Anna Wójtowicz

Zasada ekstensjonalności lokalnej i globalnej

Filozofia Nauki 13/2, 113-127

2005

Filozofia Nauki
Rok XIII, 2005, Nr 2(50)

Anna Wójtowicz

Zasada ekstensjonalności lokalnej i globalnej[1]

1. SFORMUŁOWANIE ZASADY EKSTENSJONALNOŚCI

Przez zasadę ekstensjonalności albo zasadę Fregego rozumie się następującą zasadę semantyczną:

> Denotacja wyrażenia złożonego jest jednoznacznie wyznaczona denotacjami wyrażeń prostych, z których wyrażenie to jest zbudowane.

Zasada ta jest szczególnym przypadkiem pewnej ogólniejszej zasady, nazywanej w literaturze anglojęzycznej zasadą kompozycjonalności:

> Wszystkie własności semantyczne wyrażenia złożonego są jednoznacznie wyznaczone przez własności semantyczne wchodzących w jego skład wyrażeń prostych.

Ogólność (a ktoś mógłby powiedzieć — nieprecyzyjność) tych zasad polega między innymi na tym, że w ich sformułowaniach występuje dwukrotnie słowo „wyrażenie" — raz kiedy mowa o wyrażeniu złożonym, a raz — kiedy mowa o wyrażeniu prostym. Powstaje naturalne pytanie, czy w obu wypadkach mamy na myśli wyrażenie tego samego (syntaktycznego) typu, a co się z tym wiąże — czy w obu przypadkach, mówiąc o denotacjach wyrażenia mamy na myśli obiekty (w najszerszym tego słowa znaczeniu) tego samego rodzaju.

Formalnie ten problem ujmując, zasadę ekstensjonalności możemy zapisać następująco:

---

[1] Praca naukowa finansowana ze środków Komitetu Badań Naukowych w latach 2004-2006 jako projekt badawczy 1 H01A 011 26.

$$\forall \varphi_1, \varphi_2\ \forall \gamma \text{ jeśli } d(\varphi_1) = d(\varphi_2), \text{ to } d(\gamma[\varphi_1]) = d(\gamma[\varphi_1/\varphi_2]),$$

gdzie $\gamma[\varphi_1/\varphi_2]$ jest wyrażeniem, które powstało z wyrażenia $\gamma[\varphi_1]$ przez zastąpienie wszędzie wyrażenia φ_1 wyrażeniem φ_2, a przez d(*) oznaczamy denotację wyrażenia*.

Problem dwuznaczności terminu „wyrażenie" przenosi się przy tym sformułowaniu na problem dwuznaczności funkcji d: czy w poprzedniku i następniku implikacji mamy do czynienia z tą samą (mającą taką samą dziedzinę i przeciwdziedzinę) funkcją d czy też z różnymi funkcjami? Możliwe odpowiedzi na to pytanie posłużą nam do rozróżnienia dwóch wersji zasady ekstensjonalności: **zasady ekstensjonalności lokalnej i zasady ekstensjonalności globalnej**.

2. ZASADA EKSTENSJONALNOŚCI LOKALNEJ

Przez zasadę ekstensjonalności lokalnej (ze względu na wyrażenia typu φ) będę rozumieć takie ujednoznacznienie sformułowaniej wyżej zasady ekstensjonalności, w którym jawnie zakłada się, że użyty w poprzedniku i następniku tej zasady termin „wyrażenie" odnosi się do wyrażeń o tym samym typie syntaktycznym[2]:

DEFINICJA

Zasada ekstensjonalności lokalnej (ze względu na wyrażenia typu φ) jest to zasada, zgodnie z którą denotacja wyrażenia złożonego o kategorii syntaktycznej φ (zbiór wszystkich wyrażeń tej kategorii oznaczmy przez Φ) jest jednoznacznie wyznaczona denotacjami wyrażeń prostych o kategorii syntaktycznej φ, z których wyrażenie to jest zbudowane za pomocą funktorów o kategorii syntaktycznej $\varphi/\varphi, \ldots, \varphi$.

Formalnie:

$$\forall \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \in \Phi \text{ jeśli } d(\varphi_1) = d(\varphi_2), \text{ to } d(\varphi_3[\varphi_1]) = d(\varphi_3[\varphi_1/\varphi_2]),$$

gdzie wyrażenie φ_3 zawiera wyłącznie funktory o kategorii syntaktycznej $\varphi/\varphi,\ldots,\varphi$.

Przy takim sformułowaniu tej zasady nie ma już problemu z wieloznacznością funkcji d — jest to funkcja, która wyrażeniom typu syntaktycznego φ przyporządkowuje pewnego rodzaju obiekty, utożsamiane z denotacjami wyrażeń typu φ. Podkreślmy też, że wyrażenie φ_3 musiało powstać z wyrażenia φ_1 (i ewentualnie innych wyrażeń typu φ) w wyniku działania pewnego funktora o kategorii syntaktycznej $\varphi/\varphi,\ldots,\varphi$. Jeśli np. φ było wyrażeniem typu nazwowego, to funktor ten był symbolem funkcyjnym, natomiast jeśli φ było wyrażeniem zdaniowym, to funktor ten był spójnikiem. Język[3] jest lokalnie nieekstensjonalny ze względu na wyrażenia typu φ zawsze i tylko wtedy, gdy istnieje funktor o kategorii $\varphi/\varphi,\ldots,\varphi$, który nie działa jak funk-

[2] Na ten temat pisałam też w [Wójtowicz 1998].

[3] Język rozumiemy tu jako strukturę wyznaczoną przez słownik (zbiór znaków danego języka), gramatykę (zasady budowy ze znaków prostych znaków złożonych), dyrektywy dedukcyjne charakteryzujące działanie stałych logicznych i dyrektywy znaczeniowe charakteryzujące działanie symboli pozalogicznych.

cja, tzn. mając za argumenty wyrażenia o takiej samej denotacji buduje wyrażenia o różnych denotacjach.

