Krzysztof Wójtowicz

O nadużywaniu pojęcia możliwości w filozofii matematyki

Filozofia Nauki 14/4, 85-95

2006

Filozofia Nauki
Rok XIV, 2006, Nr 4(56)

Krzysztof Wójtowicz

O nadużywaniu pojęcia możliwości w filozofii matematyki

W niniejszej pracy podejmuję problem używania pojęć modalnych w filozoficznych dyskusjach dotyczących matematyki. Chcę wskazać niekonsekwencje pewnego poglądu dotyczącego statusu wiedzy matematycznej, który funkcjonuje jako — mówiąc żargonowo — „pogląd zastany" (*received view*). W pracy chcę wskazać przykłady trudności, jakie pojawiają się w związku z niefrasobliwym wygłaszaniem pewnych tez angażujących pojęcia modalne, które — pozornie — brzmią jasno, a faktycznie jasne nie są. W artykule skupiam się wyłącznie na problemie użycia pojęć modalnych w kontekście matematycznego realizmu i zwracam uwagę na to, że wbrew pozorom teza głosząca istnienie wszelkich możliwych bytów matematycznych nie jest wcale łatwa do pogodzenia z tezą matematycznego realizmu. Oto dwa podstawowe problemy:

(1) Akceptacja tez modalnych a problem redukcji matematyki do teorii mngości.

(2) Akceptacja tez modalnych a problem obiektywności wiedzy matematycznej.

W trakcie analizy tych problemów pokażę swoiste napięcie pomiędzy filozoficznymi intuicjami i tezami, a ich formalnymi parafrazami.[1] Choć jestem gorącym zwolennikiem poszukiwania takich parafraz, i metodę tę uważam za ważną i po-

[1] Z powodu tego napięcia zmuszony jestem w niektórych miejscach artykułu posługiwać się językiem nie do końca precyzyjnym — chodzi mi bowiem o zrozumienie pewnych intuicji związanych z analizowanym stanowiskiem, a nie o narzucenie określonej interpretacji (a wybór określonej parafrazy formalnej tych intuicji taką interpretację narzuca).

znawczo płodną, to za ważne uważam także wskazanie pewnych ograniczeń tej metody. Niniejsze studium służy również temu celowi.

1. TEZY MODALNE DOTYCZĄCE MATEMATYKI W DEBACIE FILOZOFICZNEJ

W dyskusjach filozoficznych dotyczących matematyki często pojawiają się tezy o charakterze ontologicznym, semantycznym czy epistemologicznym angażujące pojęcia modalne. Oto kilka przykładów:

(a) Prawdy matematyczne to prawdy konieczne.
(b) Istnieją wszystkie możliwe obiekty matematyczne.
(c) Obiekty matematyczne istnieją w sposób konieczny.
(d) Świat matematyczny jest tak bogaty, że zawiera wszystkie możliwe byty.
(e) Poznanie prawd matematycznych jest poznaniem prawd koniecznych.
(f) Możliwość istnienia obiektu matematycznego jest warunkiem wystarczającym istnienia tego obiektu.
(g) Wszelkie możliwe teorie matematyczne mają swoje realizacje.
(h) Wszelkie pojęcia matematyczne mają swoje ontyczne korelaty.
(i) Istnieją wszelkie możliwe modele teorii matematycznych.
(j) Wszystkie (możliwe) prawdy matematyczne mają swoje realizacje.
(k) W świecie bytów matematycznych realizują się wszelkie możliwe koncepcje.
(l) Istnieją wszystkie możliwe struktury matematyczne.
(m) Świat matematyczny jest nieograniczony w swoim bogactwie.
…

Powyższe tezy wyrastają z podstawowych intuicji dotyczących natury matematyki — intuicji dotyczących problemu prawdy matematycznej, problemu poznania prawd matematycznych, problemu natury obiektów matematycznych i uniwersum matematycznego. Te podstawowe intuicje można krótko opisać w następujący sposób:

1. Istnienie obiektu matematycznego nie zależy od przygodnego układu faktów, który określa kształt aktualnego świata. Innymi słowy: to, że aktualny świat jest akurat taki a nie inny, nie ma wpływu na to, jakie obiekty matematyczne istnieją i jakie prawdy matematyczne obowiązują.

