedziane o ich barwie, możemy jedynie domniemywać, że jest to jakiś odcień brązu.

4. Przechodzimy do liczb rzeczywistych. W tym przypadku podstawową triadę twórca — tekst — przedmiot wyznaczony przez tekst stanowią: Richard Dedekind — jego praca z roku 1872 *Stetigkeit und irrationale Zahlen* — oraz przedmiot intencjonalny wyznaczony przez tę pracę. Pokazując, że mamy tu faktycznie do czynienia z przedmiotem intencjonalnym w sensie wyżej omówionym, zanalizujemy trzy momenty: dwustronność budowy, pochodność oraz schematyczność.

4.1. Dwustronność budowy. Zawartość przedmiotu intencjonalnego stanowią liczby rzeczywiste utworzone metodą, którą dzisiaj nazywa się metodą przekrojów Dedekinda. R to, na mocy definicji, zbiór wszystkich takich przekrojów uporządkowanego zbioru liczb wymiernych $\langle Q, <\rangle$ — $R = \{(A, B): A \neq \varnothing \wedge B \neq \varnothing \wedge (A \cup B = Q) \wedge \forall x \in A\ \forall y \in B\ [x < y]\}$. W zbiorze tym określone są działania arytmetyczne tak, że powstaje ciało algebraiczne; określony jest porządek, o którym Dedekind pokazał, że jest porządkiem ciągłym w myśl definicji ciągłości podanej w pracy, tj. taki — używając dzisiejszej terminologii — że żaden przekrój tego zbioru nie wyznacza luki. I co najważniejsze, w strukturze tej można — jak pisze Dedekind — „czysto arytmetycznie" odtworzyć podstawowe twierdzenia rachunku różniczkowego i całkowego. Ale obok określeń, które odnoszą się do liczb rzeczywistych, jest też cała grupa określeń odnoszących się do całości wyznaczonej przez tekst rozprawy, których do liczb rzeczywistych nie sposób odnosić. Nie jest przecież cechą porządku ciągłego to, że został *wymyślony* przez Dedekinda 24 listopada 1858 roku — tę datę podaje Dedekind w *Przedmowie*, nie jest cechą tego porządku, że był *modelowany* przez Dedekinda na wzór linii prostej — Dedekind wyznaje to w rozprawie. Określenia te odnoszą się do przedmiotu intencjonalnego jako takiego, nie zaś do jego zawartości.

We wstępie powiedziałem, że przedmiot matematyczny jest przedmiotem intencjonalnym; teraz, gdy znamy już budowę przedmiotu intencjonalnego, możemy precyzyjnie wyrazić zasadniczą tezę: przedmiot matematyczny stanowi zawartość przedmiotu intencjonalnego; liczby rzeczywiste, podobnie jak Lolita, nie są przedmiotem intencjonalnym, lecz stanowią zawartość przedmiotu intencjonalnego. Matematyka traktuje o zawartości przedmiotu intencjonalnego, historia matematyki — o całym przedmiocie intencjonalnym.

4.2. O pochodności. Pochodność — przypomnijmy — związana jest z tym, że przedmiot intencjonalny zaczyna istnieć; odnosi się to do całego przedmiotu, a więc i do jego zawartości. W konsekwencji trzeba przyjąć, że tak jak przed rokiem 1872 nie było rozprawy Dedekinda, tak też przed tym rokiem nie było tego, co dzisiaj w matematyce uważane jest za liczby rzeczywiste, nie było przedmiotu, do którego odwołujemy się — wprost lub pośrednio (poprzez charakterystykę aksjomatyczną) — mając na uwadze liczby rzeczywiste.