To, czy zasada ekstensjonalności jest spełniona dla danego zbioru wyrażeń Φ i funktorów o kategorii syntaktycznej $\varphi/\varphi,\dots\varphi$, możemy stwierdzić badając **algebrę denotacji dla wyrażeń typu** φ.

DEFINICJA

Algebrą denotacji dla wyrażeń typu φ będziemy nazywać strukturę

$$D_\varphi = \langle U, F_1,\dots F_n\rangle,$$

spełniającą następujące warunki

(1) U jest niepustym zbiorem, utożsamianym ze zbiorem denotacji wyrażeń typu syntaktycznego φ.

(2) $F_k \subseteq Ux\dots x_{(n+1)}U$ jest operacją odpowiadającą n-argumentowemu funktorowi f_k o kategoriii syntaktycznej $\varphi/\varphi_1,\dots,\varphi_n$ z języka J, tzn.:

$$d(f_k(\varphi_1,\dots\varphi_n)) = F_k(d(\varphi_1),\dots d(\varphi_n)).$$

Innymi słowy algebrą denotacji dla wyrażeń typu φ może być dowolna struktura homomorficzna z algebrą wyrażeń typu φ (tzn. zbiorem wszystkich wyrażeń typu φ wraz ze zbiorem wszystkich funktorów o kategorii syntaktycznej $\varphi/\varphi,\dots,\varphi$).

Zauważmy, że najprościej uzyskać taką algebrę jako strukturę ilorazową ze zbioru Φ podzielonego przez pewną relację równoważności R:

$$D_\varphi = \langle \Phi/R, f_{1/R},\dots f_{n/R}\rangle,$$

gdzie $f_{k/R}$ jest odpowiednikiem funktora n-argumentowego f_k z języka J działającym na n klasach abstrakcji od relacji R. Relacja R jest przy tym relacją definiującą (przez abstrakcję) pojęcie denotacji wyrażenia typu φ:

$$d(\varphi_1) = d(\varphi_2) \text{ zawsze i tylko wtedy, gdy } R(\varphi_1, \varphi_2).$$

Mając D_φ możemy zdefiniować pojęcie lokalnej ekstensjonalności ze względu na wyrażenia typu φ:

DEFINICJA

Język J jest lokalnie ekstensjonalny ze względu na wyrażenia typu φ w danej algebrze denotacji $D_\varphi = \langle U, F_1,\dots F_n\rangle$ zawsze i tylko wtedy, gdy wszystkie operacje F_k są **funkcjami**, tzn. dla dowolnego φ_i, φ_j spełniony jest warunek:

$$\text{jeśli } d(\varphi_i) = d(\varphi_j), \text{ to } F_k(d(\varphi_1),\dots d(\varphi_i),\dots d(\varphi_n)) = F_k(d(\varphi_1), \dots d(\varphi_i/\varphi_j), \dots d(\varphi_n)).$$

Łatwo widać, że ten warunek (w świetle definicji D_φ) jest po prostu równoważny temu, że

$$\text{jeśli } d(\varphi_i) = d(\varphi_j), \text{ to } d(f_k(\varphi_1,\dots\varphi_i,\dots\varphi_n) = d(f_k(\varphi_1),\dots d(\varphi_i/\varphi_j),\dots d(\varphi_n)),$$

co odpowiada intuicyjnemu sformułowaniu zasady ekstensjonalności.

To, jak dokładnie wygląda algebra D_φ, jak liczny jest zbiór U i jaka jest wewnętrzna natura jego elementów (albo innymi słowy — jak zdefiniowana jest relacja R), zależy od przyjętej semantyki dla danego języka. Wyznacza ona w szczególności, co jest denotacją wyrażeń o ustalonej kategorii syntaktycznej. Jeśli np. φ jest wyrażeniem nazwowym, to w standardowej teorii modeli przyjmuje się, że U jest zbiorem przedmiotów, na którego liczność nie nakłada się żadnych ograniczeń (zakłada się tylko, że jest on niepusty). Jeśli φ to wyrażenie typu zdaniowego, to $d(\varphi)$ jest — w zależności od przyjętej teorii — wartością logiczną zdania φ (i wtedy zbiór U jest dwuelementowy, o ile w języku J obowiązuje logika klasyczna), sądem wyrażonym w zdaniu φ bądź sytuacją opisywaną w zdaniu φ (i wtedy zbiór U jest przynajmniej dwuelementowy).

Jeśli zasada ekstensjonalności lokalnej ze względu na wyrażenia typu φ nie jest w języku spełniona w danej algebrze D_φ, to operacje $F_1,\ldots,F_n$ **nie będą funkcjami** tylko zwykłymi relacjami. Widać to dobrze na poniższym przykładzie.

PRZYKŁAD 1

Niech dany będzie język J modalnego rachunku zdań. W języku tym występują tylko jednego typu wyrażenia o podstawowej kategorii syntaktycznej — wyrażenia zdaniowe (ich zbiór oznaczymy przez FOR). Oprócz tego mamy spójniki zdaniowe, czyli wyrażenia o kategorii syntaktycznej z/z,...,z. Wśród nich znajduje się jednoargumentowy spójnik $\Box$, który czytamy „jest konieczne, że". Algebra wyrażeń tego języka ma więc następującą postać:

$$\langle \mathrm{FOR}, \sim, \wedge, \rightarrow, \vee, \leftrightarrow, \Box \rangle$$

Homomorficzna z nią algebra denotacji ma postać:

$$\langle U, F_\sim, F_\wedge, F_\rightarrow, F_\vee, F_\leftrightarrow, F_\Box \rangle,$$

gdzie U jest zbiorem denotacji dla formuł zdaniowych, a operacje F_k są przyporządkowane odpowiednim (widocznym w indeksach) spójnikom.

Założymy teraz, że zbiór U jest dwuelementowym zbiorem wartości logicznych. Innymi słowy

$$U = \mathrm{FOR}/R,$$

gdzie $R(\alpha,\beta)$ zawsze i tylko wtedy, gdy wartość logiczna α jest identyczna z wartością logiczną β.