Takie przeświadczenie prowadzi do tez dotyczących koniecznej prawdziwości twierdzeń matematycznych czy konieczności istnienia obiektów matematycznych.

2. Uniwersum matematyczne nie podlega ograniczeniom — jeśli więc tylko istnienie jakiegoś obiektu matematycznego jest możliwe, to taki obiekt faktycznie istnieje. Nie ma powodu sądzić, że jakaś możliwość matematyczna pozostała niezrealizowana. Każde (dobre) pojęcie matematyczne posiada więc pewien ontyczny korelat, czyli odnosi się do pewnego składnika (czy fragmentu) świata matematycznego.

To przekonanie leży u podłoża tez dotyczących istnienia wszelkich możliwych obiektów matematycznych — co można też wyrazić jako tezę o istnieniu realizacji wszelkich koncepcji matematycznych, istnienia korelatów wszelkich możliwych teorii matematycznych *etc*.

W sposób skrótowy, powyższe przekonania można ująć w formie następujących tez:

(1) Prawdy matematyczne są konieczne.

(2) Istnieją wszystkie możliwe obiekty matematyczne.

W tym artykule zajmuję się jedynie tezą (2) — dalej będę ją oznaczał skrótowo MBI (od Możliwe Byty Istnieją).

2. OBIEKTY CZY STRUKTURY? SENS TERMINÓW MATEMATYCZNYCH

Teza MBI głosi, że istnieją wszystkie możliwe obiekty matematyczne. Co jednak mamy na myśli, kiedy mówimy o istnieniu obiektów **matematycznych**? Czym są obiekty matematyczne? Łatwo możemy podać szereg przykładów obiektu matematycznego: liczba naturalna, wymierna, zespolona, ciąg liczbowy, zbiór liczb parzystych, funkcja ciągła, szereg funkcyjny, przestrzeń C[0,1], torus, przestrzeń R^n, klasa operatorów liniowych na przestrzeni Hilberta $L^2([0,1])$, zbiór automorfizmów grupy permutacji S_n, klasa funkcji rekurencyjnych, maszyna Turinga *etc*. Mówiąc swobodnie, widzimy, że te obiekty mają różny stopień komplikacji — tworzą złożone struktury algebraiczne, przestrzenie, zbiory przekształceń *etc*. Czy wygłaszając tezę MBI mamy na myśli „proste byty matematyczne”? Rozważmy parę przykładów, które zwracają uwagę na ważne aspekty tego zagadnienia.

2.1. Przykład: liczby naturalne

Czy teza MBI w odniesieniu do liczb naturalnych winna być rozumiana jako teza, że istnieją wszystkie możliwe liczby naturalne? Takie sformułowanie brzmi dziwnie, zaś nasz sprzeciw wobec takiego sformułowania bierze się stąd, że o liczbach naturalnych myślimy w sposób — swobodnie mówiąc — całościowy, „widząc w tle” inne liczby. Musi być bowiem dany pewien szerszy kontekst pojęciowy, **dopiero** w ramach którego mają sens wypowiedzi o liczbach. Liczba 2006 — mówiąc metaforycznie — zawdzięcza swoją tożsamość temu, że istnieją liczby 1,2,3…. 2005, 2007… *etc*. W pojęciu liczby naturalnej tkwi np. to, że liczby można dodawać, podnosić do dowolnej potęgi *etc*., więc gdy myślimy o liczbie 2006, to „w tle” mamy wyobrażenie pewnej (potencjalnie) nieskończonej klasy liczb. Nasze przekonania dotyczące liczb naturalnych można więc określić mianem „holistycznych” w tym sensie, że o własnościach liczb naturalnych mówimy **tylko** w obrębie pewnego systemu pojęć, w którym mowa jest o **wszystkich** liczbach naturalnych. Nie ma więc sensu myśleć o jakiejkolwiek liczbie naturalnej *per se* — w izolacji od innych.[2] Tym samym tezy „istnieją wszystkie możliwe liczby naturalne” nie można interpretować jako tezy dotyczącej istnienia poszczególnych obiektów (liczb — desygnatów terminów arytmetycznych), ale jako tezę odnoszącą się do **całej** koncepcji, jako stwierdzenie o istnieniu ontologicznych korelatów dla naszej koncepcji liczb naturalnych (a nie dla poszczególnych terminów występujących w tej koncepcji).