W sposób oczywisty nasuwa się tu pytanie: jeżeli nie było liczb rzeczywistych, to czym zajmowały się całe rzesze matematyków tworzących i rozwijających rachunek różniczkowy i całkowy? Być może jednak proponowany opis wyda się mniej paradoksalny, gdy przypomnę, że jeszcze w XVIII w. nie dysponowano podstawową dla analizy matematycznej definicją — definicją granicy (granicy w dzisiejszym rozumieniu). Rachunek różniczkowy i całkowy powstał jako technika rozwiązywania problemów z zakresu fizyki i geometrii: wyznaczenie prędkości, maksimów i minimów, wyznaczanie stycznych, obliczanie długości krzywych, pól powierzchni oraz objętości. Z czasem zakres zagadnień powiększał się. Matematycy posługiwali się pochodnymi i całkami, operowali szeregami, rozwiązywali równania różniczkowe, znali zależność między różniczkowaniem i całkowaniem. Skuteczność tych technik nie szła w parze z ich wyjaśnieniem. Przywoływane w uzasadnieniach nieskończenie małe, fluksje, różniczki kryły w sobie niejasne intuicje geometryczne lub dynamiczne i nie wytrzymywały ówczesnej krytyki. Dopiero Cauchy podał definicję granicy wolną od geometrycznych odniesień, w której granica jest rozumiana jako liczba, w której granica jest pojęciem arytmetycznym. Aby posługiwać się pojęciem granicy, trzeba było zatem dysponować pojęciem liczby. Dlatego właśnie w drugiej połowie XIX w. wielu matematyków szukało definicji liczby — liczby niewymiernej. Dla większości kierunek poszukiwań wytyczyła definicja Cauchy'ego orzekająca, że liczby niewymierne to granice ciągów liczb wymiernych. Rozumując w podobny sposób Heine, Meray, Cantor doszli do tego, że za liczbę, która ma być granicą ciągu należy uznać po prostu sam ów ciąg. Kulminacją tego myślenia jest konstrukcja Cantora. Dedekind natomiast do pojęcia liczby rzeczywistej doszedł poprzez refleksję nad „istotą ciągłości". Fakty te są znane. (Boyer 1964; Kline 1972; Edwards 1979). Chciałbym natomiast zwrócić uwagę na jeszcze jeden aspekt tej historii.

Dlaczego akurat prace Dedekinda i Cantora zostały wyróżnione przez następne pokolenia? Otóż w historii, której zwieńczeniem są owe prace, idzie o coś więcej niż tylko o wypracowanie pojęcia liczby rzeczywistej, idzie mianowicie o stworzenie takiego systemu liczbowego, w którym można uzasadnić techniki rachunku różniczkowego. Cantor i Dedekind podali nie tylko określenie ciała liczb rzeczywistych, ale przede wszystkim metody uzupełniania ciała liczb wymiernych do ciała, w którym można rozwijać rachunek różniczkowy. W konstrukcjach Cantora i Dedekinda nie widzę zatem „odkrycia" jakiegoś obiektu, widzę natomiast różne metody rozwiązania jednego i tego samego problemu: metody zbudowania systemu liczbowego (rozszerzenia ciała liczb wymiernych), który będzie podstawą dla istniejącego już gmachu analizy matematycznej. W latach 60-tych XX w. Abraham Robinson pokazał, że możliwe jest też inne rozwiązanie. W analizie niestandardowej pokazuje się, że problem ten — problem arytmetycznych podstaw rachunku różniczkowego — można rozwiązać opierając analizę nie na pojęciu granicy, lecz na pojęciu wielkości nieskończenie małej, a odpowiednim systemem liczbowym jest wówczas system liczb hiperrealnych, który nie jest izomorficzny z liczbami rzeczywistymi (Robinson 1966; Capiński, Cutland 1995; Goldblatt 1998).

4.3. Schematyczność. Występujący w zawartości przedmiotu intencjonalnego przedmiot matematyczny nie ma domniemanego sposobu istnienia. To sprawia, że musimy odpowiedzieć na pytanie: jak rozumieć własność przedmiotu matematycznego?[4] Nie znajdując podstaw dla jakichś arbitralnych ograniczeń, przyjmuję jak najbardziej liberalne stanowisko: o przedmiocie matematycznym można orzekać wszystko to, co jest orzekane w teoriach matematycznych. Kilka przykładowych własności liczb rzeczywistych: liczb algebraicznych jest przeliczalnie wiele, ciało liczb rzeczywistych nie jest algebraicznie domknięte, przedziały są jedynymi podzbiorami spójnymi w R (w topologii zadanej przez porządek), istnieją funkcje rzeczywiste nieciągłe (*oposite* Brouwer[5]), czy ogólniej, samo pojęcie granicy odsłania szereg własności odróżniających liczby rzeczywiste od ciał, w których można rozwijać rachunek różniczkowy, np. istnieją funkcje rzeczywiste różniczkowalne nie posiadające drugiej pochodnej, funkcje zespolone natomiast jeżeli mają pierwszą pochodną (w odpowiednio zdefiniowanym obszarze), to mają (w tym obszarze) wszystkie następne pochodne.