Argumentami funktorów $F_\sim$, $F_\wedge$, $F_\rightarrow$, $F_\vee$, $F_\leftrightarrow$, $F_\Box$ są wtedy po prostu wartości logiczne zdań.

Wtedy (o ile oczywiście w języku obowiązuje taka logika modalna, która nie zawiera tezy: $p \leftrightarrow \Box p$), operacja $F_\Box$ nie jest funkcją. Można bowiem wskazać (dla dowolnej funkcji d) takie dwa zdania α i β, że warunek:

$$\text{jeśli } d(\alpha) = d(\beta), \text{ to } F_{\Box}(d(\alpha)) = F_{\Box}(d(\beta))$$

nie jest spełniony — $d(\Box\alpha) \neq d(\Box\beta)$ ponieważ wprawdzie α i β mają taką samą wartość logiczną, ale nie są «równie konieczne».

A więc — ze względu na tak zdefiniowaną algebrę — język J nie jest ekstensjonalny: operacja $F_{\Box}$ nie jest funkcją. Zauważmy, ze dzieje się tak dlatego, że równość między formułami definiowana za pomocą równości ich wartości logicznych ($\alpha \leftrightarrow \beta$) nie jest najsilniejszą wyrażalną w tym języku równością — w szczególności jest ona słabsza od ścisłej równoważności formuł ($\Box(\alpha \leftrightarrow \beta)$).

Wystarczy jednak zmienić założenie i przyjąć, że zbiór U jest zbiorem złożonym z klas abstrakcji od relacji równoważności R zdefiniowanej na zbiorze wszystkich formuł języka J w następujący sposób:

$$R(\alpha,\beta) \text{ zawsze i tylko wtedy, gdy } \alpha \leftrightarrow \beta \in L,$$

gdzie L jest zbiorem tez danej logiki modalnej obowiązującej w języku J. Wtedy — o ile w logice L obowiązuje reguła Gödla — otrzymujemy następującą algebrę denotacji:

$$\langle FOR/R, F_{\sim}, F_{\wedge}, F_{\rightarrow}, F_{\vee}, F_{\leftrightarrow}, F_{\Box}\rangle,$$

gdzie FOR/R jest zbiorem wszystkich formuł języka J podzielonym przez relację R. W takiej algebrze język J jest ekstensjonalny. Zauważmy bowiem, że

$$d(\alpha) = d(\beta) \text{ zawsze i tylko wtedy, gdy } \alpha \leftrightarrow \beta \in L,$$

a z tego, że w logice L obowiązuje reguła Gödla wynika, że

$$\text{jeśli } \alpha \leftrightarrow \beta \in L, \text{ to } \Box\alpha \leftrightarrow \Box\beta \in L,$$

a stąd mamy w szczególności

$$F_{\Box}(d(\alpha)) = F_{\Box}(d(\beta)).$$

Można łatwo pokazać, że prawdziwy jest następujący fakt

FAKT

Niech dany język J, a w nim klasa wyrażeń Φ typu φ i klasa operacji $f_1,\ldots,f_n$ na tych wyrażeniach.

(1.1) Język J jest lokalnie ekstensjonalny (ze względu na wyrażenia typu φ) w następującej algebrze denotacji D_R

$$\langle \Phi/R, F_1,\ldots,F_n\rangle,$$

gdzie $R(x_1,x_2)$ zawsze i tylko wtedy, gdy x_1 jest równokształtne z x_2.[4]

[4] Posługując się terminologią Suszki z artykułu [Suszko 1998] można powiedzieć, że relacja równokształtności wyznacza najsilniejszą kongruencję na wyrażeniach typu φ i względem niej każdy funktor jest ekstensjonalny.

(1.2) Jeśli język J jest lokalnie ekstensjonalny (ze względu na wyrażenia typu φ) w algebrze denotacji $D_R = \langle \Phi/R, F_1,\ldots,F_n \rangle$ i $R_1 \subseteq R$, to język J lokalnie ekstensjonalny (ze względu na wyrażenia typu φ) w algebrze denotacji $D_{R1} = \langle \Phi/R_1, F_1,\ldots,F_n \rangle$.

Innymi słowy fakt ten mówi, że po pierwsze każdy język jest lokalnie ekstensjonalny w algebrze denotacji, w której taką samą denotacje mają jedynie wyrażenia równokształtne (relacja równokształtności jest bowiem najsilniejszą relacją, jaka może zachodzić między wyrażeniami-typami), a po drugie, jeśli już język jest lokalnie ekstensjonalny w jakiejś algebrze denotacji, to jest również ekstensjonalny we wszystkich algebrach «o drobniejszym podziale» wyjściowej klasy wyrażeń Φ na klasy wyrażeń o tej samej denotacji. Mówiąc trochę metaforycznie — im więcej wyrażeń o różnych denotacjach, tym większa szansa, że język będzie lokalnie (ze względu na te wyrażenia) ekstensjonalny. Prostym wnioskiem z tego faktu jest to, że jeśli badamy w danym języku ekstensjonalność danej klasy spójników i okaże się, że wszystkie spójniki są prawdziwościowe (tzn. ekstensjonalne w algebrze, której uniwersum stanowi dwuelementowy zbiór wartości logicznych), to język ten będzie lokalnie ekstensjonalny w dowolnej innej algebrze denotacji. Tak się dzieje, ponieważ podział zbioru formuł na dwie klasy zgodnie z kryterium, że tę samą denotację mają formuły o tej samej wartości logicznej, jest «najgrubszym» możliwym podziałem.

Podsumowując powyższe rozważania możemy stwierdzić, że:

— to, czy dany język jest lokalnie ekstensjonalny (ze względu na wyrażenia typu φ) zależy w sposób istotny od tego, jak jest zdefiniowane jest uniwersum algebry denotacji D_φ. Dla dowolnego zbioru funktorów działających na obiektach typu φ można tak dobrać algebrę denotacji D_φ, aby funktory te były ekstensjonalne.