2.2. Przykład: sprzeczność zdań egzystencjalnych

Zauważmy, że dwa zdania egzystencjalne, z których każde jest niesprzeczne z interesującą nas teorią matematyczną (np. PA albo ZFC, albo niesformalizowaną analizą zespoloną *etc.*), mogą być wzajemnie sprzeczne. Prostą ilustracją jest para zdań:

(a) Istnieje zbiór liczb rzeczywistych mocy pomiędzy mocą $\aleph_0$ i mocą kontinuum.

(b) Istnieje bijekcja pomiędzy $P(\omega)$ i $\aleph_1$.

Pierwsze ze zdań jest równoważne negacji hipotezy kontinuum, drugie zaś hipotezie kontinuum, więc są one wzajemnie sprzeczne. Każde z nich z osobna jest jednak niesprzeczne z ZFC. Można więc uznać, że **możliwe** jest istnienie zarówno zbioru, o którym mowa w (a), jak i funkcji, o której mowa w (b). Zgodnie z tezą MBI należałoby więc uznać zarówno istnienie jednego, jak i drugiego obiektu. Jednak zdanie wyrażające istnienie jednego z nich jest równoważne wyrażającemu nieistnieniu drugiego z nich, nie może więc chodzić o „jednoczesne” istnienie obu obiektów. Sens ma jedynie interpretacja, że istnieje taka dziedzina (składająca się ze zbiorów), w której istnieje obiekt postulowany w zdaniu (a), oraz taka dziedzina, w której istnieje obiekt postulowany w zdaniu (b).

Ten prosty przykład stanowi ilustrację faktu, że przy analizie problemu możliwości istnienia obiektów matematycznych konieczne jest ustalenie właściwej perspektywy, czyli — swobodnie mówiąc — poziomu, na którym stawiany i analizowany jest problem istnienia możliwych obiektów matematycznych.[3]

---

[2] Rozważmy — w charakterze ilustracji — przykład dwóch zdań: (a) Istnieją wszystkie możliwe grupy. (b) W **danej** grupie istnieją wszystkie możliwe jej elementy.

Stwierdzenie (a) jest stwierdzeniem na temat matematycznego uniwersum, natomiast stwierdzenie (b) jest tautologią, w której termin „możliwe” pełni rolę zbędnego stylistycznego ozdobnika. Kiedy bowiem mówimy o **danej** grupie, to — *ex definitione* — myślimy również o jej elementach. Absurdalnie brzmiałoby stwierdzenie: „W n-elementowej grupie istnieje — spośród wszystkich n możliwych — tylko połowa elementów”.

[3] Rozważmy jako dodatkowy przykład tezę, że istnieją wszystkie możliwe podzbiory zbioru liczb rzeczywistych **R** mocy pośredniej między mocą $\aleph_0$ a mocą kontinuum. Istnieje wiele różnych (wzajemnie niesprzecznych) rozszerzeń teorii mnogości, w których możemy przypisać kontinuum określoną wartość. Jeśli więc przyjmiemy np. dodatkowe założenie, że $c=\aleph_{2006}$, to twierdzeniem tak powstałej teorii będzie to, że istnieją podzbiory **R** mocy pośrednich $\aleph_1$, $\aleph_2 \ldots \aleph_{2005}$. Jeśli przyjmie-

