Piotr Łukowski

Epistemiczna rola logiki fałszu

Filozofia Nauki 14/3, 57-77

2006

Filozofia Nauki
Rok XIV, 2006, Nr 3(55)

Piotr Łukowski

Epistemiczna rola logiki fałszu

Zazwyczaj dana w konkretnej postaci logika jest systemem formalizującym procedurę poszerzającą zbiór zdań. Jeśli więc zbiór X stanowią akceptowane przez nas przesłanki, logika dana w postaci relacji konsekwencji $\models$, w jednoznaczny sposób określa zbiór $X_{\models} = \{\alpha\colon X \models \alpha\}$ wszystkich wniosków wynikających na mocy $\models$ z X, które oczywiście również winniśmy zaakceptować. Naturalnie, $X \subseteq X_{\models}$. Okazuje się jednak, że w wielu przypadkach niezwykle przydatne jest dysponowanie ścisłą i precyzyjną procedurą służącą usuwaniu zdań, które z jakichś powodów przestały być przez nas akceptowane. Przyczyna odrzucania uprzednio zaakceptowanych zdań może być jednak dwojaka. Po pierwsze, pewne zdania odrzucamy wyłącznie ze względu na ich treść. Jest to typowo pozalogiczny powód odrzucenia zdań. Po drugie, pewne zdania odrzucamy, ponieważ odrzuciliśmy inne. To odrzucanie powinno mieć ścisłe, logiczne podstawy. Jasne jest, że procedura odrzuceniowa winna dotyczyć jedynie tego drugiego typu odrzucania zdań. Pierwsze jest bowiem czysto arbitralne, tak jak czysto arbitralne, czyli pozalogiczne, jest zaakceptowanie przesłanek w rozumowaniu dedukcyjnym.

Prawdę mówiąc, dopiero logika umożliwiająca zarówno poszerzanie zbioru akceptowanych zdań, jak i jego redukowanie zasługuje na miano logiki formalizującej nasze codzienne myślenie, które przecież nie ogranicza się jedynie do poszerzania zbioru przesłanek.

W pracy tej jest przedstawiona semantyczna analiza funkcji, jaką pełni w procesie redukcji uprzednio zaakceptowanych zdań logika dualna do danej logiki określonej przez klasę matryc.

1. RELACJA DUALNEJ KONSEKWENCJI MATRYCOWEJ

Niech algebra $\underline{L}$ będzie językiem zdaniowym ze zbiorem formuł L, $\boldsymbol{M}$ zaś będzie klasą matryc $\underline{M} = <\underline{A}, D>$, gdzie $\underline{A}$ jest algebrą podobną do języka $\underline{L}$, a D niepustym podzbiorem uniwersum A algebry $\underline{A}$. Niech $\boldsymbol{H}$ będzie klasą wszystkich funkcji h: $\underline{L} \rightarrow \underline{A}$. A jest więc zbiorem korelatów semantycznych dla wyrażeń ze zbioru L.

Klasa matryc $\boldsymbol{M}$ wraz z klasą funkcji $\boldsymbol{H}$ jednoznacznie wyznaczają logiczną inferencję $\models\ \subseteq 2^L \times L$ określoną w sposób standardowy:

$$X \models \alpha \textit{ wtw } \forall \underline{M} \in \boldsymbol{M}\ \forall h \in \boldsymbol{H}\ (h(X) \subseteq D \textit{ implikuje } h(\alpha) \in D),$$

dla dowolnych $X \subseteq L$ i $\alpha \in L$.

Dla dowolnej matrycy $\underline{M} = <\underline{A}, D>$ istnieje matryca do niej dualna $\underline{M}^d = <\underline{A}, A - D>$. Dwie matryce o tej samej algebrze są wzajemnie dualne, gdy zbiór wartości wyróżnionych jednej z nich jest dopełnieniem zbioru wartości wyróżnionych drugiej.

Niech $\boldsymbol{M}^d$ będzie klasą wszystkich matryc dualnych do matryc tworzących klasę $\boldsymbol{M}$. Mówiąc ściślej, $\underline{M} = <\underline{A}, D>$ jest matrycą klasy $\boldsymbol{M}^d$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\underline{M} = <\underline{A}, A - D>$ jest matrycą klasy $\boldsymbol{M}$. Nie jest więc trudno zauważyć, że klasą matryc dualnych do klasy matryc dualnych do danej klasy matryc jest ta właśnie klasa matryc:

$$\boldsymbol{M}^{dd} = \boldsymbol{M}.$$

Naturalnie klasa matryc dualnych może wraz z klasą $\boldsymbol{H}$ definiować relację $\models^d\ \subseteq 2^L \times L$ określoną w tradycyjny sposób:

$$X \models^d \alpha \textit{ wtw } \forall \underline{M} \in \boldsymbol{M}^d\ \forall h \in \boldsymbol{H}\ (h(X) \subseteq D \textit{ implikuje } h(\alpha) \in D),$$

dla dowolnych $X \subseteq L$ i $\alpha \in L$. Oczywiście, relacja $\models^d$ jest relacją konsekwencji. Spełnione są przez nią bowiem trzy warunki:

C1. $X \subseteq X_{\models d}$;
C2. $X \subseteq Y$ *implikuje* $X_{\models d} \subseteq Y_{\models d}$;
C3. $(X_{\models d})_{\models d} \subseteq X_{\models d}$;

gdzie $X_{\models d} = \{\alpha\colon X \models^d \alpha\}$. Zbiór $X_{\models}$ zwany jest teorią relacji konsekwencji $\models$, krócej $\models$-teorią. Ponadto, tak określona relacja $\models^d$ jest dualna w sensie Wójcickiego do relacji $\models$. Przypomnijmy, że zgodnie z definicją Wójcickiego[1], relacja $\models^d$ jest dualna do danej relacji $\models$, gdy dla dowolnych $X \subseteq L$ i $\alpha \in L$:

$$X \models^d \alpha \textit{ wtw } \bigcap\{\{\beta\}_{\models d}\colon \beta \in X_f\} \subseteq \{\alpha\}_{\models d}, \textit{ dla pewnego skończonego } X_f \subseteq X.$$

Wprost z definicji relacji $\models$ oraz $\models^d$ wynika, że do określenia obu wystarczy jedna z dwóch klas matryc $\boldsymbol{M}$ lub $\boldsymbol{M}^d$. Pozostając przy dotychczasowych oznaczeniach, możemy łatwo zauważyć, że dla dowolnych $X \subseteq L$ i $\alpha \in L$:

[1] R. Wójcicki, *Dual counterparts of consequence operation*, Bulletin of the Section of Logic (BSL) 2/1, 1973, s. 55.

$$X \models \alpha \text{ wtw } \forall \underline{M} \in \boldsymbol{M}^d\ \forall h \in \boldsymbol{H}\ (h(X) \subseteq A - D \text{ implikuje } h(\alpha) \in A - D);$$
$$X \models^d \alpha \text{ wtw } \forall \underline{M} \in \boldsymbol{M}\ \forall h \in \boldsymbol{H}\ (h(X) \subseteq A - D \text{ implikuje } h(\alpha) \in A - D).$$

Prostym wnioskiem wynikającym natychmiast z powyższego faktu jest to, iż

$$\models^{dd} = \models.$$

Wydaje się, że trudno jest mówić o jakiejkolwiek dualizacji logiki bez spełnienia tego warunku. Przecież logiką dualną do logiki dualnej do danej powinna być właśnie dana logika.

Sens obu relacji, danej oraz dualnej do niej jest raczej intuicyjny. Jeśli zbiory wyróżnione D matryc klasy $\boldsymbol{M}$ są kojarzone z pojęciem prawdy, a dopełnienia $A - D$ tych zbiorów z pojęciem fałszu, mamy dość typową sytuację, w której dana logika jest uważna za logikę prawdy, a logika do niej dualna z logiką fałszu. Tak jest w przypadku logiki klasycznej, logiki intuicjonistycznej, logiki Heytinga-Brouwera,[2] systemów modalnych i wielu innych logik. Może się jednak zdarzyć, że zbiory wyróżnione D matryc klasy $\boldsymbol{M}$ są kojarzone z pojęciem fałszu, dopełnienia zaś tych zbiorów $A - D$ z pojęciem prawdy. Mamy wówczas sytuację, w której dana logika jest uważana za logikę fałszu, a dualna do niej za logikę prawdy. Ilustracją tego przypadku jest logika Brouwera.[3]

Przyjmijmy, że $\models_{CL}$ jest relacją konsekwencji klasycznej logiki zdaniowej. Wówczas, dla dwóch zbiorów:

X_1 = {Jeśli Jan jest synem Adama, to Jan jest prawnikiem; Jan jest synem Adama}
Y_1 = {Jan jest politykiem lub Jan jest prawnikiem; Nieprawda, że Jan jest prawnikiem};

zachodzą następujące relacje wynikania logicznego:

$X_1 \models_{CL}$ Jan jest prawnikiem, oraz
$Y_1 \models_{CL}$ Jan jest politykiem.

Relacja $\models_{CL}$ ustala prawdziwość pewnych formuł na mocy prawdziwości innych formuł. Jeśli zaś $\models^d_{CL}$ jest relacją dualną do $\models_{CL}$, to $\models^d_{CL}$ ustala fałszywość pewnych formuł na podstawie fałszywości innych. Niech dane będą zbiory

X_2 = {Nie jest prawdą, że jeśli Jan jest synem Adama, to Jan jest prawnikiem; Jan jest prawnikiem}
Y_2 = {Jan jest politykiem i Jan jest prawnikiem; Nie jest prawdą, że Jan jest politykiem}.