— warunkiem wystarczającym, aby dany język był lokalnie ekstensjonalny (ze względu na wyrażenia typu φ) jest to, że relacja równości denotacji wyrażeń typu φ jest najsilniejszą definiowalną (za pomocą funktorów o kategorii syntaktycznej φ/φ,...,φ) relacją równoważności na tej klasie.

3. ZASADA EKSTENSJONALNOŚCI GLOBALNEJ

Przez zasadę ekstensjonalności globalnej będę rozumieć takie doprecyzowanie ogólnego sformułowania zasady ekstensjonalności, w którym unika się niejasności związanych z pojęciem funkcji d jawnie zakładając istnienie różnych funkcji denotacji. Załóżmy dla uproszczenia, że w języku J mamy dwie podstawowe kategorie syntaktyczne: nazwową (oznaczaną przez n, a zbiór wszystkich wyrażeń tej kategorii przez N) i zdaniową (oznaczaną przez z, a zbiór wszystkich wyrażeń tej kategorii przez FOR), a także następujące kategorie funktorów: spójniki $sp_1,\ldots,sp_n$ (czyli wyrażenia kategorii z/z,...,z), symbole funkcyjne $f_1,\ldots,f_k$ (czyli wyrażenia kategorii n/n,...,n), predykaty $P_1,\ldots,P_l$ (czyli wyrażenia kategorii z/n,...,n) i reifikatory $Re_1,\ldots,Re_m$ (czyli wyrażenia kategorii n/z)[5]. Stąd język J można utożsamić z następującą strukturą:

[5] Zakładamy, że w języku występują reifikatory, żeby zachować pewnego rodzaju symetrię ka-

$\langle N, FOR, sp_1,\dots,sp_n, f_1,\dots,f_k, P_1,\dots,P_l, Re_1,\dots,Re_m\rangle$.

Analogicznie do definicji algebry denotacji wyrażeń typu φ możemy zdefiniować algebrę denotacji D dla całego języka J.

DEFINICJA

Algebrą denotacji dla języka J będziemy nazywać strukturę

$$D_J = \langle S, U, SP_1,\dots,SP_n, F_1,\dots,F_k, PR_1,\dots,PR_l, RE_1,\dots,RE_m\rangle,$$

homomorficzną z algebrą języka, przy czym homomorfizm ustalają dwie funkcje (interpretowane jako funkcje denotacji wyrażeń odpowiedniej kategorii):

$$d\colon FOR \rightarrow S;$$

$$g\colon N \rightarrow U.$$

Innymi słowy struktura ta spełnia następujące warunki:

(1) S i U są niepustymi zbiorami, utożsamianymi odpowiednio ze zbiorami denotacji wyrażeń zdaniowych i nazwowych.

(2) dla dowolnego n-argumentowego spójnika sp_i z języka J i dla dowolnych formuł $\alpha_1,\dots,\alpha_n$, spełniony jest warunek:

$$d(sp_i(\alpha_1,\dots\alpha_n)) = SP_i(d(\alpha_1),\dots,d(\alpha_n)).$$

(3) dla dowolnego n-argumentowego symbolu funkcyjnego f_i z języka J i dla dowolnych wyrażeń nazwowych $a_1,\dots,a_n$, spełniony jest warunek:

$$g(f_i(a_1,\dots,a_n)) = F_i(g(a_1),\dots,g(a_n)).$$

(4) dla dowolnego n-argumentowego predykatu P_i z języka J i dla dowolnych wyrażeń nazwowych $a_1,\dots,a_n$, spełniony jest warunek:

$$d(P_i(a_1,\dots,a_n)) = PR_i(g(a_1),\dots,g(a_n)).$$

(5) dla dowolnego n-argumentowego reifikatora Re_i z języka J i dla dowolnych formuł $\alpha_1,\dots,\alpha_n$, spełniony jest warunek:

$$g(Re_i(\alpha_1,\dots\alpha_n)) = RE_i(d(\alpha_1),\dots d(\alpha_n)).$$

W następnym kroku definiujemy ekstensjonalność globalną języka J w strukturze D.

DEFINICJA

Język J jest **globalnie ekstensjonalny** w danej algebrze denotacji D zawsze i tylko wtedy, gdy wszystkie operacje algebry D są funkcjami, tzn. dla dowolnych wyra-

---

tegorii syntaktycznej funktorów: skoro mamy funktory, które przekształcają nazwy w zdania, to powinny istnieć również funktory, które przekształcają zdania w nazwy. Będzie to miało — jak pokażemy niżej — istotne znaczenie dla problemu obowiązywania zasady ekstensjonalności globalnej.

żeń nazwowych a_1, a_2, dla dowolnych formuł zdaniowych α_1, α_2 i dla dowolnych operacji SP_i, F_j, PR_t, RE_l spełnione są warunki:

(i) jeśli $d(\alpha_1) = d(\alpha_2)$, to $SP_i(\ldots d(\alpha_1),\ldots) = SP_i(\ldots d(\alpha_1)/d(\alpha_2)\ldots)$;

(ii) jeśli $g(a_1) = g(a_2)$, to $F_i(\ldots g(a_1),\ldots) = F_i(\ldots g(a_1)/g(a_2)\ldots)$;

(iii) jeśli $g(a_1) = g(a_2)$, to $PR_t(\ldots g(a_1),\ldots) = PR_t(\ldots g(a_1)/g(a_2)\ldots)$;

(iv) jeśli $d(\alpha_1) = d(\alpha_2)$, to $RE_l(\ldots d(\alpha_1),\ldots) = RE_l(\ldots d(\alpha_1)/d(\alpha_2)\ldots)$.