2.3. Sytuacja ogólna: znaczenie terminów matematycznych

Powyższe przykłady ilustrują pewien ogólny fakt, który ma istotne znaczenie dla rozważań dotyczących tezy MBI: sens pojęć matematycznych nie jest zadany w sposób izolowany, ale zawsze jest zadany w pewnym systemie pojęć. Posługujemy się tymi pojęciami zawsze w kontekście pewnych teorii, w pewnym środowisku pojęciowym. Sens terminów matematycznych jest zadany poprzez postulaty znaczeniowe — bądź to sformułowane w postaci aksjomatycznej, bądź w postaci akceptowanych przez matematyków podstawowych prawd dotyczących pewnej dziedziny. Pojęcia liczby naturalnej, rzeczywistej, funkcji ciągłej, funkcji analitycznej w sensie zespolonym *etc.* są zrozumiałe jedynie w kontekście pewnej koncepcji — definicje tych pojęć nie mają uchwytnego znaczenia, dopóki nie zostanie zadany sens „okolicznych" terminów. Można więc powiedzieć, że w wypadku matematyki obowiązuje teza swoistego holizmu semantycznego. Fakt ten ma istotne znaczenie z punktu widzenia rozumienia tez ontologicznych (w szczególności tezy MBI): gdy wygłaszamy tezę dotyczącą istnienia danego obiektu (o którym mowa w danej teorii), to ma ona sens tylko wówczas, gdy akceptujemy postulaty dotyczące istnienia innych bytów, o których mówi dana teoria. Stwierdzenie, że istnieje ontyczny korelat dla terminu pewnej teorii ma sens zapośredniczony w stwierdzeniu, że teoria jako taka ma korelat ontyczny (będący — mówiąc bardzo swobodnie — obiektem wyższego rzędu niż korelat ontyczny dla terminów). Analizy dotyczące tezy MBI muszą uwzględniać ten fakt.

3. TWIERDZENIE O PEŁNOŚCI — FORMALNA PARAFRAZA TEZY MBI?

W naturalny sposób pojawia się pytanie, czy teza MBI ma formalny odpowiednik. Naturalna jest również hipoteza, że formalną parafrazą tezy MBI jest twierdzenie o pełności (które głosi, że każda niesprzeczna teoria pierwszego rzędu ma model).[4] Przyjęcie takiej interpretacji wymagałoby jednak przyjęcia szeregu założeń:

(1) Teorie matematyczne dają się sformalizować w postaci teorii pierwszego rzędu (a przynajmniej w logice mającej własność pełności).[5]

---

my, że $c=\aleph_2$, to będą istnieć tylko zbiory mocy pośredniej $\aleph_1$. Jak w tej sytuacji należy rozumieć stwierdzenie — jak się wydaje, zgodne z intuicją maksymalizmu ontologicznego MBI — że istnieją **wszystkie możliwe** podzbiory **R** mocy pośredniej? Nasuwa się interpretacja, w myśl której różne — równoprawne — koncepcje zbioru są realizowane w różnych strukturach (mają ontyczne korelaty). To również stanowi ilustrację tezy, że tezę MBI dotyczącą istnienia obiektów należy odnosić do koncepcji matematycznych, a nie poszczególnych terminów tych koncepcji.

[4] Przyjęcie takiej tezy pozwalałoby na utożsamienie tezy o istnieniu możliwych obiektów matematycznych i tezy o istnieniu modeli dla niesprzecznych teorii.

[5] Chodzi o logikę, która ma własność pełności, a zarazem jest dostatecznie silna i naturalna, aby można uznać ją za adekwatną dla dokonywania stosownych formalizacji. Z twierdzeń Lindströma wynika, że najsilniejszą logiką, dla której zachodzi twierdzenie o pełności i która jednocześnie spełnia pewne naturalne warunki, jest logika pierwszego rzędu, dlatego w rozważaniach skupiam się na niej.

(2) Odpowiednikiem pojęcia możliwości jest niesprzeczność.[6]

(3) Mówiąc o istnieniu ontycznego korelatu dla matematycznej koncepcji T mamy na myśli istnienie modelu (w sensie Tarskiego).