Wówczas,

[2] C. Rauszer, *An algebraic and Kripke-style approach to a certain extension of ntuitionistic logic*, Dissertationes Mathematicae, CLXVII, Warszawa 1980, PWN.

[3] Tamże.

$X_2 \models^d_{CL}$ *Jan jest synem Adama*, oraz
$Y_2 \models^d_{CL}$ *Jan jest prawnikiem.*

W pierwszym przypadku zdania tworzące zbiory X_1 i Y_1 zostały zinterpretowane jako prawdziwe, a zatem wnioski z nich wynikające na mocy logiki prawdy również zostały uznane za prawdziwe. W drugim przypadku została założona fałszywość wszystkich zdań zbiorów X_2 i Y_2 i tym samym wnioski z nich wynikające na mocy logiki fałszu również zostały uznane za zdania fałszywe.

W powyższym przykładzie, wnioskowania w oparciu o klasyczną logikę fałszu odpowiadają następującym schematom:

Jeśli
Jeśli Jan jest synem Adama, to Jan jest prawnikiem — prawda oraz
Jan jest prawnikiem — fałsz,
to
Jan jest synem Adama — fałsz.

Jeśli
Jan jest politykiem i Jan jest prawnikiem — fałsz oraz
Jan jest politykiem — prawda,
to
Jan jest prawnikiem — fałsz.

Naturalnie, pierwsze założenie w pierwszym schemacie odpowiada następującemu:
Nieprawda, że jeśli Jan jest synem Adama, to Jan jest prawnikiem — fałsz;
drugie założenie w drugim wnioskowaniu odpowiada natomiast:
Nie jest prawdą, że Jan jest politykiem — fałsz.

Warunki interpretujące spójniki w klasycznej logice fałszu są następujące:

$h(\neg\alpha) \in D$	*wtw*	$h(\alpha) \notin D;$
$h(\alpha \wedge \beta) \in D$	*wtw*	$h(\alpha) \in D$ *lub* $h(\beta) \in D;$
$h(\alpha \vee \beta) \in D$	*wtw*	$h(\alpha) \in D$ *i* $h(\beta) \in D;$
$h(\alpha \rightarrow \beta) \in D$	*wtw*	$h(\alpha) \notin D$ *i* $h(\beta) \in D,$

dla $\alpha, \beta \in L$. Warunki te są dualne do doskonale znanych warunków interpretujących spójniki w logice prawdy. Oczywiście, między dualnymi warunkami zachodzi równoważność. Dla przykładu zauważmy, że w przypadku koniunkcji mamy:

$h(\alpha \wedge \beta) \notin D$ *wtw nieprawda, że* $(h(\alpha) \in D$ *lub* $h(\beta) \in D)$ *wtw* $h(\alpha) \notin D$ *i* $h(\beta) \notin D.$

Zatem,

$h(\alpha \wedge \beta) \in A - D$ *wtw* $h(\alpha) \in A - D$ *i* $h(\beta) \in A - D.$

Jest to kolejny argument na to, iż matryca logiki dualnej do danej może zostać zastąpiona przez matrycę logiki danej. Wystarczy zmienić jej użycie. Tak więc obie logiki dana i dualna do niej są określone przez jedną i tę samą klasę matryc z tym, że w jednym przypadku ma zastosowanie zbiór wartości wyróżnionych, w drugim zaś jego dopełnienie.

Aksjomatyka dla klasycznej zdaniowej logiki fałszu jest podana we wcześniejszej pracy autora.[4]

Naturalną konsekwencją związku, jaki zachodzi między daną relacją a relacją do niej dualną, jest to, iż tautologie jednej są kontrtautologiami drugiej.

Formuła α jest kontrtautologią logiki $(\underline{L}, \models)$ wtedy i tylko wtedy, gdy:

$$\forall \underline{M} \in \boldsymbol{M} \ \forall h \in \boldsymbol{H} \ h(\alpha) \in A - D.$$

Oczywiście, warunek ten jest równoważny następującemu:

$$\forall \underline{M} \in \boldsymbol{M}^d \ \forall h \in \boldsymbol{H} \ h(\alpha) \in D,$$

który oznacza, że formuła α jest tautologią logiki $(\underline{L}, \models^d)$.

Naturalnie, sytuacja ta ma miejsce również w przypadku logiki klasycznej. Dla dowolnego zbioru przesłanek X mamy na przykład, że:

$X \models^d_{CL}$ *Jan jest prawnikiem i nieprawda że Jan jest prawnikiem,*
$X \models^d_{CL}$ *Jeśli Jan jest prawnikiem, to nieprawda że Jan jest prawnikiem.*

2. RELACJA ODRZUCANIA ZDAŃ

Kluczowym problemem wiążącym się z formalizacją procedur działających na przekonaniach jest odrzucanie zdań. Jeśli korelat semantyczny zdania będziemy utożsamiali z przekonaniem, to poza poszerzaniem zbioru zdań o nowe, dopiero co zaakceptowane winniśmy być w stanie również rezygnować z niektórych zdań. Jasne jest przecież, że chociaż podstawy odrzucenia jakiegoś zdania najczęściej są arbitralne i pozalogiczne, to jednak samo odrzucenie zdania winno mieć ściśle określone konsekwencje logiczne — arbitralne skądinąd odrzucenie jakiegoś zdania winno pociągać za sobą odrzucenie innego zdania (innych zdań). Załóżmy bowiem, że zaakceptowane przez nas zdanie β jest logiczną konsekwencją wcześniejszego zaakceptowania przez nas zdań $\alpha \to \beta$ i α. Przyjmijmy ponadto, że z jakichś pozalogicznych powodów uznaliśmy, iż nie możemy dłużej akceptować zdania β, a zatem musimy β odrzucić. Jeśli jednak chcemy, aby nasze poglądy były logicznie spójne, nie możemy poprzestać na samym odrzuceniu zdania β. Przecież bez odrzucenia przynajmniej jednego ze zdań $\alpha \to \beta$ i α zdanie β i tak powinno pozostać naszym przekonaniem. Oczywiście, jeśli zdecydujemy się na odrzucenie któregoś ze zdań $\alpha \to \beta$, α fakt ten może mieć swoje dalsze konsekwencje, polegające na tym, że zajdzie potrzeba usu-

[4] P. Łukowski, *A formalization of the „step foreward — step backward" reasoning*, Anales del Seminario de Historia de la Filosofia. Servicio de Publicationes Universidad Complutense, 18, 2001, s. 110-111.

nięcia kolejnego zdania należącego do zbioru naszych przekonań. Jasne jest więc, że mamy tu do czynienia z logiką, która niewątpliwie nie jest logiką dedukcyjną, skoro nie poszerza zbioru przesłanek, lecz go zmniejsza.

Obie rozważane w poprzednim paragrafie relacje są relacjami konsekwencji, a zatem reprezentują dedukcyjny rodzaj wnioskowania. Relacja $|=$ poszerza zbiór zdań uznawanych na ogół za prawdziwe, podczas gdy relacja do niej dualna $|=^d$ poszerza zbiór zdań uważanych na ogół za fałszywe. W oczywisty sposób żadna z nich nie formalizuje procesu redukcji zbioru zdań. Trudno jednak oprzeć się wrażeniu, że relacja $|=^d$ ma jakiś istotny związek z procedurą odrzucania. W końcu odrzucamy te zdania, które zaczęliśmy z jakichś powodów uważać za fałszywe. Logika fałszu winna więc stanowić kluczowy element w procedurze odrzucania zdań. Z drugiej strony, procedura odrzucania zdań winna działać na zdaniach prawdziwych, a nie fałszywych. Skoro ze zbioru zdań X chcemy usunąć zdanie α, to z jednej strony wszystkie zdania zbioru X poza zdaniem α interpretujemy jako prawdziwe, a jedynie zdanie α jako fałszywe. W formalnym określeniu relacji odrzucania zdań posłużmy się odwróconym symbolem relacji konsekwencji: $=|$. Powstaje pytanie, jak zdefiniować relację:

$$X =| \alpha$$

wyrażającą usunięcie ze zbioru zdań X zdania α.

Gwarancją zapewniającą to, że dana relacja konsekwencji $|=$ oraz relacja konsekwencji do niej dualna $|=^d$ reprezentują tę samą logikę, jest fakt określenia obu relacji przez te same klasy: matryc $\boldsymbol{M}$ i funkcji $\boldsymbol{H}$. Ponieważ chcemy, aby relacja odrzucania również reprezentowała tę samą logikę, co obie relacje konsekwencji, jej określenie także powinno bazować na tych samych klasach $\boldsymbol{M}$ i $\boldsymbol{H}$.