Mówiąc ogólnie, każda własność jest własnością w ramach pewnej teorii i nie ma własności poza teorią, sam przedmiot natomiast — liczby rzeczywiste — jest ponad poszczególnymi teoriami. Mówiąc metaforycznie, liczby rzeczywiste umieszczane są

[4] Jest to czysto ontologiczna kwestia związana z pojęciem przedmiotu intencjonalnego. Uzasadnienie tego przejścia przedstawiam w pracach: (Błaszczyk 2003) oraz *O sposobie istnienia liczb rzeczywistych*, maszynopis.

[5] W intuicjonistycznej teorii funkcji rzeczywistych, tj. funkcji określonych na continuum Brouwera, jest tak, że funkcja określona na przedziale domkniętym jest jednostajnie ciągła. (Heyting 1956, roz. III; Fraenkel et al. 1973, roz. IV, § 6)

w różnych teoriach matematycznych niczym substancja w probówkach z różnymi odczynnikami, a w rezultacie poznajemy ich różne własności.[6]

Do tego, co zostało wyżej powiedziane, dodajmy jeszcze jeden warunek: do teorii matematycznej zaliczane są przyjmowane środki badawcze, a więc np. to, że teoria dopuszcza jedynie definicje predykatywne (*vide* analiza matematyczna Hermana Weyla z *Das Kontinuum*), że przyjmuje logikę pierwszego lub drugiego rzędu.[7]

Wśród teorii mamy zatem także teorie sformalizowane, które stwarzają wyjątkowo *sterylne warunki*. Podam dwa przykłady własności związanych z teoriami sformalizowanymi.

(1) W ZF (teoria mnogości Zermelo—Fraenkla) + AC (aksjomat wyboru) istnieją podzbiory R niemierzalne w sensie miary Lebesgue'a; (1') w teorii ZF+AD (aksjomat determinacji) każdy podzbiór R jest mierzalny w sensie miary Lebesgue'a.[8]

(2) W ZF+AC ciągłość funkcji w sensie Cauchy'ego (CC) jest równoważna ciągłości w sensie Heinego (HC); (2') w ZF warunki te nie są równoważne: implikacja $HC \rightarrow CC$ nie da się udowodnić.[9]

Przyjmując powyższe rozumienie własności i pamiętając, że własność odsłania się zawsze w ramach pewnej teorii, można wskazać miejsca niedookreślenia uporządkowanego ciała liczb rzeczywistych: otóż miejsca niedookreślenia wiążę ze zdaniami niezależnymi. Przykłady.

(1) Przyjmując, że rozważamy zbiór R w teorii mnogości ZF+AC (z logiką pierwszego rzędu) możemy spytać, gdzie plasuje się moc tego zbioru w hierarchii alefów (tj. liczb kardynalnych dobrze uporządkowanych), lub inaczej: jak duże jest continuum. I tu natrafiamy na miejsce niedookreślenia. Z niezależności hipotezy continuum wynika, że w ramach tej teorii nie ma pozytywnej odpowiedzi na to pytanie, tj. nie można pokazać, któremu alefowi jest równa liczba kardynalna $2^{\aleph_0}$.

(2) Przyjmując, że rozważamy zbiór uporządkowany $(R, <)$ można spytać, czy zbiór ten ma następującą własność: $(R, <)$ jest izomorficzny z każdym zbiorem uporządkowanym X takim, że X jest uporządkowany w sposób ciągły (tj. żaden jego przekrój właściwy nie wyznacza luki), nie posiada elementu pierwszego ani ostatniego, w którym każda rodzina przedziałów parami rozłącznych jest co najwyżej przeliczalna. Pozytywna odpowiedź na to pytanie nazywa się hipotezą Suslina. Hipoteza Suslina jest zdaniem niezależnym teorii mnogości ZF+AC, a stąd wynika, że w ra-

---

[6] Oczywiście może być też tak, że badane są jedynie wybrane aspekty liczb rzeczywistych, np. sam zbiór R, zbiór uporządkowany $(R, <)$, czy ciało $(R, +, \cdot)$.

[7] W pracy (Grzegorczyk 1954), precyzując idee Weyla z *Das Kontinuum*, pokazano, które twierdzenia klasycznej analizy matematycznej można otrzymać, gdy dopuszczone zostaną jedynie definicje elementarne, tj. takie, w których kwantyfikatory wiążą zmienne przebiegające zbiór liczb całkowitych. Jest też wiele innych prób zbudowania analizy matematycznej przy ograniczonych, w stosunku do analizy klasycznej, środkach dowodowych. (Fraenkel et al. 1973, roz. IV, § 6).