Taka interpretacja jest niewątpliwie kusząca, bo niezbyt jasne pojęcie korelatu ontologicznego dla koncepcji matematycznej zastępujemy dobrze określonym pojęciem modelu dla teorii. Dzięki takiemu ujęciu do dyspozycji będziemy mieć wyrafinowane narzędzia metamatematyczne, stworzone do badania formalnych własności teorii. Nie sądzę jednak, aby taka interpretacja dobrze zdawała sprawę z intuicji, jakie leżą u podłoża tezy MBI.

Uznanie twierdzenia o pełności za właściwą formalizację tezy MBI opiera się na założeniu, że interpretacje dla teorii matematycznych są zadane poprzez struktury teoriomnogościowe. Tym samym pojęcie prawdziwości zdania matematycznego i związków logicznych między zdaniami matematycznymi redukowałyby się do zdefiniowanych w teorii mnogości pojęć: prawdziwości zdania w modelu i konsekwencji logicznej. Stwierdzenie, że dana koncepcja matematyczna *K* jest prawdziwa w odniesieniu do pewnej struktury matematycznej *S* (realizuje się w tej strukturze, stanowi wiedzę na temat tej struktury)[7] byłoby więc parafrazowane jako metateoretyczne zdanie dotyczące modeli i relacji spełniania w tych modelach. Wszystkie pojęcia matematyczne traktowalibyśmy więc jako redukowalne do pojęć teorii mnogości, a zamiast o korelatach ontologicznych dla teorii matematycznych, mówilibyśmy o teoriomnogościowych modelach. Konieczne byłoby więc przyjęcie założenia o istnieniu i adekwatności takich parafraz dla wszelkich koncepcji matematycznych.

Problem pogodzenia takiej wizji matematyki z tezą MBI zostanie podjęty w dalszej części pracy. Tu chciałbym natomiast zwrócić uwagę na fakt, że nawet przyjęcie tezy, że matematyka redukuje się (pojęciowo i ontologicznie) do teorii mnogości, nie pozwala na uznanie, że to właśnie twierdzenie o pełności stanowi adekwatną parafrazę formalną tezy MBI. Gdy bowiem mówimy o realizacji wszelkich możliwych koncepcji zbioru (a tylko tak — zgodnie z tym, co zauważyliśmy w paragrafie 2 — można odnosić tezę MBI do pojęć teoriomnogościowych), to nie mamy na myśli li tylko faktu, że istnieją formalne modele dla tych teorii, ale znacznie silniejszą tezę ontologiczną. Obrazowo mówiąc, intencją tezy MBI nie jest wyrażenie przekonania, że oto w (jednym) uniwersum mnogościowym V istnieją modele[8] — ale to, że jest **wiele** takich uniwersów, o równym statusie. Te uniwersa realizować miałyby wszystkie możliwe koncepcje zbiorów — i w tym sensie istniałyby wszystkie możliwe

[6] Przy tym założeniu, mówienie o możliwości sprowadza się do mówienia o niesprzeczności logicznej.

[7] Podaję te swobodne sformułowania po to, aby podkreślić, że mam na myśli intuicje, a nie formalne parafrazy tych intuicyjnych stwierdzeń.

[8] Należy zauważyć, że niektóre z modeli (np. modele na termach) mają wyraźnie sztuczny charakter — charakter pewnych czysto formalnych konstrukcji, które nie są w pełni zgodne z naszym intuicyjnym rozumieniem pojęcia „struktura matematyczna opisana przez teorię T”.

obiekty matematyczne.[9] Tezę MBI w odniesieniu do teorii mnogości należałoby więc rozumieć jako tezę o istnieniu wszelkich możliwych struktur (uniwersów) teoriomnogościowych, traktowanych jako korelaty ontologiczne dla teorii mnogości (względnie: dla różnych wariantów teorii mnogości).[10]

4. POJĘCIA MATEMATYCZNE A TEORIOMNOGOŚCIOWA REDUKCJA

W tym paragrafie rozważam problem tezy MBI w kontekście problemu redukcji matematyki do jednego, fundamentalnego systemu pojęć. Twierdzę, że niezależnie od tego, jak rozstrzygniemy problem redukcji, przyjęcie tezy MBI prowadzi do trudności, dla których brak jest dobrego rozwiązania.