Zgodnie z wcześniejszym założeniem, logika fałszu winna być kluczem do zdefiniowania relacji $=|$. Ponieważ zgodnie z założeniem przedstawionym w abstrakcie odrzucenie zdań jest arbitralne, relacja odrzucania powinna usuwać te zdania, których usunięcie jest logicznym następstwem arbitralnego usunięcia „pierwszych" zdań. Jedynymi zdaniami, których usunięcie może, a nawet powinno być postulowane przez logikę, to zdania będące podstawieniami kontrtautologii. Te zdania nie należą jednak do niesprzecznego zbioru przekonań. Powstaje zatem pytanie, kiedy istnieje logiczna podstawa do stwierdzenia, że zdanie α należy usunąć ze zbioru uprzednio zaakceptowanych zdań X? Zanim odpowiemy na to pytanie, zauważmy, że zdanie α należy zaakceptować wówczas, gdy na mocy logiki prawdy wynika ono ze zbioru X, a więc, gdy $X |= \alpha$. Wydaje się więc, że zdanie α należy usunąć ze zbioru zdań X, jeśli tylko α wynika ze zbioru zdań $L - X$ na mocy logiki fałszu, a więc wtedy, gdy $L - X |=^d \alpha$. Istotnie, skoro X jest zbiorem zdań interpretowanych jako prawdziwe, to na gruncie logiki dwuwartościowej $L - X$ jest zbiorem zdań uznanych za fałszywe. Jednak dysponując dedukcyjną logiką fałszu, wiemy, kiedy jakieś zdanie winno być uznane za fałszywe, skoro inne zdania są uznane za fałszywe. Jeśli więc mamy sytuację, w której $L - X |=^d \alpha$, to fakt ten oznacza, że fałszywość zdań ze zbioru $L - X$ pociąga za sobą fałszywość zdania α. Co więcej, to „pociąganie za sobą” ma moc dedukcji logiki danej relacją |=. Zatem,

$$X =| \alpha \text{ wtw } \forall \underline{M} \in \mathbf{M}^d \ \forall h \in \mathbf{H} \ (h(L - X) \subseteq D \text{ implikuje } h(\alpha) \in D)$$

lub równoważnie

$$X =| \alpha \text{ wtw } \forall \underline{M} \in \mathbf{M} \ \forall h \in \mathbf{H} \ (h(L - X) \subseteq A - D \text{ implikuje } h(\alpha) \in A - D).$$

Pozostaje więc sprawdzić, które zdania zbioru X nie są odrzucone.

$$X \neq| \alpha \text{ wtw } \exists \underline{M} \in \mathbf{M}^d \ \exists h \in \mathbf{H} \ (h(L - X) \subseteq D \text{ i } h(\alpha) \in A - D)$$

lub równoważnie

$$X \neq| \alpha \text{ wtw } \exists \underline{M} \in \mathbf{M} \ \exists h \in \mathbf{H} \ (h(L - X) \subseteq A - D \text{ i } h(\alpha) \in D).$$

Widzimy więc, że nasza relacja odrzucania logicznego pozostawi w zbiorze X każde zdanie α, dla którego istnieje matryca $\underline{M}$ i funkcja h takie, że mimo iż wszystkie zdania spoza zbioru X będą w $\underline{M}$ przy odwzorowaniu h fałszywe, α pozostanie prawdziwe.

Odrębną kwestią wydaje się to, która relacja jest bardziej użyteczna: =|, czy ≠|? Obie są określone na zbiorach zdań interpretowanych jako prawdziwe. To co je różni, to wskazywanie na zdania usuwane ze zbioru X w przypadku =| oraz na zdania pozostawione w zbiorze X w przypadku ≠|. Można więc stwierdzić, że prawdziwą relacją odrzucania nie jest ≠|, lecz =|. Ponieważ jednak dla zbioru przekonań ważniejszą wydaje się informacja, które zdania nadal pozostają w tym zbiorze, nasze dalsze rozważania dotyczyć będą relacji ≠|. Operując relacją ≠| nie wychodzimy bowiem poza zbiór zdań akceptowanych. Zbiór zdań, które pozostały w zbiorze naszych przekonań, nazwiemy odrzuceniową teorią relacji ≠| (inaczej ≠|-teorią) i oznaczymy $X_{\neq|}$:

$$X_{\neq|} = \{\alpha : X \neq| \alpha\}.$$

Nie jest trudno zauważyć, że relacja ≠| nie jest relacją konsekwencji. Co więcej, można wskazać warunki, które spełnia każda relacja odrzucania zdefiniowana w wyżej przedstawiony sposób. Są to dwa warunki dualne do warunków podanych przez Tarskiego dla relacji konsekwencji[5] oraz dobrze znany warunek monotoniczności nowej relacji:

E1. $X_{\neq|} \subseteq X$;
E2. $X \subseteq Y$ *implikuje* $X_{\neq|} \subseteq Y_{\neq|}$;
E3. $X_{\neq|} \subseteq (X_{\neq|})_{\neq|}$.

[5] A. Tarski, *Über einige fundamentale Begriffe der Metamathematik*, Compt. Rend. Séances Soc. Sci. Lett. Varsovie, cl.III, 23, s. 22-29.

Dowód warunku E1. Załóżmy, że $\alpha \notin X$. Zatem, $\alpha \in L - X$. Niech $\underline{M}$ będzie dowolną matrycą z $\boldsymbol{M}$, h zaś dowolną funkcją z $\boldsymbol{H}$. Jeśli tylko $h(L - X) \subseteq A - D$, to z założenia również $h(\alpha) \in A - D$. Zatem, $\alpha \notin X_{\neq|}$. □

Dowód warunku E2. Załóżmy, że $X \subseteq Y$. Zatem $L - Y \subseteq L - X$. Niech ponadto, $\alpha \in X_{\neq|}$. Istnieje więc matryca $\underline{M} \in \boldsymbol{M}$ i funkcja $h \in \boldsymbol{H}$ takie, że $h(L - X) \subseteq A - D$ i $h(\alpha) \in D$. Wprost z założenia wynika więc, że $h(L - Y) \subseteq A - D$. Zatem, $\alpha \in Y_{\neq|}$. □

Dowód warunku E3. Załóżmy, że $\alpha \in X_{\neq|}$ oraz $\alpha \notin (X_{\neq|})_{\neq|}$. Z pierwszego założenia wynika, że dla pewnych $\underline{M_0} \in \boldsymbol{M}$, $h_0 \in \boldsymbol{H}$: $h_0(L - X) \subseteq A_0 - D_0$ i $h_0(\alpha) \in D_0$. Z drugiego założenia mamy, że dla dowolnych $\underline{M} \in \boldsymbol{M}$ i $h \in \boldsymbol{H}$: $h(L - X_{\neq|}) \subseteq A - D$ implikuje $h(\alpha) \in A - D$. Nie jest więc prawdą, że $h_0(L - X_{\neq|}) \subseteq A_0 - D_0$. Istnieje zatem zdanie $\beta \in L - X_{\neq|}$ takie, że $h_0(\alpha) \notin A_0 - D_0$. Skoro $\beta \notin X_{\neq|}$, więc $X =| \beta$. Jest to jednak sprzeczne z tym, że dla $\underline{M_0} \in \boldsymbol{M}$, $h_0 \in \boldsymbol{H}$: $h_0(L - X) \subseteq A_0 - D_0$ i $h_0(\beta) \in D_0$. □

Zatem, zgodnie z warunkiem *E1*, nie może w zbiorze $X_{\neq|}$ pozostać coś, czego w X nie było. Warunek *E2* gwarantuje monotoniczność relacji $\neq|$, według *E3* zaś ponowne zastosowanie relacji $\neq|$ do zbioru $X_{\neq|}$ nie wprowadza w nim żadnych zmian: wprost z *E1* i *E3* wynika bowiem, że $X_{\neq|} = (X_{\neq|})_{\neq|}$.

Relacja odrzucania $\neq|$ „działa" na zbiorach zdań uznawanych za prawdziwe. Należy ją więc traktować jako relację odrzucania logiki prawdy. Naturalnie, ma ona swój „fałszywościowy" odpowiednik w postaci relacji $\neq|^d \subseteq 2^L \times L$ określonej następująco:

$$X \neq|^d \alpha \text{ wtw } \exists \underline{M} \in \boldsymbol{M}\ \exists h \in \boldsymbol{H}\ (h(L - X) \subseteq D \text{ i } h(\alpha) \in A - D)$$

czyli równoważnie

$$X \neq|^d \alpha \text{ wtw } \exists \underline{M} \in \boldsymbol{M}^d\ \exists h \in \boldsymbol{H}\ (h(L - X) \subseteq A - D \text{ i } h(\alpha) \in D).$$

Związki jakie zachodzą między relacjami $|=$ i $\neq|^d$ oraz $|=^d$ i $\neq|$ są oczywiste. Dla dowolnych $X \subseteq L$ i $\alpha \in L$:

$$X =| \alpha \text{ wtw } L - X |=^d \alpha,$$
$$X =|^d \alpha \text{ wtw } L - X |= \alpha.$$

Oznacza to, że

$$X_{\neq|} = X - \{\alpha\colon L - X |=^d \alpha\},$$
$$X_{\neq|d} = X - \{\alpha\colon L - X |= \alpha\}.$$

Naturalnie, zbiory $X_{\neq|}$ oraz $X_{\neq|d}$ są odrzuceniowymi teoriami odpowiednio relacji: $\neq|$ i $\neq|^d$. Ponieważ każda relacja jest zdefiniowana przez tę samą klasę matryc $\boldsymbol{M}$ i tę samą klasę funkcji $\boldsymbol{H}$, każda relacja stanowi integralną część jednej wspólnej logiki. Fakt ten można wyrazić inaczej, a może nawet ściślej: każda z czterech relacji $|=$, $=|$, $|=^d$, $=|^d$ jest jedną i tą samą logiką, tyle tylko, że „obserwowaną" z innej strony. Para dwóch klas: matryc i odwzorowań, jednoznacznie wyznacza tę logikę, zaś różny sposób ich użycia wskazuje na to, która ze stron jednej i tej samej logiki ma w danym momencie zastosowanie. Cztery dotychczas rozważane relacje można pogrupować następująco:

$(\underline{L}, |\!=, =\!|)$,
$(\underline{L}, |\!=^d, =\!|^d)$.

Wówczas pierwsza trójka jest dedukcyjno-odrzuceniową postacią logiki prawdy, podczas gdy druga trójka dedukcyjno-odrzuceniową postacią logiki fałszu. Naturalnie $(\underline{L}, |\!=)$ jest dedukcyjną logiką prawdy, $(\underline{L}, =\!|)$ odrzuceniową logiką prawdy, $(\underline{L}, |\!=^d)$ dedukcyjną logiką fałszu, $(\underline{L}, =\!|^d)$ zaś odrzuceniową logiką fałszu. Każda z tych czterech logik umożliwia rekonstrukcję pozostałych trzech.