[8] Zob. (Mycielski, Świerczkowski 1964).

[9] Zob. (Jeagerman 1962).

mach tej teorii nie można wykazać, że liczby rzeczywiste mają tę własność i nie można też wykazać, że nie mają tej własności.[10]

5. Powiedziałem wcześniej, że dzisiejsze prace traktujące o liczbach rzeczywistych, czy wykorzystujące liczby rzeczywiste odwołują się do konstrukcji Dedekinda, a przecież wiadomo, że nie jest to jedyna konstrukcja liczb rzeczywistych funkcjonująca w matematyce. Nawet bardziej popularna jest konstrukcja zarysowana przez Georga Cantora w pracach *Über die Ausdehnung eines Satz aus der Theorie der trigonometrische Reihen* oraz *Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre.*[11] Konstrukcją Cantora nazywana jest obecnie konstrukcja, w której zbiór R definiowany jest jako zbiór ilorazowy $C/\approx$, gdzie C oznacza zbiór ciągów liczb wymiernych spełniających warunek Cauchy'ego, natomiast $\approx$ to relacja: $(a_n) \approx (b_n)$ wtw $\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = 0$. W zbiorze tym zdefiniowane są dodawanie, mnożenie oraz porządek tak, że powstaje ciało uporządkowane. Ciało to jest zupełne w tym sensie, że każdy ciąg liczb rzeczywistych spełniających warunek Cauchy'ego jest zbieżny do pewnej liczby rzeczywistej.

Naturalne jest pytanie: jaki związek zachodzi między konstrukcjami Cantora i Dedekinda?

Odpowiedź jest następująca: z punktu widzenia ontologii Ingardena *Stetigkeit und irrationale Zahlen* oraz prace Cantora wyznaczają dwa różne przedmioty intencjonalne. Z punktu widzenia ontologii Ingardena, różne przedmioty intencjonalne mają różne zawartości. Czym zatem różnią się te konstrukcje? Wskażę trzy różnice.

(1) Ciała skonstruowane przez Cantora i Dedekinda są oczywiście izomorficzne, ale izomorfizm pomija *naturę* elementów ciał, pomija to *z czego* i jak zostały skonstruowane, to zaś należy do zawartości odpowiednich przedmiotów intencjonalnych. W konstrukcji Dedekinda liczba rzeczywista jest parą podzbiorów zbioru liczb wymiernych, w konstrukcji Cantora — zbiorem ciągów Cauchy'ego (klasą abstrakcji wyznaczoną przez pewien ciąg).

(2) W konstrukcji Dedekinda decydującą własnością jest ciągłość, w konstrukcji Cantora — zupełność. Są to różne własności. Ciągłość w sensie Dedekinda jest charakterystyką porządku liniowego, zupełność (w tym konkretnym znaczeniu) charakteryzuje przestrzenie metryczne. I nawet wtedy, gdy własności te są rozpatrywane jako własności ciała uporządkowanego nie są one równoważne: aby otrzymać równoważność (w ramach teorii ciała uporządkowanego) do zupełności należy dodać jeszcze aksjomat Archimedesa (Błaszczyk 200?, § 3.3.).

---

[10] Powiązanie zdań niezależnych z miejscami niedookreślenia przedmiotu intencjonalnego omawiam w pracy *O sposobie istnienia liczb rzeczywistych*, maszynopis.

[11] Poza konstrukcjami Cantora i Dedekinda są też oczywiście inne konstrukcje liczb rzeczywistych. Jednakże w wykładach rachunku różniczkowego zazwyczaj wykorzystuje się jedną z tych dwóch konstrukcji.