PRZYKŁAD 2

Rozważmy język pierwszego rzędu. Dla uproszczenia załóżmy, że w języku tym występuje tylko jeden predykat jednoargumentowy P, jeden dwuargumentowy symbol funkcyjny f i jeden reifikator: Re. W języku tym obowiązuje klasyczna logika dwuwartościowa (wszystkie spójniki i kwantyfikatory są klasyczne). Oznaczmy zbiór wszystkich tez tej logiki przez L. Przyjmijmy również, że mamy pewną wyróżnioną funkcję waluacji logicznej dla tego języka i oznaczmy ją przez v.[6]

Algebrą denotacji dla języka J będzie struktura:

$$D_J = \langle S, U, F, SP_{\sim}, SP_{\wedge}, PR, RE\rangle,$$

homomorficzną z algebrą języka, przy czym homomorfizm ustalają dwie funkcje (interpretowane jako funkcje denotacji wyrażeń odpowiedniej kategorii):

$$d: FOR \rightarrow S;$$

$$g: N \rightarrow U.$$

Ponieważ z założenia wszystkie spójniki występujące w języku J są prawdziwościowe, więc język J jest ekstensjonalny lokalnie ze względu na wyrażenia o kategorii zdaniowej (spełniony jest warunek (i) definicji ekstensjonalności globalnej — por. wnioski z FAKTU (1.2)). Załóżmy również (dla uproszczenia), że język J jest ekstensjonalny lokalnie ze względu na wyrażenia o kategorii nazwowej, tzn. jakkolwiek-

[6] Funkcja waluacji logicznej (dla logiki dwuwartościowej) jest to dowolna funkcja v: FOR $\rightarrow$ $\{0, 1\}$ spełniająca następujące warunki:
$v(\sim\alpha) = 0$ zawsze i tylko wtedy, gdy $v(\alpha) = 1$;
$v(\alpha \wedge \beta) = 1$ zawsze i tylko wtedy, gdy $v(\alpha) = 1$ i $v(\beta) = 1$;
$v(\alpha \rightarrow \beta) = 0$ zawsze i tylko wtedy, gdy $v(\alpha) = 1$ i $v(\beta) = 0$;
$v(\alpha \vee \beta) = 0$ zawsze i tylko wtedy, gdy $v(\alpha) = 0$ i $v(\beta) = 0$;
$v(\alpha \leftrightarrow \beta) = 1$ zawsze i tylko wtedy, gdy $v(\alpha \rightarrow \beta) = 1$ i $v(\beta \rightarrow \alpha) = 1$;
$v(\forall x\alpha) = 1$ zawsze i tylko wtedy, gdy dla dowolnej nazwy $a \in N$ $v(\alpha[x/a]) = 1$;
$v(\exists x\alpha) = 1$ zawsze i tylko wtedy, gdy dla pewnej nazwy $a \in N$ $v(\alpha[x/a]) = 1$;

Innymi słowy jest to taka funkcja, która formułom atomowym przyporządkowuje wartości logiczne w sposób dowolny (ale ustalony), a wartość logiczną formuł złożonych uzależnia od wartości logicznej formuł składowych. Zauważmy, że kwantyfikatory interpretujemy podstawieniowo a nie referencjalnie.

zdefiniujemy zbiór U, dla dowolnego x, a, b $\in$ N spełniony jest warunek (ii) definicji ekstensjonalności globalnej:

jeśli g(a) = g(b), to g(F(a,x)) = g(F(b,x)) i g(F(x,a)) = g(F(x,b).

Aby stwierdzić, czy język J jest ekstensjonalny globalnie w strukturze D_J, musimy rozstrzygnąć, czy dla dowolnych nazw a, b i dla dowolnych zdań α, β spełnione są warunki:

(*) jeśli g(a) = g(b), to d(P(a)) = d(P(b));
(**) jeśli $d(\alpha) = d(\beta)$, to $g(Re(\alpha)) = g(Re(\beta))$,

odpowiadające warunkom (iii) i (iv) definicji ekstensjonalności globalnej.

W sposób istotny zależy to od tego, jak zdefiniujemy zbiory S i U. Rozważmy następujące możliwości:

1) U = N/R_1, gdzie R_1(a,b) zawsze i tylko wtedy, gdy a jest równokształtne z b;
2) U = N/R_2, gdzie R_2(a,b) zawsze i tylko wtedy, gdy (a = b) $\in$ L;
3) U = N/R_3, gdzie R_3(a,b) zawsze i tylko wtedy, gdy v(a = b) = 1;
4) S = FOR/R_4, gdzie $R_4(\alpha,\beta)$ zawsze i tylko wtedy, gdy α jest równokształtne z β;
5) S = FOR/R_5, gdzie $R_5(\alpha,\beta)$ zawsze i tylko wtedy, gdy $(\alpha \leftrightarrow \beta) \in L$;
6) S = FOR/R_6, gdzie $R_6(\alpha,\beta)$ zawsze i tylko wtedy, gdy $v(\alpha \leftrightarrow \beta) = 1$;

Innymi słowy zgodnie z (1) taką samą denotację mają wyłącznie nazwy równokształtne, zgodnie z (2) — nazwy, których identyczność jest twierdzeniem logiki L, zgodnie z (3) — nazwy, których identyczność jest zapewniona przez (wskazaną) waluację v. Jeśli spełnione jest (4), to taką samą denotację mają tylko zdania równokształtne, jeśli (5) — zdania równoważne logicznie na gruncie L, jeśli (6) — zdania o takiej samej (wyznaczonej przez waluację v) wartości logicznej[7]. Zauważmy również, że miedzy relacjami R_i zachodzą następujące oczywiste związki:

(!) $R_1 \subseteq R_2 \subseteq R_3$;

(!!) $R_4 \subseteq R_5 \subseteq R_6$.