3. TEORIE DEDUKCYJNE I ODRZUCENIOWE JAKO ZBIORY PRZEKONAŃ

W tradycji AGM (Alchourrón-Gärdenfors-Makinson)[6] stany przekonań są zbiorami zdań zamkniętymi na reguły logiki klasycznej, a więc są reprezentowane przez teorie klasycznej logiki zdaniowej. Założenie to wiąże się z pewnymi daleko idącymi idealizacjami.

Po pierwsze zbiór przekonań jest nieskończony i to zarówno ze względu na ilość tautologii klasycznych, jak i klasycznych konsekwencji przyjętych przesłanek. Można bronić tezy, według której każdy człowiek dysponuje nieskończoną ilością przekonań wiążących się tak z prawdziwymi jak i fałszywymi zdaniami. Naturalnie to „dysponowanie" ma raczej potencjalny sens. Jednak można zaryzykować tezę, iż każdy kto skończył szkołę średnią wie, iż prawdziwe są zdania:

„*0 jest liczbą naturalną*",
„*1 jest liczbą naturalną*",
„*2 jest liczbą naturalną*",

… itd. w nieskończoność. Podobnie zdajemy sobie sprawę z fałszywości zdań:

„*–1 jest liczbą naturalną*",
„*–2 jest liczbą naturalną*",
„*–3 jest liczbą naturalną*",

… itd. w nieskończoność. Nie jest więc niczym specjalnie szokującym przyjmowanie istnienia nieskończonej ilości przekonań. Problemem jest jednak sztuczność wielu klasycznych konsekwencji przyjętych założeń. Jeśli zaakceptujemy zdanie α, to na mocy nie tylko klasycznej logiki winniśmy zaakceptować wszystkie alternaty-

---

[6] C. Alchourrón and D. Makinson, *On the logic of theory change: contraction functions and their associated revision functions*, Theoria 48, 1982, s. 14-37; C. Alchourrón, P. Gärdenfors, and D. Makinson, *On the logic of theory change: Partial meet contraction revision functions*, Journal of Symbolic Logic 50, 1985, s. 510-530; P. Gärdenfors, *Rules for rational changes of belief* [:in] T. Pauli, editor, Philosophical Essays Dedicated to Lennart Aqvist on His Fiftieth Birthday, s. 88-101, University of Uppsala Philosophical Studies 34, 1982.

wy, których α jest jednym z czynników. W szczególności, naszym przekonaniem powinno być zdanie:

$$\alpha \vee (\beta \wedge \neg\beta).$$

Nienaturalne wydaje się również i to, że nasze przekonania dotyczą wszystkich tautologii klasycznych. Dość ryzykowne byłoby przyjąć, że każdy logicznie myślący człowiek zdaje sobie sprawę z tego, że każde zdanie będące podstawieniem tezy Haubera należy do zbioru jego przekonań:

$$((\alpha \to \beta) \wedge (\gamma \to \delta) \wedge (\alpha \vee \gamma) \wedge \neg(\beta \wedge \delta)) \to ((\beta \to \alpha) \wedge (\delta \to \gamma)),$$

a przecież powyższa formuła jest całkiem intuicyjna, gdy porówna się ją z innymi tautologiami. Jednak skomplikowana postać większości nieznanych przecież tautologii to jeden problem, a paradoksalność innych — to problem drugi. Trudno przecież przyjąć, że do zbioru naszych przekonań należą zdania będące podstawieniami tezy Dummetta:

$$(\alpha \to \beta) \vee (\beta \to \alpha).$$

Nikt przecież nie wierzy w to, że z dwóch dowolnie wybranych zdań, pierwsze implikuje drugie lub drugie pierwsze. Jest to mocno nieintuicyjne założenie. Ponadto, niektóre reguły są źródłem wyjątkowo poważnych problemów. Jako przykład wystarczy rozważyć regułę będącą odpowiednikiem prawa Dunsa Szkota:

$$\{\alpha, \neg\alpha\} \vdash \beta.$$

Czy istotnie poglądy człowieka są aż tak bardzo niesprzeczne? Przecież pojawienie się sprzeczności w zbiorze przekonań raczej nie skłania nikogo do uznania każdego istniejącego zdania jako logicznego wniosku sprzecznych poglądów. Wydaje się, że to właśnie fakt skończonej liczby wniosków, jakie możemy wyprowadzić z przyjętych przesłanek tłumaczy, dlaczego, mimo przypadków akceptowania sprzeczności, nie dochodzi do przepełnienia zbioru przesłanek. Wydaje się jednak, iż przyjęcie założenia, że zbiór przekonań zawiera wszystkie tautologie i wszystkie konsekwencje uprzednio zaakceptowanych przesłanek, jest podejściem mimo wszystko rozsądnym, a nawet koniecznym. To właśnie dzięki niemu możemy swobodnie korzystać ze wszystkich logicznych konsekwencji przyjętych przez nas przesłanek. Nieskończony zbiór naszych przekonań traktujemy więc jako zbiór, którego elementy zawsze są do naszej dyspozycji. Można więc przyjąć, że zbiór przekonań w postaci teorii dedukcyjnej ma czysto potencjalny charakter.

Drugą dość daleko idącą idealizacją jest to, iż logiką formalizującą zmiany naszych przekonań jest logika klasyczna. Nietrudno podać wiele tzw. paradoksów logiki klasycznej, czyli jej praw niezgodnych z naszym rozumowaniem, np. wspomniane wyżej prawo Dummetta, mówiące o alternatywie implikacji odwrotnych, czy też prawo Dunsa Szkota:

$\neg\alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta)$
„jeśli nie spóźnię się na pociąg, to jeśli się na niego spóźnię to nim pojadę”.

Z drugiej strony logika klasyczna wydaje się zbyt prosta i związku z tym niebędąca w stanie wyrazić wielu procesów myślenia, które nie dają się sprowadzić do języków zdaniowych czy predykatywnych. Istnieją przecież niewyrażalne w logice klasycznej kontekstowe związki wnioskowań. Świadomość tych problemów leży u podstaw istnienia tak wielu nieklasycznych logik. Paradoksem tych logik jest to, iż mimo faktu, że każda z nich została stworzona po to, aby zastąpić „niedoskonałą” logikę klasyczną, żadna z nieklasycznych logik nie jest w stanie nawet dorównać logice klasycznej. Przecież każda z logik nieklasycznych jest rozwijana za pomocą właśnie logiki klasycznej. Jeśli więc myślimy o nieklasycznej implikacji intuicjonistycznej, to czynimy to za pomocą metalogiki, która na szczęście jest logiką klasyczną. W przeciwnym razie trudno byłoby zrozumieć nie tylko intuicjonistyczną negację, lecz także ideę leżącą u podstaw logiki intuicjonistycznej. Każdy logik budujący logikę nieklasyczną uzasadnia swoje dzieło krytykując jakieś konkretne wady logiki klasycznej, ale zarówno swoją krytykę, jak i konstrukcję nowej logiki przeprowadza w oparciu o logikę klasyczną.

Z problemem „nieklasyczności” naszego codziennego myślenia wiąże się fakt istnienia zdań, którym nie jesteśmy w stanie przypisać ani wartości prawdy, ani fałszu. Dwuwartościowość logiki formalizującej zmiany stanów przekonań jest więc kolejną silną idealizacją.

Ze względu na wspomniane zalety i wady logiki klasycznej, jak również wady logik dwuwartościowych, nasze rozważania będą dotyczyły dowolnej logiki, dla której istnieje adekwatna klasa matryc. Mając świadomość problemów, z jakimi wiąże się utożsamianie stanów przekonań z teoriami logik dedukcyjnych, przyjmijmy, że stan przekonań jest dedukcyjną teorią

$$X_{|=} = \{\alpha : X \,|\!= \alpha\},$$

będącą zbiorem wszystkich konsekwencji, jakie tylko można wyprowadzić ze zbioru zaakceptowanych zdań tworzących zbiór X wnioskując przy pomocy logiki $(\underline{L}, |=)$. U podstaw zasady, która każe zaakceptować wszystkie zdania zbioru $X_{|=}$ skoro wcześniej zaakceptowaliśmy zdania zbioru X, jest właśnie przyjęta przez nas logika $(\underline{L}, |=)$. Jeśli bowiem prawdziwość zdania ze zbioru X implikuje na mocy tejże logiki prawdziwość jakiegoś zdania α spoza zbioru X, czyli ze zbioru $L - X$, to nie należące do zbioru X zdanie α (które oczywiście należy do $L - X$) również powinno być przez nas uznane za prawdziwe. Zwykle problem logicznej konsekwencji zaakceptowanych przez nas zdań kończy się na tym etapie. Istnieje jednak problem dualny do tego, który właśnie został przypomniany.

Należy przecież dostrzec nie tylko istnienie zbioru $L - X$, ale również jego istotny wpływ na kształt zbioru akceptowanych zdań. $L - X$ tworzą wszystkie te zdania, które nie zostały przez nas zaakceptowane. Jeśli więc stoimy na gruncie logiki dwuwartościowej, to zdania tworzące zbiór $L - X$ są dla nas fałszywe. W poprzednim rozdziale został pokazany fakt, iż każda logika $(\underline{L}, \models)$ „kryje" w sobie $(\underline{L}, \models^d)$, która o ile pierwsza jest logiką prawdy, o tyle sama jest logiką fałszu. Mówiąc ściślej $(\underline{L}, \models^d)$ jest „fałszywościową" wersją tej samej logiki, której „prawdziwościową" wersją jest $(\underline{L}, \models)$. Obie logiki formalizują przecież tę samą strukturę logiczną, z tą różnicą, że w jednym przypadku punktem odniesienia dla tej formalizacji jest prawda, a w drugim przypadku fałsz.