(3) I najważniejsze. Konstrukcje te różnią się metodą. Metoda przekrojów Dedekinda przedstawiana jest obecnie jako uzupełnienie porządku liniowego do porządku ciągłego. Metoda Cantora przedstawiana jest jako metoda uzupełniania przestrzeni metrycznej do przestrzeni zupełnej. Jeżeli zaś zobaczymy w tej konstrukcji strukturę ilorazową, to jej moc — jeśli wolno tak powiedzieć — jest nie do przecenienia.[12]

6. Dla uwyraźnienia prezentowanego stanowiska skomentuję jeszcze wypowiedź jaką Azriel Levy, specjalista w dziedzinie podstaw matematyki, zamieścił w książce *Basic Set Theory*, we wstępnie do rozdziału *Real Spaces*:

> [...] liczbę −1 zdefiniujemy jako zbiór (0,1). Nie znaczy to jednak, że −1 jest w rzeczywistości (0,1), tak jak para (x,y) **nie jest w rzeczywistości** zbiorem {{x},{x,y}}, a funkcja **nie jest w rzeczywistości** zbiorem par uporządkowanych. Przedmioty matematyczne są charakteryzowane przez swoje cechy istotne, nie zaś przez 'substancje, z których są zrobione'. Wobec tego liczby całkowite, wzięte z ich operacjami arytmetycznymi, to w rzeczywistości pewien pierścień całkowity posiadający określone własności algebraiczne. Własności te charakteryzują ów pierścień z dokładnością do izomorfizmu, tj. każde dwa pierścienie całkowite posiadające te cechy są izomorficzne. Ważne jest, aby wiedzieć, i taki jest cel definicji, które podamy, że 'idealne' zbiory liczb całkowitych, wymiernych i rzeczywistych oraz działania arytmetyczne i relacje określone na nich, mogą być otrzymane w pewien sposób jako zbiory teorii mnogości, ale gdy już są dane i gdy **ich istotne własności** zostaną wykazane, pomijamy to, jak zostały one otrzymane (Levy 1979, s. 217, podkreślenia — P.B.).

6.1. Zwrot, że liczba „nie jest w rzeczywistości..." — dopowiedzmy: klasą abstrakcji, czy przekrojem — sugeruje, że jest czymś innym. Otóż twierdzę, że nie ma nic poza owymi przedstawieniami, nie ma żadnych „idealnych" — czy to w cudzysłowie, czy też bez cudzysłowu — liczb rzeczywistych.

6.2. Weźmy teraz zdanie: „gdy **ich istotne własności** zostaną wykazane, pomijamy to, jak zostały one otrzymane". Mówiąc o „istotnych własnościach" Levy ma na uwadze aksjomatyczną charakterystykę ciała uporządkowanego liczb rzeczywistych, co sugeruje wyróżnioną pozycję ujęcia aksjomatycznego.[13] W podejściu aksjomatycznym kluczowe jest twierdzenie o kategoryczności, orzekające, że istnieje jedno,

---

[12] Słynny parakoks wielorakiej redukcji liczb naturalnych (Benaceraff 1964) został przeformułowany i przeniesiony na liczby rzeczywiste przez Pennelopę Maddy (Maddy 1992, rozdz. 3). W swoim rozwiązaniu Maddy kieruje się przekonaniem, że musi istnieć jakiś jeden przedmiot, jedna własność, do której odnoszą się konstrukcje Cantora i Dedekinda (Błaszczyk 200?). Rozumowanie przedstawione w punkcie 5. pokazuje, że można rozwiązać paradoks Benaceraffa w wersji dla liczb rzeczywistych bez przywoływania obiektu transcendującego konkretne konstrukcje. To zaś, że mamy wówczas wiele liczb rzeczywistych — powiedzmy: liczby rzeczywiste Cantora i liczby rzeczywiste Dedekinda — należy traktować tak samo jak to, że mamy wiele dowodów tego samego twierdzenia, np. twierdzenia o kategoryczności aksjomatyki liczb rzeczywistych.

[13] Pierwszą, o ile nam wiadomo, aksjomatyczną charakterystykę liczb rzeczywistych podał Dawid Hilbert w artykule (Hilbert 1900). W pierwszym akapicie tej pracy znajdujemy bezpośrednie odwołanie do prac (Cantor 1872) i (Dedekind 1872). Ten prosty fakt zasługuje naszym zdaniem na odrębne opracowanie.

z dokładnością do izomorfizmu, ciało uporządkowane spełniające aksjomaty: ... . W tym miejscu należałoby wpisać któryś układ aksjomatów, a jak wiadomo, jest ich wiele. Wszystkie one podpadają pod schemat: aksjomaty ciała uporządkowanego + aksjomat ciągłości (ciągłość porządku) lub warunek równoważny mu (Cohen, Ehrlich 1963, rozdz. 5.).

