Piotr Labenz

Kilka uwag o rachunku cech

Filozofia Nauki 13/1, 91-97

2005

Filozofia Nauki
Rok XIII, 2005, Nr 1(49)

Piotr Labenz

Kilka uwag o rachunku cech

Choć notorycznie niejasne, pojęcie cechy jest powszechnie używane przez filozofów. Wzdragają się oni przed zastąpieniem go jasnym pojęciem zbioru, bo zbiory nie odpowiadają pewnym intuicjom, którym cechy, owszem, odpowiadają. Po pierwsze, cechy są nieekstensjonalne — to znaczy, dwie cechy o tej samej ekstensji mogą być nieidentyczne (a zbiory nie). Po drugie, cechy mogą przysługiwać samym sobie (a zbiory nie). Po trzecie, do jednego zbioru mogą należeć dowolnie rozmaite przedmioty — więc wiele zbiorów nie odpowiada żadnym intuicyjnie dopuszczalnym cechom. (To ostatnie można określić za Bealerem [1982, s. 106] mianem problemu „niewidzialnej foliowej torby".)

Wobec tego próbuje się uściślić pojęcie cechy, konstruując systemy formalne je opisujące — rachunki cech (np. [Bealer 1982], [Żabski 1982], [Żabski 1987], [Żabski 1988], [Zalta 1988]). Chcemy tu przyjrzeć się jednemu z takich rachunków, mianowicie systemowi *C* Żabskiego [1982]. Najpierw pokrótce ów formalizm naszkicujemy i wskażemy na pewne trudności. Następnie zastanowimy się nad filozoficznymi aspektami podawanego przez Żabskiego uzasadnienia — koncentrującego się na problemie nieekstensjonalności. Doprowadzi to nas do kilku krytycznych wniosków wobec systemu *C* w szczególności, ale nie bez odniesienia do rachunków cech w ogóle.

1. UWAGI FORMALNE

Najpierw streścimy na podstawie [Żabski 1982] język i aksjomatykę systemu *C*. Następnie zaproponujemy pewną jego niezamierzoną interpretację, pokazującą, że system *C* jest za słaby, by uchwycić zamierzone intuicje. Przy okazji wskażemy na to, że dopuszcza on typikalne mieszańce. W końcu rozważymy trudności z kilkoma z twierdzeń *C*.

1.1. System C

Język L_C systemu C określony jest standardowo, ze zbiorem zmiennych **U**, kwantyfikatorami, spójnikami logicznymi, funkcjami $\cap$, $\cup$ i $'$, stałymi 0 i 1 oraz dwoma predykatami: jednoargumentowym C i dwuargumentowym P. Można je czytać jako odpowiednio: „jest cechą" i „przysługuje", bo taka jest zamierzona ich interpretacja. System ma osiemnaście aksjomatów, w tym:

A1. $\forall x\, \forall y\, (P(x, y) \rightarrow C(x))$

A2. $\exists x\, \exists y\, (C(x) \wedge C(y) \wedge x \neq y \wedge \forall z\, (P(x, z) \leftrightarrow P(y, z)))$

A11. $\forall x\, \forall y\, \forall z\, (C(x) \wedge C(y) \rightarrow (P(x \cup y, z) \leftrightarrow (P(x, z) \vee P(y, z)))$

A12. $\forall x\, \forall y\, \forall z\, (C(x) \wedge C(y) \rightarrow (P(x \cap y, z) \leftrightarrow (P(x, z) \wedge P(y, z)))$

A13. $\forall x\, (C(x) \rightarrow \forall y\, (P(x', y) \leftrightarrow \neg P(x, y)))$

A14. $\forall x\, \forall y\, (C(x \cup y) \leftrightarrow C(x) \wedge C(y))$

A15. $\forall x\, \forall y\, (C(x \cap y) \leftrightarrow C(x) \wedge C(y))$

A16. $\forall x\, (C(x') \leftrightarrow C(x))$

A17. $\forall x\, P(1, x)$

A18. $C(0) \wedge \forall x\, \neg P(0, x)$

Pozostałe aksjomaty (A3-A10) określają $\mathfrak{C} = \langle \mathbf{C}, \cap, \cup, ', 0, 1\rangle$, gdzie $\mathbf{C} = \{x|C(x)\}$ jako algebrę Boole'a.