Logika fałszu $(\underline{L}, \models^d)$ informuje nas, które zdania winniśmy uznać za fałszywe, skoro uznaliśmy za fałszywe określone zdania. Zatem, w przypadku zbioru $L - X$ dzięki $(\underline{L}, \models^d)$ jesteśmy w stanie dowiedzieć się, które zdania spośród tych tworzących zbiór X są fałszywościową konsekwencją zbioru $L - X$. Naturalnie, każda taka fałszywościowa konsekwencja zbioru $L - X$ powinna zostać usunięta ze zbioru X. Oznacza to, że z punktu widzenia logiczności stanów przekonań obok dedukcyjnej teorii $X_{\models}$ istotna jest również odrzuceniowa teoria

$$X_{\not=\mid} = X - \{\alpha: L - X \models^d \alpha\}.$$

Dedukcyjna logika prawdy $(\underline{L}, \models)$ informuje nas o tym, które zdania spoza naszego zbioru przekonań powinniśmy uznać za prawdziwe. Odrzuceniowa logika prawdy $(\underline{L}, =\mid)$ chroni nas przed zaakceptowaniem tych zdań, które winniśmy uznać za fałszywe.

Dla dowolnego zbioru zdań $X \subseteq L$, wprost z pierwszych warunków na relacje konsekwencji i odrzucania wynika, że:

$$X_{\not=\mid} \subseteq X \subseteq X_{\models}.$$

Naturalnym pytaniem jest to, czy istnieją takie zbiory zdań, dla których zachodzą równości:

$$X_{\not=\mid} = X = X_{\models}.$$

Odpowiedź na to pytanie będzie twierdząca, jeśli pokażemy istnienie takiego zbioru $X \subseteq L$, dla którego jednocześnie zachodzą dwa następujące warunki:

$$\forall\alpha \in X\ \forall\underline{M} \in \boldsymbol{M}\ \forall h \in \boldsymbol{H}\ (h(X) \subseteq D \text{ implikuje } h(\alpha) \in D),$$
$$\forall\alpha \in X\ \exists\underline{M} \in \boldsymbol{M}\ \exists h \in \boldsymbol{H}\ (h(L - X) \subseteq A - D \text{ i } h(\alpha) \in D).$$

Zastępując drugi warunek jego równoważnikiem otrzymujemy:

$$\forall\alpha \in X\ \forall\underline{M} \in \boldsymbol{M}\ \forall h \in \boldsymbol{H}\ (h(X) \subseteq D \text{ implikuje } h(\alpha) \in D),$$
$$\forall\alpha \notin X\ \forall\underline{M} \in \boldsymbol{M}\ \forall h \in \boldsymbol{H}\ (h(L - X) \subseteq A - D \text{ implikuje } h(\alpha) \in A - D).$$

Oznacza to, że zbiór X jest jednocześnie teorią dedukcyjnej logiki prawdy i teorią odrzuceniowej logiki prawdy wtedy i tylko wtedy, gdy X jest teorią dedukcyjnej logiki prawdy, a $L - X$ teorią dedukcyjnej logiki fałszu.

Okazuje się, że na gruncie logiki klasycznej teorie pierwsze dedukcyjnej logiki prawdy są tymi, których dopełnienia są teoriami dedukcyjnej logiki fałszu. Przypomnijmy teraz kilka podstawowych faktów.

Zbiór zdań $X \subseteq L$ jest teorią dedukcyjnej klasycznej logiki prawdy, gdy dla dowolnych $\alpha, \beta \in L$:

(1) *jeśli* $\alpha \to \beta \in X$ *i* $\alpha \in X$, *to* $\beta \in X$.

Teoria dedukcyjnej klasycznej logiki prawdy X jest pierwsza, gdy dla dowolnych $\alpha, \beta \in L$:

(2) $\alpha \vee \beta \in X$ *wtw* $\alpha \in X$ *lub* $\beta \in X$.

Zbiór zdań X jest teorią dedukcyjnej klasycznej logiki fałszu,[7] gdy dla dowolnych $\alpha, \beta \in L$:

(3) *jeśli* $\neg(\alpha \to \beta) \in X$ *i* $\beta \in X$, *to* $\alpha \in X$.

Teoria dedukcyjnej klasycznej logiki fałszu X jest pierwsza, gdy dla dowolnych $\alpha, \beta \in L$:

(4) $\alpha \wedge \beta \in X$ *wtw* $\alpha \in X$ *lub* $\beta \in X$.

Ponadto, jeśli X jest niesprzeczną, czyli nietrywialną dedukcyjną teorią klasycznej logiki prawdy (fałszu), to dla dowolnej $\alpha \in L$:

(5) $\alpha \notin X$ *lub* $\neg\alpha \notin X$.

Załóżmy, że zbiór zdań $X \subseteq L$ jest teorią dedukcyjnej klasycznej logiki prawdy, $L - X$ zaś jest teorią dedukcyjnej klasycznej logiki fałszu. Załóżmy ponadto, że X nie jest teorią pierwszą, czyli że $\alpha \vee \beta \in X$ oraz $\alpha \notin X$ i $\beta \notin X$. Oznacza to, że zarówno X, jak i $L - X$ są nietrywialnymi teoriami, czyli zbiorami różnymi od zbioru L. Ponieważ $\alpha \vee \beta \in X$, zatem $\neg\alpha \to \beta \in X$. Na mocy warunku (1) mamy więc, że $\neg\alpha \notin X$. Oznacza to, że $\alpha, \neg\alpha \in L - X$. Jest to sprzeczne z założeniem, że zbiór $L - X$ jest niesprzeczną teorią dedukcyjnej klasycznej logiki fałszu.

Załóżmy teraz, że zbiór zdań $X \subseteq L$ jest teorią dedukcyjnej klasycznej logiki fałszu, $L - X$ zaś jest teorią dedukcyjnej klasycznej logiki prawdy. Załóżmy ponadto, że X nie jest teorią pierwszą, czyli że $\alpha \wedge \beta \in X$ oraz $\alpha \notin X$ i $\beta \notin X$. Tak jak w poprzednim przypadku zarówno X, jak i $L - X$ są nietrywialnymi teoriami. Ponieważ $\alpha \wedge \beta \in X$, zatem $\neg(\alpha \to \neg\beta) \in X$. Na mocy warunku (3) mamy więc, że $\neg\beta \notin X$. Oznacza to, że $\beta, \neg\beta \in L - X$. Jest to sprzeczne z założeniem, że zbiór $L - X$ jest niesprzeczną teorią dedukcyjnej klasycznej logiki prawdy.

---

[7] P. Łukowski, *A formalization of the „step foreward — step backward" reasoning*, Anales del Seminario de Historia de la Filosofia. Servicio de Publicationes Universidad Complutense, 18, 2001, s. 109-124.

Powyższe rozważania dowodzą, że jeśli X jest dedukcyjną teorią klasycznej logiki prawdy i $L - X$ jest dedukcyjną teorią klasycznej logiki fałszu, to zarówno X, jak i $L - X$ są pierwszymi teoriami, oczywiście każda w odpowiedniej logice: albo prawdy albo fałszu. Niech X będzie pierwszą dedukcyjną teorią klasycznej logiki prawdy. Ponieważ prawo wyłączonego środka jest klasyczną tautologią, więc dla dowolnej $\delta \in L$:

$$\delta \vee \neg\delta \in X.$$

Wówczas, wobec warunku (2) mamy, że dla dowolnej $\delta \in L$:

(5) $\delta \in X$ *lub* $\neg\delta \in X$.

Oznacza to, że teoria X jest maksymalna. Zbiór przekonań będący teorią pierwszą dedukcyjnej klasycznej logiki prawdy byłby więc wyjątkowo niezwykły. W zbiorze tym znaleźlibyśmy odpowiedź na każde pytanie. Z dowolnych dwóch zdań α i $\neg\alpha$ dokładnie jedno należałoby do tego zbioru. Nic więc dziwnego, że teoriom maksymalnym logiki klasycznej przypisuje się nie epistemiczny, lecz ontologiczny charakter.

Każdy zbiór przekonań, który byłby domknięty na dedukcyjną relację klasycznej logiki prawdy i którego dopełnienie byłoby domknięte na dedukcyjną relację klasycznej logiki fałszu, musiałby być zbiorem maksymalnym. Widać więc, że cena, jaką należy zapłacić za spełnienie równości $X_{\not\dashv} = X = X_{\models}$, jest bardzo wysoka. Naturalnie, spełnienie tej podwójnej równości stoi w sprzeczności z epistemicznym charakterem każdego zbioru przekonań.

Ponadto, pierwszość teorii będącej stanem przekonań oznacza, że nie możemy zaakceptować alternatywy dwóch niezaakceptowanych zdań. Fakt ten jest wyraźnie sprzeczny z intuicjami. Przecież nieustannie znajdujemy się w sytuacji, w której wiemy, że alternatywa $\alpha \vee \beta$ jest prawdziwa, mimo że nie wiemy, czy prawdą jest zdanie α, czy może β. Szczególnie jaskrawym tego przykładem jest alternatywa będąca podstawieniem prawa wyłączonego środka $\alpha \vee \neg\alpha$: wiem, że w oczywisty sposób prawdziwe jest zdanie *„Za następnym skrzyżowaniem ulic stoi dziewczyna ze skórzaną torbą na ramieniu lub nie stoi”* chociaż nie mam pojęcia, który człon tej alternatywy jest prawdziwy.