Otóż ujęcie aksjomatyczne w dwojaki sposób jest zależne do konstrukcji Cantora lub Dedekinda.[14]

(1) Ujmuje liczby rzeczywiste jako ciało uporządkowane, co jest charakterystyczne i dla konstrukcji Cantora, i dla konstrukcji Dedekinda. Ale bynajmniej nie jest to jedyne możliwe ujęcie liczb rzeczywistych. Twierdzenie Pontriagina daje charakterystykę topologiczno-algebraiczną: liczby rzeczywiste są ciałem topologicznym ciągłym, spójnym, lokalnie zwartym.[15]

(2) Dowód twierdzenia o kategoryczności jest zwykle tak prowadzony: dane są dwa ciała F i F_1 spełniające ustalone aksjomaty, zawierają one izomorficzne ciała ułamków, odpowiednio Q i Q_1, naturalny izomorfizm między Q i Q_1 jest rozszerzany do izomorfizmu między F i F_1, a rozszerzanie to jest wzorowane na uzupełnianiu ciała liczb wymiernych albo metodą Cantora, za pomocą ciągów Cauchy'ego, albo metodą przekrojów Dedekinda.

6.3. Powiedziałem wcześniej, że problem, przed którym stanęli Dedekind i Cantor uzasadniał *kierunek* uzupełniania, tj. dodawanie nowych elementów do ciała liczb wymiernych. Ale Dedekind i Cantor nie tylko rozszerzyli ciało liczb wymiernych, sprawdzili też, że ponowne zastosowanie ich metody do nowego, tj. uzupełnionego ciała, nie *stwarza* już nowych liczb: struktura *stworzona* przez Dedekinda okazała się ciągła, struktura *stworzona* przez Cantora okazała się zupełna, to zaś wystarcza już do rozwijania rachunku różniczkowego. W tym sensie ustalenie arytmetycznych podstaw rachunku różniczkowego wyznacza *kierunek* rozszerzenia ciała liczb wymiernych oraz etap, na którym w owym rozszerzaniu można poprzestać.

Jeżeli zniesiemy punkt odniesienia, jakim jest ustalenie arytmetycznych podstaw rachunku różniczkowego i całkowego, to gubimy *kierunek* uzupełnienia, a także nie wiemy dlaczego w uzupełnianiu można poprzestać na takim, a nie innym etapie. Nie jest przecież tak, że ciała liczb wymiernych nie można rozszerzać w innym *kierunku* i nie jest też tak, że liczb rzeczywistych nie można rozszerzać dalej. Można przyjąć na przykład algebraiczny punkt widzenia i za cel uznać domkniętość algebraiczną ciała wyjściowego, tj. ciała liczb wymiernych. Wówczas uzupełnienie Cantora, czy Dedekinda nie jest wystarczające i liczby rzeczywiste należy rozszerzać dalej, jak

---

[14] W tym miejscu zależność nie ma technicznego znaczenia, jakie zostało przedstawione w pkt. 2.3.

[15] Ściśle rzecz biorąc w twierdzeniu Pontriagina jest powiedziane, że są trzy ciała spełniające podane warunki: liczby rzeczywiste, liczby zespolone i ciało kwaternionów. Wyróżnienie w tej trójce liczb rzeczywistych nie stanowi problemu, można np. dodać warunek określający wymiar topologiczny (Pontriagin 1961, rozdz. IV).

wiadomo, do ciała liczb zespolonych.[16] A nawet jeżeli celem rozszerzenia ciała liczb wymiernych jest ustalenie podstaw rachunku różniczkowego, a jednocześnie za pojęcie podstawowe przyjęte zostaną wielkości nieskończenie małe, a nie pojęcie granicy, to liczby rzeczywiste należy rozszerzać dalej — do struktury liczb hiperrealnych. Struktura ta też może być opisana aksjomatycznie, ale i ta aksjomatyka, podobnie jak aksjomatyka liczb rzeczywistych, jest zależna od istniejącej już konstrukcji. (Capiński, Cutland 1995, Appendix)

Rozszerzając ciało liczb wymiernych trzeba wiedzieć, po co jest ono rozszerzane. Podejście czysto aksjomatyczne samo z siebie nie generuje kierunku rozszerzenia. Dedekind i Cantor wiedzieli, po co *stwarzają* liczby rzeczywiste. Abraham Robinson wiedział, po co *stwarza* liczby hiperrealne. Sens tym konstrukcjom nadaje rachunek różniczkowy i całkowy.

