Eugeniusz Żabski

O czterech antynomiach semantycznych i ich "rozwiązaniach"

Filozofia Nauki 12/2, 89-99

2004

Artykuł został zdigitalizowany i opracowany do udostępnienia w internecie przez Muzeum Historii Polski w ramach prac podejmowanych na rzecz zapewnienia otwartego, powszechnego i trwałego dostępu do polskiego dorobku naukowego i kulturalnego. Artykuł jest umieszczony w kolekcji cyfrowej bazhum.muzhp.pl, gromadzącej zawartość polskich czasopism humanistycznych i społecznych.

Tekst jest udostępniony do wykorzystania w ramach dozwolonego użytku.

MUZEUM HISTORII POLSKI

Filozofia Nauki
Rok XII, 2004, Nr 2(46)

Eugeniusz Żabski

O czterech antynomiach semantycznych i ich „rozwiązaniach"

„...antynomie pozostają wyzwaniem: domagają się nowych odkryć, dotyczących zasad myślenia i rozumowania..."

S. Krajewski

ANTYNOMIE: KŁAMCY, BERRY' EGO, RICHARDA I GRELLINGA

Przypomnijmy najpierw cztery znane antynomie (a.) semantyczne. Zacznijmy od najbardziej znanej — zwanej często a. kłamcy — która z kłamstwem jednak nie ma nic wspólnego. Znano ją już w starożytności. Przypisuje się ją najwybitniejszemu z megarejczyków, Eubulidesowi (IV w. p.n.e.). Antynomia ta ma wiele wersji; sformułujemy ją następująco: Czy zdanie (e) „Zdanie (e) nie jest prawdziwe" jest prawdziwe, czy fałszywe? Jeśli jest fałszywe, to nie jest tak, jak ono głosi, czyli jest prawdziwe. Sprzeczność. Jeśli zaś jest prawdziwe, to jest tak, jak ono głosi, czyli nie jest prawdziwe. Także sprzeczność.

Przypomnijmy teraz a. Berry' ego. Rozpatrzmy wszystkie wyrażenia języka polskiego będące nazwami liczb naturalnych, np. takie: dziesięć, liczba równa ilości miast w Polsce, liczba o milion większa od mieszkańców Ziemi itp. Wyrażeń takich w języku polskim jest, oczywiście, nieskończenie wiele. Jeśli jednak będziemy rozpatrywać tylko wyrażenia o ograniczonej długości, np. składające się z mniej niż tysiąca liter, to ilość takich wyrażeń jest skończona. Tym bardziej skończona jest ilość liczb naturalnych, które mogą być nazwane przez takie wyrażenia. Istnieje zatem najmniejsza liczba naturalna, dla której nie ma w języku polskim nazwy złożonej z mniej niż tysiąca liter. Nazwijmy ją liczbą Berry'ego i oznaczmy przez b. Tymczasem właśnie wyrażenie: „najmniejsza liczba naturalna, dla której nie ma w języku polskim nazwy złożonej z mniej niż tysiąca liter" nazywa tę liczbę i ma mniej niż tysiąc liter, bo tylko 88. Doszliśmy w ten sposób do sprzeczności.

Dla lepszego zrozumienia a. Berry'ego przeanalizujmy ją. Zauważmy najpierw, że rozumowanie to przeprowadza się na terenie potocznego języka polskiego. Język ten oznaczmy przez JP. Zauważmy następnie, że nazwy liczb takie jak: dziesięć, liczba równa ilości miast w Polsce itp. są wyrażeniami tzw. przedmiotowego języka polskiego, tzn. języka, którego wyrażenia odnoszą się wyłącznie do obiektów pozajęzykowych. Język ten oznaczmy przez J. W języku JP (tym bardziej w języku J) jest nieskończenie wiele nazw liczb naturalnych. Jeśli jednak rozpatrywać będziemy wyrażenia języka JP (J) o ograniczonej długości, np. składające się z mniej niż tysiąca liter, to ilość takich nazw jest skończona. Tym bardziej skończona jest ilość liczb naturalnych, które mogą być nazwane przez wyrażenia języka JP. Istnieje zatem najmniejsza liczba naturalna spośród tych, które nie mogą być nazwane przez wyrażenia języka JP. Liczbę tę oznaczmy przez b. Zatem (1) b jest liczbą naturalną, która w języku JP nie ma nazwy. Ale wyrażenie: (*) „najmniejsza liczba naturalna, dla której w języku JP nie ma nazwy składającej się z mniej niż tysiąca liter" nazywa tę liczbę. Zatem (2) b jest liczbą naturalną, która w języku JP ma nazwę. (1) i (2) są sprzeczne. Zauważmy jednakże, że wyrażenie (*) jest nazwą liczby naturalnej b, ale nazwą nie należącą do języka J, lecz do tzw. metajęzyka języka przedmiotowego, tzn. języka, którego wyrażenia odnoszą się także do wyrażeń języka przedmiotowego. Metajęzyk języka J oznaczmy przez MJ. Zatem liczba naturalna b nie ma nazwy w języku J, lecz ma ją w języku MJ. Można by więc powątpiewać, czy rzeczywiście mamy do czynienia ze sprzecznością. Twierdzę, że mamy. A oto uzasadnienie tego stwierdzenia. A. Berry' ego przeprowadzamy — jak stwierdziliśmy — na terenie potocznego języka polskiego, który jest sumą języków J i MJ. Zatem JP = J $\cup$ MJ. A na terenie JP liczba naturalna b ma swoja nazwę i zarazem jej nie ma. Gdyby jednak zamiast wyrażenia (*) użyć zwrotu: „najmniejsza liczba naturalna, dla której nie ma w języku J nazwy składającej się z mniej niż tysiąca liter", wtedy liczba naturalna b nie miałaby swojej nazwy w języku J, lecz miałaby ją w języku MJ. Nie prowadziłoby to wtedy do sprzeczności. Taka jednak modyfikacja a. Berry'ego kłóciłaby się z tym, że rozumowanie to celowo zostało przeprowadzone na terenie potocznego języka polskiego JP, który — jak stwierdziliśmy — jest sumą języków J i MJ.