1.2. Interpretacje

Rozważmy następującą interpretację I systemu C. Niech zbiór H rozpada się na dwa rozłączne, jednoelementowe podzbiory H_1, H_2 i niech interpretacje zmiennych z **U** przebiegają zbiór $\wp(H) = \{H, H_1, H_2, \varnothing\}$; wówczas $I(1) = H$, $I(0) = \varnothing$. Dalej, pisząc „V" na prawdę, niech:

$I(C(x))$ = V wtw, gdy $I(x) = I(x)$,

$I(\mathrm{P}(x,y))$ = V wtw, gdy $\exists z\, (I(z) = I(x) \cap I(y) \wedge I(z) \neq I(x) \wedge (I(z) = \varnothing \rightarrow I(y) = \varnothing))$.

(Oczywiście równoważności te nie są sformułowane w L_C, ale w metajęzyku.) Pozostałe składowe języka L_C niech będą interpretowane standardowo, jako $\cup^I$, $\cap^I$ itd.

Przy interpretacji I aksjomaty systemu C są spełnione: A1 trywialnie, bo jego następnik jest przy I tautologią. Z kolei A2 jest spełnione dla $I(x) = H_1$, $I(y) = H_2$ (wtedy bowiem $I(P(x,z))$ = V tylko dla $I(z) = \varnothing$ oraz $I(P(y,z))$ = V tylko dla $I(z) = \varnothing$; zatem $\forall z\, (P(x,z) \leftrightarrow P(y,z))$). Że spełnione są A11-A18, Czytelnik łatwo przekona się sam. Natomiast A3-A10 są spełnione, bo interpretująca je struktura $\mathfrak{C}^I = \langle \wp(H), \cap^I, \cup^I, {}^{\prime I}, \varnothing, H \rangle$ jest ciałem podzbiorów H, a zatem jest izomorficzna z $\mathfrak{C}$ będącym algebrą Boole'a.[1]

Zatem I jest dopuszczalną interpretacją systemu C; wydaje się jednak, że trudno ją uznać za zamierzoną. Nie chodzi nawet o to, czy sposób, w jaki I interpretuje predykaty wyróżnione P i C oddaje zamierzone rozumienia: „przysługuje" i „jest cechą". Poważniejszym zarzutem wydaje się to, że chociaż Żabski pisze, że „aksjomat A2 stwierdza istnienie co najmniej dwóch cech koekstensywnych" (a nieidentycznych) [1982: 236] — to przy I nie ma żadnych cech koekstenstwnych. Innymi słowy, wbrew swojemu przeznaczeniu system C nie musi wcale negować teoriomnogościowego aksjomatu ekstensjonalności.

Dlaczego jest tak przy I, mimo że A2 jest tam spełniony? Otóż wprawdzie spełniają go H_1 i H_2, ale są one nieidentyczne nie dlatego, że są (intensjonalnie) różnymi cechami przysługującymi tym samym przedmiotom, ale dlatego, że są (z definicji I, ekstensjonalnie) rozłącznymi zbiorami jednoelementowymi. Wydaje się, że taka niezamierzona interpretacja możliwa jest dlatego, że C nic nie mówi o relacji $\in$ — a to stąd, że L_C ma jeden zbiór zmiennych, zatem cechy i indywidua są w C tego samego typu logicznego. W sumie, aby skutecznie wyrugować zasadę ekstensjonalności, należałoby albo rozróżnić w L_C typy logiczne, albo też zabronić rozróżniania ich w interpretacjach C.

Skądinąd przypisanie cechom i indywiduom tego samego typu ułatwia uchwycenie pewnych intuicji — np. co do cech wyższych rzędów czy też przysługujących samym sobie. Zastosowanie tego rozwiązania w systemie C jest więc zapewne nieprzypadkowe. Jednak filozoficznie jest to wciąż nieco zaskakujące; w końcu odróżnienie indywiduów od przedmiotów ogólnych jest jedną z podstawowych intuicji ontologii. Co więcej, jego brak dopuszcza mieszanie typów — a żaden z aksjomatów C go nie wyklucza. Na przykład:

$$\exists x\,(x = y \cup z \wedge C(y) \wedge \neg C(z))$$

nie jest wprawdzie twierdzeniem C, ale też nie jest twierdzeniem jego negacja; więc przy jakiejś interpretacji jest prawdą. Trudno powiedzieć, jak należałoby rozumieć takie, jak x typikalne mieszańce.