7. Na zakończenie chciałbym powiedzieć, dlaczego uwagi o przedmiocie matematycznym przedstawiam w ramach sesji poświęconej filozofii Karla R. Poppera. Otóż w książce *The Mathematical Experience* Philip J. Davis i Reuben Hersh rozwijają filozofię matematyki inspirowaną pracą Imre Lakatosa *Proof and Refutations*. Wiele polemicznych uwag kierują oni przeciwko platonizmowi i formalizmowi, w szczególności odrzucają myśl, że przedmioty matematyczne istnieją obiektywnie, gdzieś poza czasem i przestrzenią, odrzucają też myśl, że matematyka jest pozbawiona jakiegokolwiek przedmiotowego odniesienia. Gdy zaś relacjonują pracę Lakatosa przyznają, że nie udało im się rozwiązać jednego z ważniejszych problemów — tego mianowicie, który związany jest z pytaniem: „Czym są 'obiekty' *nieformalnych* teorii matematycznych? Kiedy mówimy o liczbach czy trójkątach niezależnie od jakiegokolwiek układu aksjomatów i definicji, o jakich rodzajach wielkości mówimy?" (Davis, Hersh 1994, s. 307).

Dlaczego pytanie to jest ważne dla Davisa i Hersha? Piszą oni:

> Lakatos utrzymuje, że nieformalna matematyka jest nauką w sensie Poppera, że rozwija się w procesie narastającego krytycyzmu, wydelikacania teorii oraz wysuwania teorii nowych i konkurencyjnych (inaczej niż to sugeruje dedukcyjna postać matematyki sformalizowanej). Jednakże w naukach przyrodniczych doktryna Poppera zależy od obiektywnego istnienia świata przyrody. Poszczególne stwierdzenia czasoprzestrzenne, takie jak „woltomierz pokazuje 3,2" dostarczają testów, przez które teorie naukowe są krytykowane i czasem odrzucane. Żeby posłużyć się żargonem Poppera, te „podstawowe stwierdzenia" są „potencjalnymi falsyfikatorami". Jeśli matematyka nieformalna zostaje zrównana z naukami przyrodniczymi, musimy zlokalizować jej obiekty. Jakie są „podstawowe stwierdzenia" przedmiotu dostarczające potencjalnych falsyfikatorów dla nieformalnych teorii matematycznych? Pytanie to nie jest nawet w *Proof and Refutations* postawione, a jednak jest to pytanie główne i trzeba się z nim uporać,

[16] W przykładzie tym rozszerzane jest ciało $\langle R, +, \cdot\rangle$. Ale oczywiście i uporządkowane ciało liczb rzeczywistych można rozszerzać, np. do (niearchimedesowego) ciała funkcji wymiernych o współczynnikach rzeczywistych.

jeśli się chce pójść dalej w konstruowaniu omylnościowej czy niedogmatycznej epistemologii matematyki (Davis, Hersh 1994, s. 305-306).

Sądzę, że koncepcja przedmiotu matematycznego jako przedmiotu intencjonalnego mogłaby być wykorzystana w takiej — mówiąc ogólnie — *Popperowskiej* filozofii matematyki.

BIBLIOGRAFIA

Barker S. F. (1969), *Realism as a Philosophy of Mathematics*, [w:] *Foundations of Mathematics. Symposium Papers Commemorating the Sixtieth Birthday of Kurt GÖdel*, red. Bulloff J. J., Berlin, Springer, s. 1-9.

Benacerraf P. (1964), *What numbers could not be?* [w:] *Philosophy of Mathematics*, red. Benacerraf P., Putnam H., New Jersey, Englewood Cliffs.

Błaszczyk P. (1996), *Ingarden o czasie*, „Kwartalnik Filozoficzny", t. XXIV, z. 3, s. 33-61, z. 4, s. 125-151.

Błaszczyk P. (1999), *Związek przyczynowy w „Sporze o istnienie świata"*, „Kwartalnik Filozoficzny", t. XXVII, z. 2, s. 69-118.

Błaszczyk P. (200?), *Ciągłość i liczby rzeczywiste*, „Logika", t. 23.

Błaszczyk P. (2003), *Odrzucenie „Tertium non datur"*, „Kwartalnik Filozoficzny", t. XXXI, z. 1, s. 17-37.