Kolej na a. Richarda. Antynomia ta ma kilka wersji. Najbardziej znana — jest następującym rozumowaniem. Bierzemy pod uwagę wszystkie różnokształtne definicje sformułowane w języku polskim (JP) i definiujące własności liczb naturalnych, jak np. bycie liczbą parzystą, bycie liczbą pierwszą itp. Definicje te porządkujemy np. leksykograficznie. Tworzymy następnie ciąg nieskończony

(1) D1, D2, ..., którego wyrazami są owe definicje.

Tworzymy nowy ciąg nieskończony

(2) W1, W2, ... taki, że wyraz W_n tego ciągu, dla dowolnego *n*, jest własnością określoną przez definicję D_n z ciągu (1).

Jeśli k jest pewną liczbą naturalną, to bądź k ma własność W_k, bądź liczba ta własności tej nie ma. Załóżmy np., że $k = 17$ i że D_{17} jest następującą definicją: x jest liczbą pierwszą wtedy i tylko wtedy, gdy x nie jest podzielne przez żadną liczbę z wyjątkiem 1 i siebie samej. W_{17} jest zatem własnością: bycie liczbą pierwszą.

Załóżmy teraz, że r = 15 i że D_r jest następującą definicją: x jest kwadratem pewnej liczby naturalnej wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje taka liczba naturalna, że x jest iloczynem owej liczby przez nią samą. W_{15} jest zatem własnością: być kwadratem pewnej liczby naturalnej. Liczba 15 nie jest kwadratem żadnej liczby naturalnej, nie ma więc własności W_{15}.

Weźmy pod uwagę wyrażenie:

(R) x ma własność (S) R wtedy i tylko wtedy, gdy nieprawda, że x ma własność(T) Wx, dla dowolnego naturalnego x.

Wyrażenie (R) jest definicją pewnej własności liczb naturalnych. Jest ono zatem jedną z definicji ciągu (1). A skoro każdej definicji tego ciągu odpowiada jakaś własność z ciągu (2), więc R jest jedną z własności ciągu (2). To z kolei znaczy, że istnieje taka liczba naturalna p, że $R = W_p$. Stąd i z definicji (R) wynika:

(S) x ma własność W_p wtedy i tylko wtedy, gdy nieprawda, że x ma własność$_1$ W_x, dla wszelkich x. Zdanie (S) możemy zapisać (X) w sposób częściowo symboliczny następująco: $W_p(x) \equiv \sim W_x(x)$, dla wszelkich x. Po prawej stronie powyższej równoważności występuje orzecznik zależny od zmiennego parametru Wx. Z (S) przez opuszczenie kwantyfikatora oraz podstawienie p za x otrzymujemy, iż $W_p(p) \equiv \sim W_p(p)$, co znaczy, że liczba naturalna p ma własność W_p wtedy i tylko wtedy, gdy liczba ta nie ma owej własności. Otrzymaliśmy zatem sprzeczność.

Przypomnijmy na koniec rozumowanie zwane a. Grellinga.

Bierzemy tym razem pod uwagę wszystkie przymiotniki języka polskiego (JP), które mają tę własność, o której mówią. Np. przymiotnik „polski" jest polski, a przymiotnik „krótki" jest krótki, także przymiotnik „pięciozgłoskowy" jest pięciozgłoskowy. Przymiotniki takie nazywamy autologicznymi. Z kolei przymiotniki, które nie mają tej własności, o której mówią nazywa się heterologicznymi. Takimi są np. przymiotniki: „długi", „czterozgłoskowy", „czeski", itp.