Zbadajmy teraz kilka kombinacji powyższych możliwości definicji zbiorów U i S, i zastanówmy się, czy (i przy jakich dodatkowych założeniach nakładanych na

[7] Można wskazać również możliwości pośrednie: między (1) i (2) byłyby takie relacje ustalające równość denotacji, które zachodzą miedzy dwoma nazwami zawsze i tylko wtedy, gdy nie tylko ich równość jest twierdzeniem logiki, ale również są zbudowane w pewien określony sposób (są podobne strukturalnie), analogiczna relacja pośrednia między (4) i (5) zachodziłaby między zdaniami które nie tylko są logicznie równoważne ale np. są zbudowane z takich samych symboli pozalogicznych. Propozycję, żeby tak właśnie rozumieć warunek równości denotacji zdań przedstawili Barwise i Perry w artykule [Barwise, Perry 1981], chcąc w ten sposób uniknąć konsekwencji wynikających z zastosowania tzw. argumentu slingshot. Między (2) i (3) (i analogicznie między (5) i (6)) byłyby takie relacje ustalające równość denotacji, które zachodzą między wyrażeniami, których identyczność jest twierdzeniem pewnego wyróżnionego zbioru teorii w języku J.

predykat P i reifikator Re) język J jest ekstensjonalny globalnie. Powstaje również naturalne pytanie, czy wszystkie teoretycznie dopuszczalne kombinacje tych możliwości są równie rozsądne.

Kombinacja (1) i (4) daje nam algebrę denotacji

$$D_{1,4} = \langle U/R_1, S/R_4, F, SP_{\sim},\ldots,SP_{\wedge}, PR, RE\rangle,$$

a warunki (*) i (**) mają postać:

(*) jeśli a jest równokształtne z b, to P(a) jest równokształtne z P(b);
(**) jeśli α jest równokształtne z β, to Re (α) jest równokształtne z Re(β).

To, że są one spełnione jest oczywiste i wynika wyłącznie z założenia o jednoznaczności wyrażeń w języku J. W algebrze $D_{1,4}$ język J jest więc ekstensjonalny.

Kombinacja (1) i (5) daje nam algebrę denotacji

$$D_{1,5} = \langle U/R_1, F, S/R_5, SP_{\sim},\ldots,SP_{\wedge}, PR, RE\rangle,$$

a warunki (*) i (**) mają postać:

(*) jeśli a jest równokształtne z b, to (P(a) $\leftrightarrow$ P(b)) $\in$ L;
(**) jeśli ($\alpha \leftrightarrow \beta$) $\in$ L, to Re (α) jest równokształtne z Re(β);

I o ile warunek (*) jest spełniony, o tyle warunek (**) — nie; ponieważ w L istnieją formuły równoważne logicznie, ale nie równokształtne. W algebrze $D_{5,1}$ język J nie jest ekstensjonalny. Z tych samych powodów (i ze względu na (!!)) nie jest on ekstensjonalny w algebrze $D_{1,6}$.

Kombinacja (2) i (4) daje nam z kolei algebrę denotacji

$$D_{2,4} = \langle U/R_2, S/R_4, F, SP_{\sim},\ldots,SP_{\wedge}, PR, RE\rangle,$$

a warunki (*) i (**) mają postać:

(*) jeśli (a = b) $\in$ L, to P(a) jest równokształtne z P(b);
(**) jeśli α jest równokształtne z β, to (Re (α) = Re(β)) $\in$ L;

Warunek (**) jest — ze względu na (!) — spełniony, ale spełnienie warunku (*) zależy od tego, jakie własności ma funktor F. Jeśli jego symetryczność jest zagwarantowana przez aksjomat:

$$\forall y,x\ F(x,y) = F(y,x),$$

to F(a,b) = F(b,a) $\in$ L, ale nieprawda, że P(F(a,b)) jest równokształtne z P(F(b,a)).

A więc w takim wypadku język J nie jest ekstensjonalny globalnie w algebrze $D_{2,4}$, a ze względu na (!) również w algebrze $D_{3,4}$.

Kombinacja (2) i (5) daje algebrę

$$D_{2,5} = \langle U/R_2, S/R_5, F, SP_{\sim},\ldots,SP_{\wedge}, PR, RE\rangle,$$

a warunki (*) i (**) mają postać:

(*) jeśli $(a = b) \in L$, to $P(a) \leftrightarrow P(b) \in L$;
(**) jeśli $\alpha \leftrightarrow \beta \in L$, to $(Re(\alpha) = Re(\beta)) \in L$;

Warunek (*) jest na gruncie logiki klasycznej (na mocy twierdzenia o dedukcji) równoważny tzw. aksjomatowi ekstensjonalności:

$$\forall x,y \, \{x = y \rightarrow [P(x) \leftrightarrow P(y)]\},$$

który możemy potraktować jako pewnego rodzaju warunek nakładany na działanie predykatu P.

Warunek (**) mówi o tym, jak powinien działać funktor reifikacji, aby język J był ekstensjonalny globalnie — zdaniom logicznie równoważnym powinien przypisywać te same obiekty. Tak zachowuje się funktor deskrypcji czy funktor abstrakcji ale nie ma tej własności funktor typu cudzysłowu (który zdaniu przypisuje jego cudzysłowową nazwę) albo funktor kodowania Gödlowskiego (który zdaniu przypisuje jego numer Gödlowski, zależny od jego budowy składniowej). Jeśli schemat postaci:

$$(\alpha \leftrightarrow \beta) \rightarrow Re(\alpha) = Re(\beta)$$

nie będzie aksjomatem logiki L, to język J nie będzie ekstensjonalny globalnie w algebrze $D_{2,6}$.