Bourbaki N. (1966), *Elements of Mathematics. General Topology. Part II*, Reading, Addion-Wesley Publishing Company.

Bourbaki N.(1966), *Elements of Mathematics. General Topology. Part I*, Reading, Addion-Wesley Publishing Company.

Boyer C.B. (1964), *Historia rachunku różniczkowego i całkowego i rozwój jego pojęć*, tł. S. Dobrzycki, Warszawa, PWN.

Cantor G. (1872), *Über die Ausdehnung eines Satz aus der Theorie der trigonometrische Reihen*, [w:] G. Cantor (1932), *Gesammelte Abhandlungen*, red. Zermelo E., Berlin, Springer, s. 92-102.

Cantor G. (1883), *Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre*, [w:] G. Cantor (1932), *Gesammelte Abhandlungen*, red. Zermelo E., Berlin, Springer, s. 165-208.

Capiński M., Cutland J. (1995), *Nonstandard Methods for Stochastic Fluid Mechanics*, Singapore, World Scientific.

Cichoń J., Kharazishvili A., Węglorz B. (1995), *Subsets of the Real Line*, Łódź, Wydawnictwo Uniwersytetu Łódzkiego.

Cohen L.W., Ehrlich G. (1963), *The Structure of the Real Number System*, New Jersey, Princeton, Van Nonstrand.

Davis P. J., Hersh R. (1994), *Świat matematyki*, tł. R. Duda, Warszawa, PWN.

Dedekind R. (1960), *Stetigkeit und irrationale Zahlen*, Braunschweig, Friedrich Vieweg und Son; wyd. I: Braunschweig 1872.

Edwards C. H. (1979), *The Historical Development of the Calculus*, New York, Springer.

Fraenkel A., Bar-Hillel Y., Levy A. (1973), *Foundations of Set Theory*, Amsterdam, NHPC.

Gödel K. (1964), *What is Cantor's continuum problem?* [w:] *Philosophy of Mathematics*, red. Benacerraf P., Putnam H., New Jersey, Englewood Cliffs.

Goldblatt R. (1998), *Lectures on the Hyperreals*, New York, Springer.

Grzegorczyk A. (1954), *Elementarily definable analysis*, „*Fundamenta Mathematicae*", XLI, s. 311-338.

Heyting A. (1956), *Intuitionism*, Amsterdam, NHPC.

Hilbert D. (1900), *Über den Zahlbegrieff*, „Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung", 8, s. 180-184.

Ingarden R. (1987a), *Spór o istnienie świata*, t. I, *Ontologia egzystencjalna*, wyd. III zmienione, przygotowała i partie tekstu z języka niemieckiego przetłumaczyła D. Gierulanka, Warszawa, PWN.

Ingarden R. (1987b), *Spór o istnienie świata*, t. II (cz. 1 i 2) *Ontologia formalna*, wyd. III zmienione, przygotowała i partie tekstu z języka niemieckiego przetłumaczyła D. Gierulanka, Warszawa, PWN.

Ingarden R. (1988), *O dziele literackim*, tł. M. Turowicz, Warszawa, PWN.

Jeagerman M. (1962), *The Axiom of Choice and Two Definitions of Continuity*, „Bulletin de L'Académie Polonaise des Sciences. Série des science math., astr., et phys.", Vol. X, No 1, s. 699-704.

Kline M. (1972), *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*, New York, Oxford University Press.

Levy A. (1979), *Basic Set Theory*, Berlin, Springer.

Maddy P. (1992), *Realism in Mathematics*, Oxford, Clarendon Press.

Mycielski J., Świerczkowski S. (1964), *On the Lebesgue measurability and the axiom of determinateness*, „*Fundamenta Mathematicae*", LIV, s. 67-71.

Nabokov V. (1991), *Lolita*, tł. R. Stiller, Warszawa, PIW.

Niven I. (1956), *Irrational Numbers*, Rahway, New Jersey, The Mathematical Association of America.

Pontriagin L. S. (1961), *Grupy topologiczne*, tł. R. Molski, P. Szeptycki, Warszawa, PWN.

Robinson A. (1966), *Nonstandard Analysis*, Amsterdam, NHPC.

Robison A. (1967), *Formalism 64*, [w:] *Proceedings of the International Congress for Logic, Methodology and Philosophy of Science, Jerusalem 1964*, red. Bar-Hillel Y., Amsterdam, NHPC, s. 228-264.