Spytajmy teraz czy przymiotnik „heterologiczny" jest heterologiczny, czy autologiczny. Jeśli jest heterologiczny, to nie ma tej własności, o której mówi, a więc nie jest heterologiczny. Sprzeczność. Jeśli zaś jest autologiczny, to ma tę własność, o której mówi, a więc jest heterologiczny. Jest zatem autologiczny i heterologiczny zarazem, ma więc tę własność, o której mówi i zarazem jej nie ma. Sprzeczność.

ANALIZA ANTYNOMII: KŁAMCY, BERRY'EGO, RICHARDA I GRELLINGA

Analiza zaprezentowanych a. wskazuje, że są one entymematami, tzn. rozumowaniami, w których nie zostały ujawnione wszystkie przesłanki, i że tymi nieujawnionymi przesłankami owych a. są egzemplifikacje tzw. podstawowych zasad logiki klasycznej. I tak: analiza a. Eubulidesa wskazuje, iż owymi nieujawnionymi przesłankami tego rozumowania są supozycje, iż: — (e) jest prawdziwe lub (e) jest fałszywe, tj. egzemplifikacja zasady dwuwartościowości, tzn. założenia głoszącego, iż każde zdanie jest prawdziwe lub fałszywe,

— (e) nie jest zarazem prawdziwe i fałszywe, tj. egzemplifikacja założenia, które nazywamy logiczną zasadą niesprzeczności mocnej, głoszącego, iż żadne zdanie nie jest zarazem prawdziwe i fałszywe.

Analiza a. Richarda wskazuje zaś, że owymi nieujawnionymi przesłankami tego rozumowania są egzemplifikacje logicznych zasad:

— wyłączonego środka, tj. założenia głoszącego, iż z dowolnych dwu zdań postaci: „p" i „~ p" co najmniej jedno z nich jest prawdziwe oraz

— niesprzeczności, tj. założenia głoszącego, że z dowolnych dwu zdań postaci: „p" i „ ~ p" co najwyżej jedno z nich jest prawdziwe.

Analiza a. Grellinga wskazuje, iż owymi nieujawnionymi przesłankami tego rozumowania są egzemplifikacje:

— logicznych zasad: wyłączonego środka i niesprzeczności oraz

— ontologicznej zasady niesprzeczności, tj. założenia głoszącego, iż nie istnieje byt, który zarazem ma i nie ma jakiejś własności.

I wreszcie analiza a. Berry'ego wskazuje, iż rozumowanie to zakłada egzemplifikacje zasad niesprzeczności: logicznej i ontologicznej.

Dalsza analiza a. Eubulidesa pozwala sądzić, iż rozumowanie to jest argumentem przeciwko co najmniej jednej z logicznych zasad: dwuwartościowości lub niesprzeczności mocnej. Bo jeśli założymy zasadę dwuwartościowości oraz to, że a. Eubulidesa jest rozumowaniem poprawnym (a wszystko na to wskazuje), to prawdziwy jest wniosek tego rozumowania, iż istnieje zdanie zarazem prawdziwe i fałszywe; jest to mianowicie zdanie (e).

A to przeczy logicznej zasadzie niesprzeczności mocnej.

Jeśli zaś a. Berry'ego jest rozumowaniem poprawnym (a wszystko na to wskazuje), to prawdziwe jest i wniosek będący z kolei argumentem przeciwko ontologicznej zasadzie niesprzeczności. Wniosek ów podaje bowiem przykład bytu sprzecznego (liczby Berry'ego), który zarazem ma i nie ma pewnej własności (nazwy w języku polskim składającej się z mniej niż tysiąca liter). Antynomia ta jest więc nieformalnym dowodem fałszywości ontologicznej zasady niesprzeczności, a na pewno kolejnym, bardzo mocnym argumentem przeciwko tej zasadzie, zaś zdanie: „b jest najmniejszą liczbą naturalną, dla której nie ma w języku polskim nazwy złożonej z mniej niż tysiąca liter" jest kolejnym przykładem zdania zarazem prawdziwego i fałszywego, fałszywego, a więc kolejnym zdaniem przeczącym logicznej zasadzie niesprzeczności mocnej.

Jeśli z kolei a. Richarda jest rozumowaniem poprawnym (a też wszystko na to wskazuje), to i wniosek tego rozumowania (tj. równoważność $W_p(p) \equiv \sim Wp(p)$ jest prawdziwa. Jednakże równoważność ta nie może być rozumiana klasycznie, gdyż byłaby ona wtedy podstawieniem kontrtautologii, a więc wyrażeniem fałszywym. Równoważność tę należy rozumieć nieklasycznie.

Powyższa równoważność jest prawdziwa, gdy:

(1) zdania: (a) liczba naturalna p ma własność W_p,

(b) liczba naturalna p nie ma własności W_p, są zarazem prawdziwe, lub

(2) zdania te są zarazem fałszywe, lub

(3) zdania te nie są ani prawdziwe, ani fałszywe, lub

(4) zdania te są zarazem prawdziwe i fałszywe.