W matematyce mamy do czynienia z niezwykłym bogactwem i różnorodnością pojęć, technik, teorii, struktur, problemów *etc.* Zarazem jednak mamy poczucie swoistej jedności matematyki jako takiej, swobodnego przenikania się technik z różnych dziedzin, „współpracy" różnych działów. Jest dobrze znanym faktem, że możliwa jest rekonstrukcja (praktycznie całej) matematyki w ramach teorii mnogości. Każde pojęcie matematyczne daje się zdefiniować jako pojęcie teoriomnogościowe, i tym samym każde zdanie matematyczne α daje się przetłumaczyć na zdanie α^* teorii mnogości. Dzieje się to z zachowaniem związków logicznych — jeśli α jest twierdzeniem np. teorii T, to α^* jest twierdzeniem teorii T* — gdzie T* jest teoriomnogościowym tłumaczeniem teorii matematycznej T. Jakie znaczenie ma ten fakt dla naszej interpretacji tezy MBI? I czy konsekwencją obserwacji dotyczącej redukowalności pojęć matematycznych do pojęć teoriomnogościowych jest przyjęcie tezy ontologicznej, w myśl której obiekty matematyczne, o których mówi MBI, są zbiorami?

Przedmiotem badań „zwykłego matematyka" (np. specjalisty od równań różniczkowych albo teorii procesów stochastycznych) nie są bynajmniej skomplikowane konstrukcje teoriomnogościowe, ale zwykłe obiekty matematyczne: równania różniczkowe w przestrzeniach Banacha, rozmaitości czterowymiarowe, proces Wienera w $\mathbf{R}^n$ *etc.* — traktowane jako takie, a nie jako zbiory. Swoje badania uprawia

---

[9] W szczególności w jednym z uniwersów zachodzi CH i tam istnieje stosowna bijekcja między $P(\omega)$ i $\aleph_1$, w innym zaś zachodzi $\neg$CH — i tam istnieje stosowny zbiór mocy pomiędzy $\aleph_0$ i mocą kontinuum.

[10] Na przykład teza, że (wśród wielu innych pojęć także) pojęcie mierzalnej liczby kardynalnej ma swoją realizację (ontologiczny korelat) w matematycznym uniwersum nie wyraża jedynie przekonania, że istnienie takich liczb jest niesprzeczne relatywnie do teorii mnogości, i że teoria „ZFC + Istnieje liczba mierzalna" posiada formalny model. Maksymalista ontologiczny (a jest nim zwolennik tezy MBI) ma więc na myśli istnienie uniwersum mnogościowego (które zawiera liczbę mierzalną) — przy czym jest to „pełnoprawne" uniwersum, a nie tylko jakiś czysto formalny model (np. przeliczalny model na termach) dla teorii ZFC+MC. Sam fakt, że takie modele istnieją może co najwyżej odgrywać w jego argumentacji rolę pomocniczą — lecz właściwa teza ontologiczna jest inna!

w „naturalnym języku matematycznym”, a nie w języku teorii mnogości. Na pytanie, czy nie martwi go np. relatywność pojęć teoriomnogościowych i fakt, że w każdym modelu M dla teorii mnogości istnieją kopie przestrzeni Banacha C[0,1] czy $L^p[0,1]$ (a nawet różne kopie odcinka [0,1]), odpowie negatywnie — dodając być może sarkastycznie, że on się zajmuje **prawdziwą** matematyką, i **prawdziwymi** problemami i obiektami matematycznymi, a nie dziwacznymi konstrukcjami teoriomnogościowymi. Zauważmy, że z punktu widzenia problemów, będących przedmiotem zainteresowania np. teorii równań różniczkowych, analizy rzeczywistej i zespolonej, teorii procesów stochastycznych *etc.* problem, jak wygląda teoriomnogościowa rekonstrukcja liczb rzeczywistych (poprzez przekroje Dedekinda, ciągi Cauchy’ego czy jeszcze jakoś inaczej) nie ma żadnego znaczenia. „Pracujący matematyk” uzna więc, że teoria mnogości jest pewnym narzędziem idealizacyjnym, które służy (zainteresowanym tym zagadnieniem logikom — bo raczej nie jemu samemu) do formalnej rekonstrukcji matematyki, ale nie stanowi naturalnego ujęcia pojęć matematycznych znanych ze zwykłej praktyki matematycznej.[11]