Powyższa analiza może wskazywać na to, iż relacja odrzucania nie odgrywa żadnej epistemicznej roli w kształtowaniu zbioru przekonań. Okazuje się jednak, że rola ta jest znacząca i niemożliwa do odegrania przez jakąkolwiek inną relację. O ile bowiem założenie, że zbiór przekonań powinien być zamknięty (być może słowo „otwarty” — w potocznym sensie — byłoby w tym wypadku bardziej na miejscu) na relację odrzucania, jest co najmniej kłopotliwe, o tyle relacja odrzucania wydaje się trudna do przecenienia, jeśli idzie właśnie o… odrzucanie uprzednio zaakceptowanych zdań.

Ponieważ problem odrzucania przekonań wiąże się w dość istotny sposób z własnościami logiki, będącej podstawą formalizacji procedur odrzuceniowych, procedury te zostaną w następnym paragrafie określone dla logiki klasycznej.

4. ODRZUCANIE PRZEKONAŃ

Rozszerzanie zbioru przekonań jest formalizowane w prosty i raczej narzucający się sposób za pomocą relacji konsekwencji. Jeśli więc nasz zbiór przekonań X[8] chcemy poszerzyć o nowe przekonania $\varphi_1, \ldots, \varphi_k$, to wystarczy przyjąć, że nowy zbiór przekonań ma postać:

$$(X \cup \{\varphi_1, \ldots, \varphi_k\})_{|=CL}.$$

Najcenniejszą bodaj własnością takiego podejścia jest to, iż tak zdefiniowane rozszerzenie jest jednoznaczne, czyli istnieje dokładnie jeden zbiór przekonań zawierający w sobie X oraz zdania $\varphi_1, \ldots, \varphi_k$. Istotnie, relacja konsekwencji zawsze daje jednoznaczną odpowiedź na pytanie o wnioski wynikające na jej podstawie z danego zbioru przesłanek.

Rozpoczynając analizę możliwych formalizacji procedur odrzucania zdań musimy uświadomić sobie niejednoznaczność tych procedur. Naturalnie, relacja odrzucania określona w drugim paragrafie jest w oczywisty sposób relacją jednoznaczną, co oznacza, że dla dowolnego zbioru X mamy jeden i tylko jeden zbiór

$$X_{\neq|CL} = \{\alpha: X \neq|_{CL} \alpha\} = X - \{\alpha: L - X \,|=^{d}_{CL} \alpha\}.$$

Ta jednoznaczność jest skutkiem jednoznaczności relacji konsekwencji $|=^{d}_{CL}$. Oznacza to, że jeśli X jest zbiorem przekonań, z którego chcemy z jakichś pozalogicznych powodów usunąć zdania $\varphi_1, \ldots, \varphi_k$, to zbiór

$$(X - \{\varphi_1, \ldots, \varphi_k\})_{\neq|CL}$$

jest określony jednoznacznie. Niestety, zbiór ten nie jest dedukcyjną teorią, czyli nie jest zamknięty na wszystkie swoje logiczne konsekwencje. Zbiór $(X - \{\varphi_1, \ldots, \varphi_k\})_{\neq|CL}$ jest przecież teorią relacji odrzuceniowej. Nie może więc być uznany za stan przekonań. Co więcej, jak to zostało wcześniej pokazane, tylko niektóre teorie odrzuceniowe są teoriami dedukcyjnymi. Mogłoby się więc wydawać, że najprostszym rozwiązaniem jest przyjąć, iż właściwym stanem przekonań po odrzuceniu zdań $\varphi_1, \ldots, \varphi_k$ jest zbiór:

$$((X - \{\varphi_1, \ldots, \varphi_k\})_{\neq|CL})_{|=CL}.$$

Niestety, zbiór taki najprawdopodobniej jest zbiorem trywialnym. Załóżmy bowiem, że zbiór $(X - \{\varphi_1, \ldots, \varphi_k\})_{\neq|CL}$ będąc rzecz jasna $\neq|_{CL}$-teorią, nie jest $|=_{CL}$-teorią. Zatem, ani $(X - \{\varphi_1, \ldots, \varphi_k\})_{\neq|CL}$, ani jego dopełnienie nie jest maksymalną teorią kla-

[8] X jest zbiorem przekonań jeśli $X = X_{|=CL}$.

sycznej logiki tak prawdy, jak i fałszu. Istnieje więc w $(X - \{\varphi_1, ..., \varphi_k\})_{\neq|CL}$ takie zdanie α, że $\neg\alpha$ również należy do zbioru $(X - \{\varphi_1, ..., \varphi_k\})_{\neq|CL}$. Oznacza to, że $(X - \{\varphi_1, ..., \varphi_k\})_{\neq|CL}$ jest zbiorem sprzecznym, a więc $((X - \{\varphi_1, ..., \varphi_k\})_{\neq|CL})_{|=CL} = L$.

Trudno jest więc uznać $((X - \{\varphi_1, ..., \varphi_k\})_{\neq|CL})_{|=CL}$ za stan przekonań, jaki powstaje z X po odrzuceniu zdań $\varphi_1, ..., \varphi_k$.

Z analogicznego powodu, najczęściej $(X_{|=CL} - \{\varphi_1, ..., \varphi_k\})_{\neq|CL}$ jest zbiorem pustym. Przyjmijmy bowiem, że $X_{|=CL}$ nie jest pierwszą dedukcyjną teorią klasycznej logiki prawdy. Oznacza to, że istnieje takie zdanie α, że ani α, ani $\neg\alpha$ nie należy do $X_{|=CL}$. Wówczas, $X_{|=CL}$ jest tak zwanym zbiorem niewystarczającym[9], co oznacza, że $(X_{|=CL})_{\neq|CL}$ jest zbiorem pustym. Tym bardziej pusty jest zbiór $(X_{|=CL} - \{\varphi_1, ..., \varphi_k\})_{\neq|CL}$. Jeśli bowiem relacja $\neq|_{CL}$ jest odrzuceniową relacją klasycznej logiki prawdy, to każda teoria tej relacji będzie trywialna, czyli równa zbiorowi pustemu, gdy z dowolnych dwóch zdań α i $\neg\alpha$ przynajmniej jedno nie będzie do tej teorii należało[10]. Oczywiście, do odrzuceniowej teorii logiki klasycznej mogą należeć oba zdania α i $\neg\alpha$, jednak do nietrywialnej teorii odrzuceniowej logiki klasycznej tak prawdy, jak i fałszu nie mogą jednocześnie nie należeć oba te zdania. Wśród teorii relacji konsekwencji klasycznej logiki prawdy jedynie teorie maksymalne mają tę własność, że z dowolnych dwóch zdań α i $\neg\alpha$ dokładnie jedno należy to danej teorii. Jasno więc widać, że jeśli zbiór X nie zawiera maksymalnej teorii konsekwencji logiki klasycznej, to $X_{\neq|CL}$ jest zbiorem pustym.

Znanym faktem jest to, iż względnie maksymalna dedukcyjna teoria logiki klasycznej jest pierwsza, a zatem jest maksymalna. W przypadku procedur odrzuceniowych szczególnie pożyteczne jest pojęcie względnie minimalnej odrzuceniowej teorii:

DEFINICJA.
$\neq|$-teoria F jest minimalna względem formuły α, gdy
1. *$\alpha \in F$; oraz*
2. *$\alpha \notin (F - \beta)_{\neq|}$, dla dowolnej formuły $\beta \in F$.*

$\neq|$-teoria F minimalna względem jakiejś formuły α, jest względnie minimalna.
$\neq|$-teoria F jest minimalna względem formuł $\alpha_1, ..., \alpha_k$, gdy jest minimalna względem koniunkcji tych formuł $\alpha_1 \wedge ... \wedge \alpha_k$.[11]

[9] Zbiór niewystarczający ze względu na relację odrzuceniową jest odpowiednikiem zbioru sprzecznego ze względu na relację konsekwencji. Zbiór sprzeczny generuje trywialną teorię dedukcyjną, podczas gdy zbiór niewystarczający trywialną teorię odrzuceniową. Zatem, gdy X jest sprzeczny, to $X_{|=} = L$, gdy zaś X jest niewystarczający, to $X_{\neq|} = \varnothing$., patrz P. Łukowski, *A deductive-redukctive form of logic: general theory and intuitionistic case*, Logic and Logical Philosophy, 10, 2002, s. 59-78.

[10] Powodem tego faktu jest to, że $\{\alpha, \neg\alpha\} \mid=^d L$.

[11] Patrz P. Łukowski, *A deductive-redukctive form of logic: general theory and intuitionistic case*, Logic and Logical Philosophy, 10, 2002, s. 59-78.

DEFINICJA.
Relacja odrzuceniowa $\neq\!|$ *jest ko-finitarna, gdy dla dowolnego* $X \subseteq L$,

$X_{\neq|} = \bigcap\{Y_{\neq|}: Y \subseteq X$ *oraz* $L - Y$ *jest zbiorem skończonym*$\}$.