W przypadku (1) zdania (a) i (b) są przykładami zdań zarazem prawdziwych postaci: „p" i „~ p", podważają więc one logiczną zasadę niesprzeczności, a liczba naturalna p jest kolejnym obiektem przeczącym ontologicznej zasadzie niesprzeczności.

W przypadku (2) zdania te, jako zarazem fałszywe, podważają z kolei zasadę wyłączonego środka.

W przypadku (3) zdania te podważają zasady dwuwartościowości i wyłączonego środka.

W przypadku (4) wreszcie zdania te podważają zasadę niesprzeczności mocnej.

A. Grellinga symbolicznie można by zapisać w postaci trzech następujących wyrażeń:

1. $\forall p\, [H(p) \vee A(p)]$,

2. $H(h) \rightarrow \sim H(h)$,

3. $A(h) \rightarrow H(h)$, gdzie p oznacza dowolny przymiotnik języka polskiego JP, h — przymiotnik „heterologiczny", H i A — własności wyrażeń języka polskiego JP bycia odpowiednio: heterologicznym i autologicznym.

Z 1. otrzymujemy 4. $H(h) \vee A(h)$. Załóżmy, że przymiotnik „heterologiczny" nie jest heterologiczny, tzn., że $\sim H(h)$. Stąd i z 4. mamy, iż $A(h)$, tzn., że przymiotnik ten jest autologiczny. Otrzymujemy zatem: $\sim H(h) \rightarrow A(h)$. Z tego ostatniego i 3. mamy: $\sim H(h) \rightarrow H(h)$. Z tego ostatniego i z 2. wynika, że: $H(h) \equiv \sim H(h)$. Jeśli zatem a. Grellinga jest rozumowaniem poprawnym (a nic nie wskazuje, ze jest inaczej), to wniosek tego rozumowania tj. ostatnia równoważność, jest prawdziwa. Nie można jej jednakże rozumieć klasycznie, gdyż byłaby ona wtedy fałszywa (jako podstawienie kontrtautologii). Należy ją rozumieć nieklasycznie. Zatem jest ona prawdziwa, gdy:

I. obie strony tej równoważności są prawdziwe, lub

II. obie strony tej równoważności są fałszywe, lub

III. obie strony tej równoważności nie są ani prawdziwe, ani fałszywe, lub

IV. obie strony tej równoważności są zarazem prawdziwe i fałszywe.

W przypadku I. strony owej równoważności podważają logiczną zasadę niesprzeczności, a przymiotnik „heterologiczny" jest kolejnym bytem przeczącym ontologicznej zasadzie niesprzeczności, jako że jest on heterologiczny i zarazem nie ma tej własności.

W przypadku II. strony te, jako zarazem fałszywe, podważają z kolei zasadę wyłączonego środka.

W przypadku III. podważone są zasady: dwuwartościowości i wyłączonego środka, a w przypadku IV. — zasada niesprzeczności mocnej. Zatem a. semantyczne są nieformalnymi dowodami fałszywości tzw. „podstawowych" zasad myślenia i bytu. Są one ponadto poważnym uzasadnieniem budowy logik, w których co najmniej jedna z owych „podstawowych" zasad logicznych nie obowiązuje. Dodajmy od razu, że logiki te „rozwiązują" owe a. I tak: na gruncie logik, w teraz których nie obowiązują zasady dwuwartościowości lub wyłączonego środka, a. semantyczne, których nieujawnionymi przesłankami są egzemplifikacje owych zasad, są rozumowaniami niepoprawnymi. Logiki zaś, w których obowiązują owe zasady, lecz nie przyjmuje się zasad niesprzeczności sankcjonują z kolei te a. Na gruncie takich logik a. te są formalnie poprawne i nie prowadzą do sprzeczności owych logik.

NIHILISTYCZNE RACHUNKI ZDAŃ: N2′, N3′ I N4′

Z wielu różnych logik, nie przyjmujących co najmniej jednej z owych „podstawowych" zasad, pobieżnie przedstawimy teraz tylko trzy: n2′, n3′ i n4′. Dokładniej rachunki te są omówione w [Żabski 2001]. Najpierw przedstawimy pierwszy z tych rachunków, tj. n2′. Rachunek ten dopuszcza trzy rodzaje zdań: prawdziwe (1), fałszywe (0) oraz nieokreślone, tzn. ani prawdziwe, ani fałszywe (–1). Terminami pierwotnymi języka n2′ są symbole: ~, ∨, ∧, →, T, F, N, czytane odpowiednio: „nieprawda, że"; „lub"; „i"; „jeśli, to"; „prawdą jest, że"; „fałszem jest, że"; „nieokreślone jest, że".

Znaczenie tych znaków w n2′ określone jest przez następujące tabelki:

α	$\sim\alpha$	$T\alpha$	$F\alpha$	$N\alpha$
–1	–1	0	0	1
0	1	0	1	0
1	0	1	0	0

$\alpha \wedge \beta$	–1	0	1
–1	–1	–1	–1
0	–1	0	0
1	–1	0	1

$\alpha \vee \beta$	–1	0	1
–1	–1	0	1
0	0	0	1
1	1	1	1

$\alpha \rightarrow \beta$	–1	0	1
–1	1	1	1
0	1	1	1
1	0	0	1

Wartością wyróżnioną w n2′ jest 1.