Kombinacja (2) i (6) daje algebrę

$$D_{2,6} = \langle U/R_2, S/R_6, F, SP_{\sim},\ldots,SP_{\wedge}, PR, RE\rangle,$$

a warunki (*) i (**) mają postać:

(*) jeśli $(a = b) \in L$, to $v(P(a) \leftrightarrow P(b)) = 1$;
(**) jeśli $v(\alpha \leftrightarrow \beta) = 1$, to $(Re(\alpha) = Re(\beta)) \in L$;

Warunek (*) jest osłabieniem aksjomatu ekstensjonalności, a warunek (**) jest spełniany wprawdzie nadal przez funktory deskrypcji i abstrakcji, ale nie jest spełniany przez funktor typu „to, że...", który każdej formule zdaniowej przypisuje nazwę opisywanej przez nią sytuacji. Język J będzie więc ekstensjonalny globalnie w takiej algebrze, tylko jeśli w logice jest jakaś wersja aksjomatu ekstensjonalności, i nie ma w języku funktorów reifikacji, których przeciwdziedzina jest więcej niż dwuelementowa. Innymi słowy do spełnienia warunku (**) konieczne jest, aby tezą logiki L był następujący schemat:

$$Re(\alpha) = Re(\beta) \vee Re(\alpha) = Re(\gamma) \vee Re(\beta) = Re(\gamma).$$

zakładający pewnego rodzaju binarność reifikatora.

Najbardziej klasyczna jest algebra denotacji, która powstaje, jeśli przyjmiemy kombinację możliwości (3) i (6). W strukturze

$$D_{3,6} = \langle U/R_3, S/R_6, SP_{\neg},\ldots,SP_{\wedge}, PR, RE\rangle,$$

zbiór S/R_6 jest dwuelementowy i wraz z operacjami odpowiadającymi spójnikom tworzy dwuelementową algebrę Boole'a wartości logicznych. W strukturze tej spełniony jest tzw. aksjomat Fregego, który w jednym ze sformułowań (przy przyjętej przez nas terminologii) ma postać:

Dla dowolnych zdań α, β, γ:

$$d(\alpha) = d(\beta) \text{ lub } d(\alpha) = d(\gamma) \text{ lub } d(\beta) = d(\gamma).$$

Jest to więc struktura równoważna strukturze modelowej

$$M = \langle U, PR, RE\rangle.$$

W strukturze tej zakłada się, że $PR \subseteq U$, a więc (ze względu na aksjomat ekstensjonalności obowiązujący w teorii mnogości),

$$\text{jeśli } x = y, \text{ to } (x \in PR \leftrightarrow y \in PR),$$

czyli spełniony jest warunek (*).

To, czy spełniony jest warunek (**) zależy od tego, co wiemy o reifikatorze Re. Nie występuje on w języku standardowej logiki pierwszego rzędu i dlatego też jego interpretacja nie pojawia się w typowej strukturze modelowej. Tak jak poprzednio do spełnienia warunku (**) konieczne jest, aby tezą logiki L był następujący schemat:

$$Re(\alpha) = Re(\beta) \vee Re(\alpha) = Re(\gamma) \vee Re(\beta) = Re(\gamma).$$

Zauważmy jednak, że jeśli taki warunek jest spełniony i dodatkowo spełniony jest dość naturalny postulat:

$$\forall a\, \exists \alpha\; a = Re(\alpha),$$

który mówi, że każda nazwa jest reifikatem pewnego zdania, to w konsekwencji otrzymujemy wniosek:

Jeśli J jest globalnie ekstensjonalny, to dla dowolnych nazw a, b, c

$$g(a) = g(b) \text{ lub } g(a) = g(c) \text{ lub } g(b) = g(c).$$

Jest to odpowiednik aksjomatu Fregego dla nazw, którego konsekwencją jest to, że zbiór U jest zbiorem dwuelementowym.

4. WNIOSKI

Z powyższych rozważań i PRZYKŁADU 2 płyną następujące wnioski:

1) Lokalna ekstensjonalność (ze względu na wyrażenia o kategorii n i z) nie gwarantuje ekstensjonalności globalnej.

2) Jeśli język J nie jest ekstensjonalny globalnie ze względu na warunek (*) w algebrze denotacji

$$D_{i,k} = \langle S/R_i, U/R_k, F, SP_{\sim},\ldots,SP_{\wedge}, PR, RE\rangle,$$

to (przy niezmieniony pozostałych założeniach dotyczących funktorów) nie jest ekstensjonalny globalnie ze względu na warunek (*) w algebrze

$$D_{i,n} = \langle S/R_i, U/R_n, SP_{\sim},\ldots,SP_{\wedge}, PR, RE\rangle,$$

gdzie $R_k \subseteq R_n$.

3) Jeśli język J nie jest ekstensjonalny globalnie ze względu na warunek (**) w algebrze denotacji

$$D_{i,k} = \langle S/R_i, U/R_k, F, SP_{\sim},\ldots,SP_{\wedge}, PR, RE\rangle,$$

to (przy niezmieniony pozostałych założeniach dotyczących funktorów) nie jest ekstensjonalny globalnie ze względu na warunek (**) w algebrze

$$D_{n,k} = \langle S/R_n, U/R_k, SP_{\sim},\ldots,SP_{\wedge}, PR, RE\rangle,$$

gdzie $R_i \subseteq R_n$.

4) Ekstensjonalność globalna zależy nie tylko od tego, jak zdefiniowane są relacje R_i, R_j pozwalające zdefiniować przez abstrakcję pojęcia denotacji nazw i zdań, ale również od tego, jaki jest między nimi związek. Niezależnie od tego, czy kombinacja relacji R_i, R_j daje w efekcie algebrę denotacji, w której język J jest ekstensjonalny czy nie, naturalne wydają się pary (R_1, R_4), (R_2, R_5) i (R_3, R_6). Uzależniają one równość denotacji wyrażeń nazwowych i zdaniowych od podobnej klasy własności.

Wbrew rozpowszechnionym opiniom rozstrzygnięcie problemu ekstensjonalności nie polega więc jedynie na «manipulowaniu» funkcją d, ale — jak pokazuje PRZYKŁAD 2 — na wzajemnych relacjach między funkcją d i g.

5. STATUS ZASADY EKSTENSJONALNOŚCI GLOBALNEJ

W rozpatrywanych wyżej przykładach badaliśmy, czy dla danego języka i dla danej algebry denotacji spełniona jest zasada ekstensjonalności globalnej. Ekstensjonalność jest więc własnością, która może przysługiwać bądź nie przysługiwać danemu językowi w zależności od wyboru takiej czy innej algebry denotacji.