1.3. Twierdzenia

Oto cztery spośród podanych przez Żabskiego twierdzeń C, głoszące istnienie cech przysługujących, odpowiednio, tylko cechom, wszystkim cechom, dokładnie cechom i dokładnie nie-cechom:

T3. $\exists x\,(C(x) \wedge \forall y\,(P(x, y) \rightarrow C(y)))$

T4. $\exists x\,(C(x) \wedge \forall y\,(C(y) \rightarrow P(x, y)))$

---

[1] Z twierdzenia o reprezentacji dla algebr Boole'a; zob. [Chang, Keisler 1973, s. 39].

T5. $\exists x\,(C(x) \wedge \forall y\,(P(x,y) \leftrightarrow C(y)))$

T6. $\exists x\,(C(x) \wedge \forall y\,(P(x,y) \leftrightarrow \neg C(y)))$.

Żabski dowodzi T3 i T4 pokazując, że spełniają je odpowiednio 0 i 1 wybrane za x. Natomiast T5 jest według niego bezpośrednią konsekwencją T3 i T4, a dowód T6 jest analogiczny do dowodu T5 [Żabski 1982, s. 239].

Brzmi to zaskakująco o tyle, że T5 wcale nie wynika z T3 i T4. Z tego, że istnieje przedmiot x taki, że $\varphi(x) \rightarrow \psi$ i istnieje przedmiot y taki, że $\psi \rightarrow \varphi(y)$ nie wynika wcale, że istnieje przedmiot z taki, że $\psi(z) \leftrightarrow \varphi(z)$. Aby wynikało, trzeba by dodatkowo założyć, że $x = y$. To zaś w ogólności nie musi być prawdą (zwłaszcza że prawdziwość T3 gwarantuje 0, a T4 — 1, zaś $0 \neq 1$). Istnieją więc interpretacje C, w których przedmiotu spełniającego *zarazem* T3 i T4 nie ma — zatem T5 nie jest twierdzeniem C; podobnie T6.

Z ontologicznego punktu widzenia można ponadto wątpić, czy T3 dowiedzione przez podstawienie 0 za x trafnie oddaje zamierzoną treść, tzn. głosi istnienie cechy przysługującej tylko cechom. Dowód [Żabski 1982: 238] korzysta (w kroku 3.) z zasady *ex absurdum sequitur quodlibet*:

1. $C(0)$	A18
2. $\neg P(0,y)$	A18
3. $P(0,y) \rightarrow C(y)$	2, krz
4. $\forall y\,(P(0,y) \rightarrow C(y))$	3
5. $C(0) \wedge \forall y\,(P(0,y) \rightarrow C(y))$	1, 4
6. $\exists x\,(C(x) \wedge \forall y\,(P(x,y) \rightarrow C(y))$	5, $\square$.

Można go nieformalnie sparafrazować tak: skoro cecha pusta 0 nie przysługuje niczemu, to wszystko, czemu ono przysługuje jest cechą, a zatem istnieje cecha przysługująca tylko cechom. Widać, że intuicyjnie dowód taki jest niepoprawny; żeby zgodnie z intuicją głosić istnienie cechy przysługującej tylko cechom, należałoby dodać, że musi chodzić o cechę niepustą. Zatem T3 niezupełnie oddaje zamierzoną treść.

2. UWAGI FILOZOFICZNE[2]

Żabski pisze, że „najważniejsza — jak się wydaje — ale nie jedyna" [1982, s. 234], [1987, s. 27] różnica między pojęciem zbioru a pojęciem cechy to nieekstensjonalność cech; wbrew temu uważamy wraz z Quine'em [1969, s. 2], że jest to „the only intelligible difference". W każdym razie — aby różnica ta przemawiała na korzyść pojęcia cechy, twierdzi się, że bywają własności koekstensjonalne, a nieidentyczne. Przyjrzymy się ich przykładom przytaczanym przez Żabskiego w [1982] i zastanowimy, czy faktycznie skłaniają one do przyjęcia rachunku cech.

[2] Część uwag w § 2 pochodzi od p. Ryszarda Szopy.