Tautologią n2′ jest każde i tylko takie wyrażenie języka n2′, które przy dowolnym wartościowaniu przyjmuje wartość wyróżnioną. Łatwo zauważyć, że:

1. w n2′ nie obowiązuje zasada dwuwartościowości, bowiem prócz zdań prawdziwych i fałszywych dopuszcza się także zdania nieokreślone, tzn. ani prawdziwe, ani fałszywe,

2. w rachunku tym nie obowiązuje też zasada wyłączonego środka, bowiem jeśli α jest zdaniem nieokreślonym, to ani ono, ani jego negacja nie są prawdziwe.

Łatwo sprawdzić, że:

1. tautologią tego rachunku nie jest żadna z alternatyw:
$p \vee \sim p$, $\mathrm{T}p \vee \mathrm{F}p$, $\mathrm{T}p \vee \mathrm{T} \sim p$, $\mathrm{F}p \vee \mathrm{F} \sim p$.

2. tautologiami zaś rozważanego rachunku są np. następujące alternatywy:
$p \vee \sim p \vee \mathrm{N}p$, $\mathrm{T}p \vee \mathrm{F}p \vee \mathrm{N}p$, $\mathrm{T}p \vee \mathrm{T} \sim p \vee \mathrm{N}p$, $\mathrm{T}p \vee \sim \mathrm{T}p$, $\mathrm{F}p \vee \sim \mathrm{F}p$, $\mathrm{N}p \vee \sim \mathrm{N}p$.

Przedstawimy teraz drugi z zapowiadanych rachunków, tj. n3′. Rachunek ten także dopuszcza trzy rodzaje zdań: prawdziwe (1), fałszywe (0) oraz niejednoznaczne, tzn. prawdziwe, których negacje są także prawdziwe. Terminami pierwotnymi języka n3′ są znaki: ~, ∨, ∧, →, T, F czytane tak, ja w n2′ oraz symbol M czytany: „niejednoznaczne jest, że".

Sens tych symboli w n3′ ustalony jest przez następujące matryce:

α	$\sim\alpha$	$\mathrm{T}\alpha$	$\mathrm{F}\alpha$	$\mathrm{N}\alpha$
0	1	0	1	0
½	½	1	0	1
1	0	1	0	0

$\alpha \wedge \beta$	0	½	1
0	0	0	0
½	0	½	½
1	0	½	1

$\alpha \vee \beta$	0	½	1
0	0	½	1
½	½	½	1
1	1	1	1

$\alpha \to \beta$	0	½	1
0	1	1	1
½	0	1	1
1	0	1	1

Wartościami wyróżnionymi w n3′ są: ½ oraz 1.

Tautologią n3′ jest każde i tylko takie wyrażenie języka n3′, które przy dowolnym wartościowaniu przyjmuje wartość wyróżnioną.

Łatwo sprawdzić, że koniunkcja $p \wedge \sim p$ nie jest kontrtautologią n3′, tzn. wyrażeniem przyjmującym wartość 0 przy każdym wartościowaniu. W rachunku tym zatem dopuszcza się prawdziwość pewnego zdania „p", jak i jego negacji. Znaczy to, że w rachunku tym nie obowiązuje zasada niesprzeczności.

Łatwo też sprawdzić, że tautologiami tego rachunku nie jest żadna z implikacji:
$(p \wedge \sim p) \to q$, $p \to (\sim p \to q)$, $\sim p \to (p \to q)$.

Zaprezentujemy wreszcie trzeci z nihilistycznych rachunków zdań, tj. n4′. Rachunek ten dopuszcza cztery rodzaje zdań: tylko prawdziwe (1), tylko fałszywe (0), niejednoznaczne, tzn. zarazem prawdziwe i fałszywe (″) oraz nieokreślone, tzn. ani prawdziwe, ani fałszywe (–1).

Terminami pierwotnymi języka n4′ są wszystkie znaki języka n2′, nadto symbol M. Sens tych terminów w n4′ ustalony jest przez następujące matryce:

α	$\sim\alpha$	$\mathrm{T}\alpha$	$\mathrm{F}\alpha$	$\mathrm{M}\alpha$	$\mathrm{N}\alpha$
–1	–1	0	0	0	1
0	1	0	1	0	0
½	½	1	1	1	0
1	0	1	0	0	0

$\alpha \wedge \beta$	–1	0	½	1
–1	–1	–1	–1	–1
0	–1	0	0	0
½	–1	0	½	½
1	–1	0	½	1

$\alpha \vee \beta$	–1	0	½	1
–1	–1	0	½	1
0	0	0	½	1
½	½	½	½	1
1	1	1	1	1

$\alpha \to \beta$	–1	0	½	1
–1	1	1	1	1
0	1	1	1	1
½	0	0	1	1
1	0	0	1	1

Wartościami wyróżnionymi w n4′ są: ½ i 1.