Jednak przyjęcie tez o charakterze metodologicznym, dotyczących samego sposobu uprawiania matematyki, nie musi wiązać się z akceptacją tez ontologicznych, dotyczących natury obiektów matematycznych. Mówiąc swobodnie, można uprawiać matematykę na poziomie czysto „fenomenalistycznym” — badać np. liczby rzeczywiste, nie zastanawiając się nad tym, czy one *de facto* są zbiorami, czy nie, niejako „biorąc w nawias” problem prawdziwej natury badanych obiektów. Takie — jak sądzę — jest robocze stanowisko większości matematyków — powiedzą, że badają liczby, a nie zbiory, ale kiedy ktoś zacznie ich zasypywać argumentami na rzecz redukcji teoriomnogościowej, to prawdopodobnie dla świętego spokoju się na taką redukcję zgodzą (i nadal będą pracować z przekonaniem, że jednak badają liczby jako takie). To jednak nie rozwiązuje problemu natury obiektów matematycznych — a w kontekście tezy MBI nabiera on szczególnego znaczenia.[12]

Można wskazać poważne argumenty na rzecz tezy, że wszystkie obiekty matematyczne są zbiorami, jak również poważne argumenty na rzecz tezy przeciwnej. Tego problemu nie będę tu w ogóle podejmował — chcę natomiast zwrócić uwagę na fakt, że w obu przypadkach pojawiają się poważne trudności związane z tezą MBI. U podłoża tezy MBI leży bowiem swoisty maksymalizm ontologiczny, jest ona

[11] Nie chcę tu oczywiście deprecjonować badań metamatematycznych — chodzi mi tu jednak o fakt, że matematyk się taką rekonstrukcją za bardzo nie interesuje. Mówiąc żartobliwie — gdyby okazało się, że w rekonstrukcji liczb rzeczywistych metodą przekrojów Dedekinda tkwi (*nomen omen*) luka, to specjalista od równań różniczkowych wcale by się tym faktem nie przejął.

[12] Upraszczając powiedzmy, że matematyk na pytanie „jaka jest prawdziwa natura obiektów matematycznych?” odpowie zapewne „to nie ma znaczenia — jaka by nie była, to twierdzenia na temat równań różniczkowych pozostają w mocy”. To jednak znaczy tylko tyle, że z punktu widzenia codziennej pracy matematyka rozstrzygnięcia filozoficzne nie mają znaczenia — podobnie, jak z punktu widzenia chemika czy geologa nie ma znaczenia rozstrzygnięcie sporu między idealizmem subiektywnym a realizmem. Jednak filozoficzny problem pozostaje.

przeciwieństwem brzytwy Ockhama: nie powinniśmy ograniczać się jedynie do zbiorów, ale dopuszczać również istnienie bytów matematycznych innego typu.

Bliskie intuicjom tezy MBI będzie przyjęcie tezy ontologicznej, w myśl której obiekty matematyczne są bytami *per se*, a nie zbiorami. Świat matematyczny nie składa się więc tylko i wyłącznie ze zbiorów, ale również z obiektów *per se* — liczb rzeczywistych jako takich, funkcji zespolonych jako takich, obiektów topologicznych, probabilistycznych *etc.* Te obiekty będą traktowane jako obiekty pierwotne stosownych teorii, dziedziny zaś, do których odnoszą się te teorie, zostaną uznane za ontyczne korelaty *simpliciter* (a nie za teoriomnogościowe konstrukty).