Pierwszy przykład takich cech, wzięty z [Słupecki *et al.* 1976], to trójboczność i trójkątność. Ale cechy te są koekstensjonalne koniecznie: o ile nie dopuszczamy światów wewnętrznie sprzecznych, o tyle we wszystkich światach możliwych cokolwiek jest trójkątne, jest trójboczne i odwrotnie. Zaś konieczną koekstensjonalność przyjęło się od Carnapa [1947] uważać za kryterium identyczności cech. Więc ten przykład jest nietrafiony, bo rozważane cechy *są* identyczne.

Drugi przykład, z [Borkowski 1970], to posiadanie temperatury i posiadanie masy. Niewątpliwie wśród przedmiotów makroskopowych są to cechy koekstensjonalne. Ale przecież temperatura to wielkość proporcjonalna do średniej energii kinetycznej cząsteczek danego ciała. Na przykład elektron nie ma żadnych cząsteczek, więc nie ma temperatury, a masę — owszem. Można by poprawić przykład, zamiast o posiadaniu temperatury mówiąc ogólniej o posiadaniu energii; elektrony mają jedno i drugie. Ale z kolei na przykład fotony mają energię, a nie mają masy. Zatem ten przykład jest fałszywy, bo rozważane cechy *nie są* koekstensjonalne.

Nieprzytoczony w [Żabski 1982], ale powszechnie znany przykład to posiadanie serca i posiadanie nerek. Oczywiście i jego prawdziwość można podważać, podając przykłady stworzeń mających serce, a pozbawionych nerek (np. noworodek z *agenesis renis*). Na to można by odpowiedzieć precyzując określenie obu cech tak, by wykluczyć faktyczne kontrprzykłady. Wtedy jednak można by z kolei podawać kontrprzykłady kontrfaktyczne, ale możliwe — pokazując, że rozważane cechy są koekstensjonalne jedynie przygodnie w świecie aktualnym. Jeśli więc rozszerzymy uniwersum o pewne przedmioty kontrfaktyczne, to przykład będzie fałszywy, bo znajdziemy kontrprzykłady. Jeśli zaś ograniczymy je do uniwersum świata aktualnego, to będzie nietrafiony, bo z braku kontrprzykładów cechy *będą* identyczne.

Żeby więc mówić o nieidentycznych cechach koekstensjonalnych, musimy dopuścić do uniwersum jakieś kontrprzykłady (tzn. przedmioty niweczące koekstensjonalność), ale *jako* nieistniejące aktualnie, a jedynie możliwe. To pozwoli nam uniknąć pierwszego z rogów powyższego dylematu, tzn. obecność kontrprzykładów nie sfalsyfikuje przykładu (cech kokestensjonalnych), bo kontrprzykłady te będą z założenia kontrfaktyczne. Gdybyśmy jednak nie chcieli przystać na taką procedurę, choćby z niechęci do dopuszczania przedmiotów z gruntu kontrfaktycznych, to dylematu nie unikniemy. Rozszerzając uniwersum świata aktualnego maksymalnie — to jest aż będzie równe uniwersum języka — albo natrafimy na kontrprzykład niweczący koekstensjonalność, albo okaże się, że rozważane cechy są identyczne, czyli mamy do czynienia z różnymi nazwami tej samej cechy.

Co przy tym istotne, aby przyjąć owe kontrfaktyczne kontrprzykłady (i zatem nieidentyczne cechy koekstensjonalne), wystarczy dodać do uniwersum pewne przedmioty niebędące cechami, a wcale nie trzeba kwantyfikować po cechach. Wymagałoby tego dopiero na przykład uznanie mocniejszego niż wspomniane powyżej kryterium identyczności cech, traktującego je jako indywidua. Tak np. Zalta [1988] rozróżnia identyczność co do tego, jaką cechę dane indywiduum *koduje* i jaką *egzemplifikuje* — i powiada, że identyczne są te cechy, które są koniecznie kodowane, a nie jedynie egzemplifikowane, przez te same przedmioty. To wymaga kwantyfikowania po przedmiotach kodujących cechy — wykonalnego w rachunku cech. Ale samo rozważanie nieidentycznych (czy rzekomo nieidentycznych) cech koekstensjonalnych nie daje argumentu na rzecz rachunku z kwantyfikacją po cechach — w rodzaju *C*.