Tautologią n4′ jest każde i tylko takie wyrażenie języka n4′, które przy dowolnym wartościowaniu przyjmuje jedną z wartości wyróżnionych.

Łatwo sprawdzić, że koniunkcje: $p \wedge \sim p$ oraz $\mathrm{T}p \wedge \mathrm{F}p$ nie są kontrtautologiami n4', tzn. wyrażeniami przyjmującymi wartości różne od wartości wyróżnionych przy każdym wartościowaniu. W systemie tym bowiem dopuszcza się zdania prawdziwe, których negacje są także prawdziwe (co przeczy zasadzie niesprzeczności), jak i zdania, które zarazem są prawdziwe i fałszywe (co podważa zasadę niesprzeczności mocnej). Nie prowadzi to jednakże do sprzeczności n4′, gdyż żadna z implikacji: $(p \wedge \sim p) \rightarrow q$, $p \rightarrow (\sim p \rightarrow q)$, $\sim p \rightarrow (p \rightarrow q)$, $(\mathrm{T}p \wedge \mathrm{F}p) \rightarrow q$, $\mathrm{T}p \rightarrow (\mathrm{F}p \rightarrow q)$, $\mathrm{F}p \rightarrow (\mathrm{T}p \rightarrow q)$ nie jest tautologią tego rachunku.

„ROZWIĄZANIA" A. KŁAMCY, BERRY'EGO, RICHARDA I GRELLINGA

Powtórzmy, że a. kłamcy, Berry'ego, Richarda i Grellinga są nieformalnymi dowodami fałszywości co najmniej jednej z „podstawowych" zasad logiki klasycznej. Zakładając bowiem zasady dwuwartościowości i wyłączonego środka a. te pozwalają dowieść dwóch zdań postaci: „p" i „~ p", czyli podważają zasadę niesprzeczności. Zatem albo zasady dwuwartościowości i wyłączonego środka nie są ogólnie prawdziwe, albo trzeba odrzucić zasadę niesprzeczności. Np. zakładając zasady dwuwartościowości i wyłączonego środka, których konsekwencją jest to, że zdanie eubulidesowe jest prawdziwe lub fałszywe, a. kłamcy dowodzi, iż zdanie to jest zarazem prawdziwe i fałszywe, co przeczy obu logicznym zasadom niesprzeczności. Na przykładzie owego zdania eubulidesowego podamy formalne dowody fałszywości zasad dwuwartościowości i wyłączonego środka lub niesprzeczności. Dokładniej:

udowodnimy, że:

(1) na gruncie n2′ zdanie to nie jest ani prawdziwe, ani fałszywe (co przeczy zasadzie dwuwartościowości) oraz ani ono, ani jego negacja nie są prawdziwe (co przeczy zasadzie wyłączonego środka),

(2) na gruncie n3′ zdanie to oraz jego negacja są zarazem prawdziwe (co przeczy zasadzie niesprzeczności),

(3) na gruncie n 4′zdanie to jest albo prawdziwe i fałszywe zarazem (co przeczy zasadom niesprzeczności), albo ani ono, ani jego negacja nie są ani prawdziwe, ani fałszywe (co przeczy zasadom dwuwartościowości i wyłączonego środka).

Udowodnijmy najpierw na gruncie n2′, że zdanie eubulidesowe nie jest ani prawdziwe, ani fałszywe, oraz że ani ono, ani jego negacja nie są prawdziwe. Antynomię kłamcy symbolicznie zapisać można w postaci dwóch następujących implikacji:

1. $\mathrm{e} \rightarrow \sim \mathrm{e}$, 2. $\sim \mathrm{e} \rightarrow \mathrm{e}$, gdzie e oznacza zdanie eubulidesowe.

Łatwo sprawdzić, że tautologiami n2′ są następujące wyrażenia języka n2′:

3.$(p \to \sim p) \to \sim Tp$, 4. $(\sim p \to p) \to \sim Fp$, 5. $(\sim Tp \equiv \sim Fp) \to (\sim Tp \equiv \sim T \sim p)$.

Z 3.,4. i 5. otrzymujemy odpowiednio:

6. $(e \to \sim e) \to \sim Te$, 7. $(\sim e \to e) \to \sim Fe$, 8. $(\sim Te \equiv \sim Fe) \to (\sim Te \wedge \sim T\sim e)$. Z 6. i 1. otrzymujemy 9. $\sim Te$. Z 7. i 2. — 10. $\sim Fe$. Z 9. i 10. — 11. $\sim Te \wedge \sim Fe$, co znaczy, że zdanie eubulidesowe nie jest ani prawdziwe, ani fałszywe i przeczy zasadzie dwuwartościowości.