Inne podejście miał do tej zasady Frege. Pisał on w [Frege 1952]:

> *Cóż jeśli nie wartość logiczna jest tą własnością zdania, która pozostaje niezmieniona* [kiedy jakiś składnik zdania zamienimy na inny ale o tej samej denotacji]?[8]

[8] Na temat możliwych interpretacji tego fragmentu por. np. [Neale 2001], s. 80.

traktując zasadę ekstensjonalności (w naszej terminologii: globalnej) jako postulat, który każdy język musi spełniać.

Problemem, który rozwiązywał Frege, było nie to, czy zasada ekstensjonalności obowiązuje ale jak — przy założeniu, że język jest ekstensjonalny — należy dla ustalonej funkcji denotacji g dobrać funkcję denotacji d. Według Fregego należy utożsamić denotację zdania z jego wartością logiczną.

Innymi słowy Frege przyjmował *a priori* dwa założenia:

(1) Zasadę ekstensjonalności globalnej;

(2) Przy danej funkcji waluacji logicznej v: FOR $\rightarrow \{0, 1\}$, dla dowolnych nazw a, b z języka J:

$$g(a) = g(b) \text{ zawsze i tylko wtedy, gdy } v(a = b) = 1.$$

Na podstawie tych założeń stwierdził (rozróżniając przy okazji pojęcie denotacji zdania i pojęcie znaczenia zdania), że denotacją zdania jest jego wartość logiczna.

Załóżmy bowiem, że $g(a) = g(b)$.

Zgodnie z zasadą ekstensjonalności globalnej mamy w szczególności:

$$\text{jeśli } g(a) = g(b), \text{ to } PR_i(..g(a)..) = PR_i(...g(a/b)..).$$

Jeśli teraz PR_i jest operacją w algebrze denotacji odpowiadającą predykatowi identyczności z języka J, to (z homomorfizmu algebry języka i algebry denotacji)

$$PR_i(g(a), g(b)) = PR_i(g(a), g(a/b)) \text{ zawsze i tylko wtedy, gdy } d(a = b) = d(a = a),$$

a stąd

$$\text{jeśli } g(a) = g(b), \text{ to } d(a = b) = d(a = a).$$

Widać, że żeby spełniony był ten warunek, relacja R taka, że

$$R(\alpha,\beta) \text{ zawsze i tylko wtedy, gdy } d(\alpha) = d(\beta)$$

musi być «bardzo gruba», i nie nadaje się na nią ani relacja równokształtności (w PRZYKŁADZIE 2 — relacja R_4), ani logicznej równoważność formuł równokształtności (w PRZYKŁADZIE 2 — relacja R_5). Może to być jedynie relacja równości wartości logicznych (w PRZYKŁADZIE 2 — relacja R_6).[9]

Zauważmy, że nie jest to jedyna strategia, którą może przyjąć ktoś, kto *a priori* — tak jak Frege — uznaje zasadę ekstensjonalności globalnej. Można mianowicie

---

[9] Konsekwentny zwolennik stanowiska Fregego podobną strategię powinien też stosować do innych języków, np. do języka zdaniowych logik modalnych. Skoro *a priori* spełniona jest zasada ekstensjonalności, to należy dobrać do niej funkcję denotacji zdań tak, aby w szczególności dla dowolnych zdań α i β spełniony był warunek:

$$\text{jeśli } d(\alpha) = d(\beta), \text{ to } d(\Box\alpha) = d(\Box\beta).$$

Tak będzie — jak pokazuje PRZYKŁAD 1 — gdy funkcja d jest zdefiniowana przez abstrakcję w następujący sposób:

$$d(\alpha) = d(\beta) \text{ zawsze i tylko wtedy, gdy } \alpha \leftrightarrow \beta \in L.$$

uznać, że ustalona jest nie tyle funkcja g (denotacji dla nazw), ile funkcja d (denotacji dla zdań). Załóżmy, że spełnia ona następujący warunek:

$d(\alpha) = d(\beta)$ zawsze i tylko wtedy, gdy $R_4(\alpha,\beta)$.

Wtedy — jak pokazuje PRZYKŁAD 2 — trzeba konsekwentnie przyjąć, że

$g(a) = g(b)$ zawsze i tylko wtedy, gdy $R_1(a,b)$.

Podsumowując problem ekstensjonalności możemy traktować jako swoisty układ trzech zdań:

(I) zasada ekstensjonalności globalnej;
(II) określona definicja funkcji denotacji dla zdań;
(III) określona definicja funkcji denotacji dla nazw.

Mając (I) i (II) możemy wyznaczyć (III), mając (I) i (III) możemy wyznaczyć (II). Jeśli z kolei są dane (II) i (III), to możemy się zastanawiać, czy zachodzi (I). Moim zdaniem szczególnie ciekawy, ale zarazem najmniej rozpracowany we współczesnej literaturze filozoficznej, jest wariant pierwszy — uzależniający definicję uniwersum korelatów semantycznych dla nazw w języku ekstensjonalnym od tego, jak zdefiniowane jest uniwersum korelatów semantycznych dla zdań. Leży on w sferze zaintresowań ontologii sytuacji.

BIBLIOGRAFIA

J. Barwise, J. Perry 1981 „Semantic Innocence and Uncompromising", *Midwest Studies in the Philosophy of Language VI*, Univ. Of Minesota Press, s. 401-413.

G. Frege 1952 „On Sense and Reference", [w;] *Translations from the Philosophical Writings of Gottlob Frege*, Oxford, Blackwell, s. 56-78.

S. Neale 2001 *Facing Facts*, Oxford, Calerdon Press.

R. Suszko 1998 „Formalna teoria wartości logicznych I" [w:] *Wybór pism*, Warszawa, s. 121-179.

A. Wójtowicz 1998 „O pojęciu ekstensjonalności", *Edukacja Filozoficzna* 26, s. 37-43.