3. WNIOSKI

Po pierwsze, uważamy, że w świetle naszkicowanych wyżej trudności formalnych system *C* nie jest wierny intuicjom, jakie w zamierzeniu miał oddawać. W szczególności pokazują to trudności z niektórymi twierdzeniami, które miały formalizować intuicje na temat cech, ale tego nie czynią. Ogólniej natomiast, dopuszczalność niezamierzonych interpretacji *C* sprawia, że system ten nie neguje zasady ekstensjonalności. Dopuszczalne są też na jego gruncie gwałcące intuicje typikalne mieszańce. Dlatego sądzimy, że systemu *C* nie należy przyjmować (chociaż warto zauważyć, że wielu z tych trudności unikają jego modyfikacje przedstawione przez Żabskiego w [1987] i [1988]).

Po drugie, uważamy, że lepiej nie przyjmować rachunku cech w ogóle. Jak powiedziano powyżej, nawet jeśli uważać przykłady nieidentycznych cech koekstensjonalnych za przekonywające, to nie trzeba przyjmować specjalnego narzędzia, jakim jest rachunek cech. By uznać ich nieidentyczność, wystarczy skorzystać z intensjonalnej teorii sądów — w rodzaju semantyki dwuwymiarowej [Chalmers 2004]. Narzędzie takie nie dość, że jest ogólniejsze i przydatne w zagadnieniach filozofii języka (por. [Ciecierski 2001]), to nie pociąga zobowiązań ontologicznych takich, jak rachunek cech. W szczególności w przeciwieństwie do niego nie wymaga przyjęcia kwantyfikacji po cechach — która przecież pociąga realizm pojęciowy.[3]

Zresztą chociaż system *C* (jak rachunki cech w ogóle) rozwiązuje problemy nieekstensjonalności i autoreferencji cech, to zupełnie nie rozwiązuje problemu „foliowej torby”. Nie daje więc zadowalającej teorii cech, a pociąga szereg trudności i ontologiczne zobowiązanie do realizmu. Nawet jeśli rachunki bardziej dopracowane (np. [Żabski 1987], [Żabski 1988]) i bardziej rozbudowane (np. [Bealer 1982], [Zalta 1988]) unikają trudności formalnych, to i tak pozostaje zobowiązanie ontologiczne. Skoro zaś można rozwiązać problemy nieekstensjonalności i autoreferencji innymi teoriami, niepociągającymi takich zobowiązań (odpowiednio np. właśnie semantyką dwuwymiarową oraz nieufundowaną teorią mnogości [Barwise, Moss 1996]), to dlaczego przyjmować rachunek cech z jego ontologicznym obciążeniem?

[3] A ponadto dyskwalifikuje teorię jako ontologię w sensie Quine'a (por. [Wójtowicz 2004]).

BIBLIOGRAFIA

Barwise J., Moss L. (1996), *Vicious circles: on the mathematics of non-wellfounded phenomena*, Stanford, CSLI.

Bealer G. (1982), *Quality and concept*, Oxford, Clarendon.

Borkowski L. (1970), *Logika formalna*, Warszawa, PWN.

Carnap R. (1947), *Meaning and necessity*, Chicago, University of Chicago Press.

Chalmers D. (2004), *The foundations of two-dimensional semantics*, [w:] M. Garcia-Carpintero, J. Macia (red.), *Two-dimensional semantics: foundations and applications*. Oxford, Oxford U.P.

Chang G. C., Keisler H. J. (1973), *Model theory*, Amsterdam, North-Holland.

Ciecierski T. (2001), *Pragmatyka Roberta Stalnakera*, „Przegląd Filozoficzny", 39(3).

Quine W. V. O. (1969), *Set theory and its logic*, Cambridge, Ma., Belknap, wydanie zmienione.

Słupecki J., Hałkowska K., Piróg-Rzepecka K. (1976), *Logika matematyczna*, Warszawa, PWN.

Wójtowicz K. (2004), *O najważniejszym argumencie na rzecz matematycznego realizmu*, „Filozofia Nauki", 46(2).

Zalta E. (1988), *Intensional logic and the metaphisics of intentionality*, Cambridge, Ma., MIT Press.

Żabski E. (1982), *Próba aksjomatycznego ujęcia pojęcia cechy*, „Poznańskie studia z filozofii nauki", 7.

Żabski E. (1987), *Czterdzieści osiem elementarnych teorii cech*, „Zeszyty Naukowe WSP w Opolu. Matematyka", 24.

Żabski E. (1988), *Cecha i istnienie. formalizacja fragmentu ontologii*, „Acta Universitatis Wratislaviensis. Prace Filozoficzne", 57 (w serii „Logika", 13).