Dla każdej ko-finitarnej logiki odrzuceniowej prawdziwy jest lemat dualny do dobrze znanego lematu Lindenbauma:

LEMAT.
Niech $\neq\!|$ *będzie dowolną ko-finitarną relacją odrzuceniową. Dla dowolnej wystarczającej* $\neq\!|$*-teorii* F *oraz dla dowolnej formuły* $\alpha \in F$ *istnieje* $\neq\!|$*-teoria* F_0 *minimalna względem* α, *zawarta w* F.[12]

Ponadto, względnie minimalna odrzuceniowa teoria klasycznej logiki prawdy jest pierwszą odrzuceniową teorią tej logiki. Zatem, względnie minimalna odrzuceniowa teoria klasycznej logiki prawdy jest maksymalną dedukcyjną teorią tej logiki. Fakt ten zostanie wykorzystany w konstrukcji odpowiedniej, pierwszej teorii odrzuceniowej. Ze względu na prostotę zapisu, zamiast usuwania ze zbioru przekonań X zdań $\varphi_1, \ldots, \varphi_k$ w dalszym ciągu rozważać będziemy przypadek usunięcia z X jednego zdania φ.

Przyjmijmy, że zdanie φ wynika na mocy klasycznej logiki prawdy ze zbioru $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$. Zatem, $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\} \models_{CL} \varphi$, czyli $\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \alpha_3 \models_{CL} \varphi$. Naturalnie, ani φ, ani $\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \alpha_3$ nie należą do odrzuceniowej teorii klasycznej logiki prawdy $(L - \varphi)_{\neq|CL}$. Ponieważ jednak teoria ta nie jest pierwsza, może zawierać wszystkie trzy zdania α_1, α_2, α_3, mimo iż nie zawiera ich koniunkcji. Dlatego też, może się zdarzyć, że odrzucone zdanie φ będzie z powrotem należeć do $((L - \varphi)_{\neq|CL})_{|=CL}$. Skądinąd wiadomo, że jeśli zbiór byłby zastąpiony odpowiednią teorią maksymalną F, to zdanie φ nie mogłoby należeć do $F_{|=CL}$, gdyż wówczas $F_{|=CL}$ byłby równy zbiorowi F. Jeśli φ nie jest klasyczną tautologią, to zbiór $(L - \varphi)_{\neq|CL}$ jest wystarczającą $\neq\!|_{CL}$-teorią. Na mocy lematu dualnego do lematu Lindenbauma, istnieje odrzuceniowa teoria klasycznej logiki prawdy zawarta w $(L - \varphi)_{\neq|CL}$ i minimalna względem $\alpha_1 \in (L - \varphi)_{\neq|CL}$. Teorię tę oznaczmy $(L - \varphi)^{\alpha 1}{}_{\neq|CL}$. Naturalnie, $\alpha_1 \in (L - \varphi)^{\alpha 1}{}_{\neq|CL}$ oraz $\varphi \notin (L - \varphi)^{\alpha 1}{}_{\neq|CL}$. Ponadto, $(L - \varphi)^{\alpha 1}{}_{\neq|CL}$ jest pierwszą $\neq\!|_{CL}$-teorią, a zatem jest $|=_{CL}$-teorią.

Tak więc, jednym z możliwych stanów przekonań powstającym z X przez odrzucenie $\varphi \in X$ jest:

$$X \cap (L - \varphi)^{\alpha 1}{}_{\neq|CL}$$

dedukcyjna teoria klasycznej logiki zdaniowej, czyli $|=_{CL}$-teoria taka, że $\varphi \notin X \cap (L - \varphi)^{\alpha 1}{}_{\neq|CL}$, $X \supseteq X \cap (L - \varphi)^{\alpha 1}{}_{\neq|CL}$, a ponadto $\alpha_1 \in X \cap (L - \varphi)^{\alpha 1}{}_{\neq|CL}$. Usunięcie ze zbioru X zdania wiąże się tutaj z zachowaniem w zbiorze przekonań jednego z tych zdań, z których usuwane zdanie wynika na mocy logiki klasycznej. W podobny spo-

[12] Tamże.

sób można zagwarantować pozostanie w zbiorze przekonań zdania α_2 czy też α_3. Nie jest również żadnym problemem jednoczesne zachowanie dwóch spośród trzech zdań α_1, α_2, α_3. Tak więc, finalnymi stanami przekonań mogłyby być $X \cap (L - \varphi)^{\alpha 1, \alpha 2}{}_{\not\dashv CL}$, $X \cap (L - \varphi)^{\alpha 1, \alpha 3}{}_{\not\dashv CL}$ oraz $X \cap (L - \varphi)^{\alpha 2, \alpha 3}{}_{\not\dashv CL}$. Naturalnie, nie można zachować wszystkich trzech. W przeciwnym razie, odrzucane zdanie φ z powrotem znalazłoby się w zbiorze przekonań.

Ta dowolność w zachowywaniu tego, a nie innego zdania ma swoje głębokie uzasadnienie, a decyzja, które zdanie winno zostać zachowane, najczęściej ma charakter pozalogiczny. Rozważmy dwa przykłady.

PRZYKŁAD 1. Załóżmy, że od pewnego dłuższego czasu zaobserwowaliśmy, że we wtorki rano pada deszcz. Zatem, do naszego zbioru przekonań należy zdanie: *jeśli jest wtorek rano, to pada deszcz*. Budząc się w pewien wtorek rano mamy przekonanie, że *jest wtorek rano*. Mimo to stwierdzamy, że deszcz nie pada, a przecież do naszego zbioru przekonań powinno należeć zdanie: *teraz pada deszcz*. Jednak to ostatnie zdanie stoi w sprzeczności z faktami. Musimy je więc z naszego zbioru przekonań usunąć. Jeśli jednak nie usuniemy przynajmniej jednego ze zdań *jeśli jest wtorek rano, to pada deszcz* oraz *jest wtorek rano*, to odrzucone zdanie powinno pozostać naszym przekonaniem. Porównując obie przesłanki niefortunnego wniosku łatwo dojść do przekonania, że usunięte powinno być zdanie głoszące, że jeśli jest wtorek rano, to pada deszcz. Tym samym, usunięcie zdania φ musi pociągnąć za sobą usunięcie zdania $\alpha \to \varphi$ przy jednoczesnym zachowaniu zdania α.

PRZYKŁAD 2. Załóżmy, że ze względu na niezadaszenie ulicy, przy której mieszkamy, do zbioru naszych przekonań należy zdanie: *jeśli deszcz pada, to nasza ulica jest mokra*. Pewnego ranka, tuż po obudzeniu słysząc delikatny monotonny szum, dochodzimy do wniosku, że deszcz pada. Zatem do zbioru naszych przekonań należy zdanie: *deszcz pada*. Wnioskujemy więc, że: *nasza ulica jest mokra*. Po pewnym czasie, gdy wstajemy i podchodzimy do okna stwierdzamy ze zdumieniem, że nasza ulica jest sucha. Musimy więc ze zbioru naszych przekonań usunąć zdanie *nasza ulica jest mokra* wraz z jednym z dwóch pozostałych zdań będących przesłankami naszego błędnego rozumowania. Tym razem, usuwamy jednak zdanie atomowe *deszcz pada*, pozostawiając *jeśli deszcz pada, to nasza ulica jest mokra*. Tak więc, usunięcie zdania φ musi tym razem pociągnąć za sobą usunięcie zdania α przy jednoczesnym zachowaniu zdania $\alpha \to \varphi$.

Powyższe przykłady pokazują, że procedury odrzuceniowe powinny umożliwiać realizację wszystkich sposobów usunięcia niechcianego przekonania. Czy jednak zaproponowana procedura faktycznie jest wystarczająca? Niestety, okazuje się, że tak nie jest. Przedstawiona we wcześniejszej pracy[13] metoda konstrukcji względnie minimalnej odrzuceniowej teorii klasycznej logiki prawdy pokazuje, że nie istnieje jed-

[13] Tamże.

na teoria, która może być reprezentowana przez nazwę „$X \cap (L - \varphi)^{\alpha 1}{}_{\neq|CL}$". Różnych teorii, które mogłyby być uznane za $X \cap (L - \varphi)^{\alpha 1}{}_{\neq|CL}$ jest nieskończenie wiele. Oznacza to, że zbiór $X \cap (L - \varphi)^{\alpha 1}{}_{\neq|CL}$ może zarówno zawierać zdanie α_2, jak i nie zawierać tego zdania. Podobnie z α_3. Co więcej, jeśli usuwane zdanie φ wynika dodatkowo z koniunkcji dwóch, nierozważanych dotychczas zdań ϕ_1, $\phi_2 \in X$, to zbiór $X \cap (L - \varphi)^{\alpha 1}{}_{\neq|CL}$ może zawierać także jedno z tych dwóch zdań. Nie mamy jednak metody na precyzyjne zachowanie tego a nie innego zdania przy usuwaniu innego. Mamy tu bowiem do czynienia z przypadkiem losowym. Aby tego uniknąć wydaje się, że lepszym rozwiązaniem jest zastąpić zbiór $X \cap (L - \varphi)^{\alpha 1}{}_{\neq|CL}$ następującym:

$$X \cap \bigcap (L - \varphi)^{\alpha 1}{}_{\neq|CL}$$

gdzie $\bigcap(L - \varphi)^{\alpha 1}{}_{\neq|CL}$ jest iloczynem wszystkich $\neq|_{CL}$-teorii zawartych w $(L - \varphi)_{\neq|CL}$ i minimalnych względem α_1. Oznacza to, że do zbioru $X \cap \bigcap(L - \varphi)^{\alpha 1}{}_{\neq|CL}$ nie należy żadne z następujących, rozważanych do tej pory zdań: α_2, α_3, ϕ_1, ϕ_2. Dzięki zastosowaniu iloczynu odpowiednich $\neq|_{CL}$-teorii wymuszamy to, że spośród przesłanek odrzucanego wniosku do nowego zbioru przekonań należeć będą jedynie te zdania, względem których teorie będą minimalne. Niestety, może się okazać, że usunięciu ulegnie znacznie więcej zdań zbioru X, niż to planowaliśmy. Opisana we wcześniejszej pracy[14] metoda budowy względnie minimalnej teorii odrzuceniowej dla klasycznej logiki prawdy pokazuje, że istotną rolę w tworzeniu zbioru $(L - \varphi)^{\alpha 1}{}_{\neq|CL}$ ma to, w jakiej kolejności będą usuwane zdania wstępujące w $(L - \varphi)_{\neq|CL}$. Wiadomo, że dla dowolnego zdania δ, nietrywialna $\neq|_{CL}$-teoria musi przynajmniej zawierać albo δ, albo $\neg\delta$. Względnie minimalna $\neq|_{CL}$-teoria musi natomiast zawierać dokładnie jedno ze zdań: albo δ, albo $\neg\delta$. Usunięcie jakiegokolwiek zdania wraz z jego negacją prowadzi do zapadnięcia się $\neq|_{CL}$-teorii do zbioru pustego. Jeśli więc, w trakcie budowy względnie minimalnej $\neq|_{CL}$-teorii zawartej w $(L - \varphi)_{\neq|CL}$ zostanie usunięte zdanie δ, to nie będzie mogło być usunięte zdanie $\neg\delta$. Podobnie, usunięcie zdania δ zostanie zablokowane przez usunięcie zdania $\neg\delta$. Zatem w przypadku dowolnego zdania δ, jeśli tylko nie jest ono w żaden sposób związane klasycznym wynikaniem ze zdaniami φ, α_1, α_2, α_3, ϕ_1, ϕ_2, to ze zbioru $(L - \varphi)_{\neq|CL}$ może być usunięte zarówno δ, jak i $\neg\delta$. Oznacza to, że tworząc zbiór $\bigcap(L - \varphi)^{\alpha 1}{}_{\neq|CL}$ możemy wbrew naszym intencjom usunąć z niego prawie wszystkie elementy wyjściowego zbioru przekonań X. Aby tego uniknąć, zbiór $X \cap \bigcap(L - \varphi)^{\alpha 1}{}_{\neq|CL}$ zastępujemy następującym:

$$X \cap \bigcap(L - \varphi)^{\alpha 1, X}{}_{\neq|CL},$$

gdzie $(L - \varphi)^{\alpha 1, X}{}_{\neq|CL}$ oznacza $\neq|_{CL}$-teorię zawartą w $(L - \varphi)_{\neq|CL}$ minimalną względem α_1, *dla zbioru X*. Zwrot „dla zbioru X" oznacza, że w procesie budowania względnie minimalnej $\neq|_{CL}$-teorii $(L - \varphi)^{\alpha 1, X}{}_{\neq|CL}$ w pierwszej kolejności usuwane będą wszystkie te zdania, które należą do zbioru $X^{\neg} = \{\neg\alpha\colon \alpha \in X\}$. Usunięcie każdego zdania zbioru $X^{\neg}$ zablokuje bowiem możliwość usunięcia klasycznego równoważnika jego ne-

[14] Tamże.

gacji, należącego do X. W ten sposób w zbiorze $X \cap \bigcap(L - \varphi)^{\alpha l,X}{}_{\neq|CL}$ zostanie zachowanych tyle zdań wyjściowego zbioru X, ile tylko będzie można.

Naturalnie, nawet zbiór $X \cap \bigcap(L - \varphi)^{\alpha l,X}{}_{\neq|CL}$ nie jest wyznaczony jednoznacznie. Jednak wszelkie możliwe zbiory, które reprezentuje nazwa „$X \cap \bigcap(L - \varphi)^{\alpha l,X}{}_{\neq|CL}$”, cechuje to, że

— zawierają się w wyjściowym zbiorze przekonań X;
— nie zawierają usuwanego zdania φ;
— zawierają zdanie α_l;
— zawierają możliwie najwięcej zdań zbioru X;
— są stanami przekonań, czyli $|=_{CL}$-teoriami.

Standardowe sprawdzenie pokazuje, że zbiór $X \cap \bigcap(L - \varphi)^{\alpha l,X}{}_{\neq|CL}$, czyli zbiór przekonań powstający z X dedukcyjnej teorii logiki prawdy przez usunięcie zdania φ spełnia następujące postulaty zgodne z odpowiednimi postulatami AGM dla kontrakcji:

1. $X \cap \bigcap(L - \varphi)^{\alpha l,X}{}_{\neq|CL}$ *jest dedukcyjną teorią logiki prawdy;*
2. $X \cap \bigcap(L - \varphi)^{\alpha l,X}{}_{\neq|CL} \subseteq X;$
3. *jeśli* $\varphi \notin X$, *to* $X \cap \bigcap(L - \varphi)^{\alpha l,X}{}_{\neq|CL} = X;$
4. $\varphi \notin X \cap \bigcap(L - \varphi)^{\alpha l,X}{}_{\neq|CL},$
6. *jeśli* $|= \varphi \leftrightarrow \phi$, *to* $X \cap \bigcap(L - \varphi)^{\alpha l,X}{}_{\neq|CL} = X \cap \bigcap(L - \phi)^{\alpha l,X}{}_{\neq|CL}.$

Jedynym problemem jest postulat piąty, który zgodnie z teorią AGM powinien mieć postać:

5. *jeśli* $\varphi \in X$, *to* $X \subseteq ((X \cap \bigcap(L - \varphi)^{\alpha l,X}{}_{\neq|CL}) \cup \{\varphi\})_{|=CL}.$

Zgodnie z tym postulatem, usunięcie ze zbioru przekonań jakiegoś zdania oraz powtórne jego dodanie do tak powstałego zbioru daje zbiór nie mniejszy od wyjściowego. Postulat ten jest słusznie uznawany za kontrowersyjny również przez samego jego twórcę Gärdenforsa.[15] Jeśli bowiem usuniemy ze zbioru X jakieś zdanie φ, to musimy wraz ze zdaniem tym usunąć te zdania, z których φ wynika na mocy klasycznej logiki prawdy. W przeciwnym razie zdanie φ „wróci” do zbioru przekonań wraz z domknięciem nowo powstałego zbioru na relację $|=_{CL}$. Trudno więc zakładać, aby wszystkie w ten sposób dodatkowo usunięte zdania należały do tak powstałego zbioru przekonań powiększonego z powrotem o zdanie φ. Dlatego też wydaje się, że zupełnie zrozumiały jest fakt spełnienia przez $X \cap \bigcap(L - \varphi)^{\alpha l,X}{}_{\neq|CL}$ następującego warunku odpowiadającego kontrowersyjnemu piątemu postulatowi:

5'. *jeśli* $\varphi \in X$, *to* $((X \cap \bigcap(L - \varphi)^{\alpha l,X}{}_{\neq|CL}) \cup \{\varphi\})_{|=CL} \subset X;$
jeśli $\varphi \notin X$, *to* $X \subset ((X \cap \bigcap(L - \varphi)^{\alpha l,X}{}_{\neq|CL}) \cup \{\varphi\})_{|=CL}.$

[15] P. Gärdenfors, *Rules for rational changes of belief* [w:] T. Pauli, editor, Philosophical Essays Dedicated to Lennart Aqvist on His Fiftieth Birthday, pp. 88-101, University of Uppsala Philosophical Studies 34, 1982.

5. PODSUMOWANIE

Zainteresowanie logiką dualną do danej ma w polskiej filozofii tradycję sięgającą prac Jana Łukasiewicza. Już sam ten fakt wydaje się wystarczającym uzasadnieniem badań w zakresie dualizacji logik. Jak się jednak okazuje, logika dualna do danej może stać się podstawą określenia konkretnych procedur *belief revision*, które w literaturze funkcjonują zaledwie w postaci postulatów. Procedury kontrakcji i rewizji dają się zdefiniować właśnie dzięki wykorzystaniu logiki dualnej, która powinna być rozumiana jako logika fałszu, jeśli tylko logika dana jest rozumiana jako logika prawdy. Można więc przyjąć, że zwykle pomijana milczeniem logika fałszu wydaje się niezbędnym elementem każdej formalizacji takiego rozumowania, które wyposażone jest w mechanizm redukujący zbiór przekonań.

BIBLIOGRAFIA

[1] C. Alchourrón and D. Makinson, *On the logic of theory change: contraction functions and their associated revision functions*, Theoria 48, 1982, s. 14-37.

[2] C. Alchourrón, P. Gärdenfors, and D. Makinson, *On the logic of theory change: Partial meet contraction revision functions*, Journal of Symbolic Logic 50, 1985, s. 510-530.

[3] P. Gärdenfors, *Rules for rational changes of belief* [w:] T. Pauli, editor, Philosophical Essays Dedicated to Lennart Aqvist on His Fiftieth Birthday, s. 88-101, University of Uppsala Philosophical Studies 34, 1982.

[4] P. Łukowski, *A formalization of the „step forward — step backward" reasoning*, Anales del Seminario de Historia de la Filosofia. Servicio de Publicationes Universidad Complutense, 18, 2001, s. 109-124.

[5] P. Łukowski, *A deductive-redukctive form of logic: general theory and intuitionistic case*, Logic and Logical Philosophy, 10, 2002, s. 59-78.

[6] C. Rauszer, *An algebraic and Kripke-style approach to a certain extension of ntuitionistic logic*, Dissertationes Mathematicae, CLXVII, PWN Warszawa 1980.

[7] A. Tarski, *Über einige fundamentale Begriffe der Metamathematik*, Compt. Rend. Séances Soc. Sci. Lett. Varsovie, cl.III, 23, s. 22-29.

[8] R. Wójcicki, *Dual counterparts of consequence operation*, Bulletin of the Section of Logic 2/1, 1973, s. 54-57.