Z 8. i 11. wynika z kolei: $\sim Te \wedge \sim T\sim e$, co znaczy, że ani zdanie eubulidesowe, ani jego negacja nie są prawdziwe, co przeczy zasadzie wyłączonego środka.

Udowodnimy teraz na gruncie n3′, że zarówno zdanie eubilidesowe, jak i jego negacja są prawdziwe. Antynomię kłamcy zapisujemy tak jak poprzednio, tzn. w postaci dwóch implikacji:

1. $e \to \sim e$, 2. $\sim e \to e$.

Łatwo sprawdzić, że tautologiami n3′ są następujące wyrażenia języka n3′: 3. $(\sim p \to p) \to p$, 4. $(p \to \sim p) \to (Fp \to Mp)$, 5. $Fp \to T\sim p$, 6. $Mp \to T \sim p$, 7. $(p \to r) \to [(q \to r) \to (p \vee q) \to r]$.

Z 3., 4., 5., 6., 7. mamy odpowiedni: 8. $(\sim e \to e) \to e$, 9. $(e \to \sim e) \to Fe \vee Me$, 10. $Fe \to T \sim e$, 11. $Me \to T \sim e$, 12. $(Fe \to T \sim e) \to [(Me \to T\sim e) \to (Fe \vee Me) \to T\sim e]$.

Z 8. i 2. wynika 13. Te. Z 9., 1. mamy 14. $Fe \equiv Me$. Z 12., 10., 11. i 14. wynika $T\sim e$. Z tego ostatniego i 13. wynika, iż $Te \wedge T\sim e$, co znaczy, że zarówno zdanie eubulidesowe jak i jego negacja są prawdziwe, co kończy dowód i przeczy zasadzie niesprzeczności.

Udowodnimy wreszcie na gruncie n4′, że zdanie eubulidesowe jest zarazem prawdziwe i fałszywe oraz ze zarówno ono, jak jego negacja są prawdziwe, co przeczy obu zasadom niesprzeczności, albo, że nie jest ono ani prawdziwe, ani fałszywe oraz, że ani ono, ani jego negacja nie są prawdziwe, co przeczy zasadom dwuwartościowości i wyłączonego środka.

Antynomię kłamcy zapisujemy tak jak poprzednio, tzn.:

1. $e \to \sim e$, 2. $\sim e \to e$.

Łatwo sprawdzić, że tautologiami n4` są następujące wyrażenia języka n4′:

3. $(p \to \sim p) \to \{(\sim p \to p) \to [Tp \wedge Fp) \vee (\sim Tp \sim \wedge \sim Fp)]\}$.

4. $(Tp \wedge Fp) \to (Tp \wedge T\sim p)$, 5. $(\sim Tp \wedge\sim Fp) \to (\sim Tp \wedge \sim T\sim p)$.

Z 3., 4., i 5. wynika odpowiednio:

6. $(e \to \sim e) \to \{(\sim e \to e) \to [(Te \wedge Fe) \vee (\sim Te \wedge \sim Fe)]\}$.

7. $(Te \wedge Fe) \to (Te \wedge T\sim e)$, 8. $(\sim Te \wedge \sim Fe) \to (\sim Te \wedge \sim T \sim e)$.

Z 6., 1., i 2. wynika 9. $(Te \wedge Fe) \vee (\sim Te \wedge \sim Fe)$, co znaczy, że zdanie eubulidesowe jest zarazem prawdziwe i fałszywe, albo nie jest ono ani prawdziwe, ani fałszywe. W pierwszym przypadku przeczy to zasadzie niesprzeczności mocnej, w drugim — zasadzie dwuwartościowości.

(1) Jeśli e przeczy zasadzie niesprzeczności mocnej, to podważa tym samym zasadę niesprzeczności.

(2) Jeśli zaś przeczy ona zasadzie dwuwartościowości, to przeczy też zasadzie wyłączonego środka.

Udowodnimy najpierw (1). Załóżmy, że e przeczy zasadzie niesprzeczności mocnej, tzn., że Te ∧ Fe. Stąd i 7. wynika, że Te ∧ T ~ e, znaczy to, iż zarówno e, jak i jego negacja są zarazem prawdziwe, przeczy to zasadzie niesprzeczności.

Udowodnimy teraz (2). Załóżmy zatem, że e przeczy zasadzie dwuwartościowości, tzn., że ~ Te ∧ ~ Fe. Stąd i z 8. wynika, iż ~ Te ∧ ~ T ~ e, co znaczy, że ani e, ani jego negacja nie są prawdziwe, a to przeczy zasadzie wyłączonego środka i kończy dowód.

Zatem n3′ sankcjonuje a. kłamcy, gdyż na gruncie tego rachunku a. ta jest rozumowaniem poprawnym i nie prowadzi do sprzeczności tego rachunku. Na gruncie jednak n2′ i n4′ a. ta jest rozumowaniem niepoprawnym, gdyż zakłada ona egzemplifikacje zasad dwuwartościowości i wyłączonego środka tj. zakłada prawdziwość alternatyw: e ∨ ~ e (Te ∨ Fe) i Te ∨ T ~ e. Tymczasem — łatwo sprawdzić — żadna z alternatyw: $p \vee \sim p$, Tp ∨ Fp, Tp ∨ T ~ p nie jest tautologią ani n2′, ani n4′. Także pozostałe z zaprezentowanych a. możemy „rozwiązać" tak, jak „rozwiązaliśmy" a. kłamcy na dwa sposoby. Sposób pierwszy polega na tym, że kwestionujemy zasady dwuwartościowości lub wyłączonego środka. Antynomie oparte na egzemplifikacjach tych zasad są wtedy niepoprawne. Np. a. Grellinga oparta jest na przesłance, iż każdy przymiotnik ma własność, o której mówi, lub nie ma jej. Przesłanka ta została przyjęta na mocy zakładanej zasady wyłączonego środka. Ta zaś jest wątpliwa. Kwestionując zasadę wyłączonego środka, podważamy prawdziwość owej przesłanki, a tym samym poprawność a. Grellinga. Odrzucając zasadę wyłączonego środka, wykazujemy w ten sposób niepoprawność każdego rozumowania opartego na tej zasadzie.

Ani zasada dwuwartościowości, ani zasada wyłączonego środka — powtórzmy to — nie obowiązują ani w n2′, ani w n4′. Zatem na gruncie tych rachunków a. Grellinga (i inne oparte na zasadzie wyłączonego środka) nie są rozumowaniami poprawnymi.

Inny sposób „rozwiązania" a. semantycznych polega z kolei na ich usankcjonowaniu, tzn. na zbudowaniu logiki, w której nie obowiązuje zasada niesprzeczności. Na gruncie takiej logiki uznać można za prawdziwe zarówno jakieś zdanie jak i jego negację, np. takie:

— „b jest najmniejszą liczbą naturalną, dla której nie ma w języku polskim nazwy złożonej z mniej niż tysiąca liter" (z a. Berry'ego),

— „liczba naturalna p ma własność W_p" (z a. Richarda),

— „przymiotnik „heterologiczny"jest heterologiczny" (z a. Grellinga).

Zasada niesprzeczności nie obowiązuje — powtórzmy to w n3′. Na gruncie tego rachunku zatem wszystkie a., w których dowodzi się zdania „p" i jego negacji, są usankcjonowane. Na gruncie n3' usankcjonowane są zatem a.: kłamcy, Berry'ego, Richarda oraz Grellinga.

UWAGI KOŃCOWE

Miałby niewątpliwie racje ten, kto, twierdziłby, że w „rozwiązaniu" a. pomogły nam logiki nihilistyczne i, że gdybyśmy nie skorzystali z tych logik, a. te pozostałyby „nierozwiązane". Miałby rację także ten, kto twierdziłby, że logiki nihilistyczne wchodzą w pewien konflikt z logiką klasyczną i naszymi intuicjami. Nie jest jednak pewne, czy nasze intuicje i logika klasyczna są „jedynie słuszne". Wolno nam w to mocno wątpić. A skoro wnioskując w oparciu o logikę klasyczną dochodzimy do nie dających się „tolerować" (na gruncie tej logiki) sprzeczności, a przeprowadzając to samo rozumowanie w oparciu o logiki nihilistyczne sprzeczności te możemy usankcjonować, albo wykazać iż a. te są rozumowaniami niepoprawnymi na gruncie tych logik, to — wydaje się — rachunki nihilistyczne, mimo „mankamentów", o których wspomnieliśmy, są lepszymi podstawami owych rozumowań.

Dodajmy też, że nieuzasadnione jest przekonanie, iż logiki już istniejące skonstruowane z myślą o rozwiązywaniu pewnych zagadnień, z konieczności muszą być poprawnym narzędziem do rozwiązywania każdego innego problemu. Gdy chcemy zastosować jakiś rachunek, do rozwiązania jakiegoś zagadnienia, to nikt nie może zwolnić nas od pytania, czy do rozwiązania tego problemu rachunek ten nadaje się, czy nie. Z tego, że logika klasyczna doskonale nadaje się do formalizacji rozumowań przeprowadzanych na terenie matematyki, nie wynika, iż logikę tę równie dobrze stosować można „na co dzień", i że w szczególności jest ona dobrym ugruntowaniem dla a. semantycznych.

BIBLIOGRAFIA

Borkowski L. (1970), *Logika formalna. Systemy logiczne. Wstęp do metalogiki*, Warszawa 1970, PWN.

Krajewski S. (1987), *Antynomie* [w:] *Logika formalna. Zarys encyklopedyczny*, red. W. Marciszewski, Warszawa 1987,.PWN, s. 174-181.

Żabski E. (2001), *Logiki nihilistyczne, czyli teorie prawd „powierzchownych" i „głębokich"*, Wrocław 2001, Oficyna Wydawnicza Politechniki Wrocławskiej.