Jednak możliwość pojęciowej redukcji (znanej nam) matematyki do teorii mnogości jest faktem.[13] Jak uzgodnić ten fakt z tezą MBI? Zwolennik tezy MBI musi wybierać między dwoma możliwościami, z których pierwsza jest poniekąd bliższa praktyki matematycznej, a druga — intuicji MBI.

(1) W myśl pierwszej interpretacji, obiekty matematyczne nie są wprawdzie zbiorami, zdania matematyczne nie są zdaniami teorii mnogości, ale:

(1.a) Obiekty matematyczne mają swoje wierne reprezentacje w postaci zbiorów.

(1.b) Zdania matematyczne mają swoje tłumaczenia na zdania teorii mnogości.

(1.c) Zachowane są stosowne zależności strukturalne.

W tej sytuacji fakt, że z teorii T* (teoriomnogościowy odpowiednik teorii T) wynika zdanie α^* (teoriomnogościowy odpowiednik zdania α) upoważnia nas do uznania, że również między teorią T i zdaniem α zachodzi taka relacja. Tym samym nie tracimy możliwości metamatematycznej refleksji dotyczącej np. zależności logicznych. Takie ujęcie opiera się na założeniu, że istnieje pełna zgodność pomiędzy preformalnym pojęciem prawdziwości i wynikania, a ich formalnymi odpowiednikami. Innymi słowy, trzeba założyć, że odpowiednikiem preformalnych stwierdzeń, takich jak „koncepcja K jest prawdziwa o S” oraz „z koncepcji K wynika α” są formalne stwierdzenia „$M_S \models T_K$” oraz „$T_K \models \varphi_\alpha$” (gdzie T_K — formalny odpowiednik koncepcji K, M_S — model odpowiadający strukturze S, φ_α — formalny odpowiednik zdania α). Przyjęcie tezy o tym, że istnieją mnogościowe reprezentacje dla istniejących *per se* obiektów matematycznych pozwalałoby na zachowanie zalet teoriomnogościowej rekonstrukcji.

Jednak taka strategia wydaje się niezgodna z intuicjami leżącymi u podłoża tezy MBI. Mówiąc swobodnie, przyjmując taką strategię, nasz maksymalista ontologiczny zatrzymuje się wpół drogi. Dlaczego bowiem miałyby istnieć tylko takie obiekty matematyczne, które są kopiami zbiorów (czy raczej: które mają kopie w postaci zbiorów)? Wydaje się więc, że zwolennik tezy MBI powinien przyjąć punkt widzenia bardziej radykalny niż (1). Bardziej zgodne z jego intuicjami będzie więc stanowisko (2):

[13] Dla sporych fragmentów matematyki możliwa jest taka redukcja także do słabszej teorii niż teoria mnogości, a mianowicie do arytmetyki drugiego rzędu Z_2.

(2) Obiekty matematyczne nie są reprezentowalne w postaci zbiorów — tak naprawdę istnieją *per se*, zaś zdania teorii matematycznych dotyczą tych bytów *simpliciter*, a nie poprzez tłumaczenia na język teorii mnogości i reprezentowanie struktur matematycznych w postaci struktur teoriomnogościowych. W myśl tego stanowiska, świat matematyczny jest zbyt bogaty, aby można było go wtłoczyć w teoriomnogościowy paradygmat — nakładanie na niego takich ograniczeń byłoby sprzeczne z „duchem MBI”. Należy wówczas też uznać, że problem związków logicznych (między matematycznymi koncepcjami a matematycznymi zdaniami) badamy wprost, a nie poprzez reprezentacje teoriomnogościowe dla całej matematyki.

W takim ujęciu tezę MBI można sformułować jedynie jako:

(MBI*) Oprócz (wszystkich możliwych) zbiorów, istnieją także wszystkie możliwe obiekty matematyczne niebędące zbiorami (i — należałoby dodać — niemające reprezentacji teoriomnogościowych).

Takie ujęcie ma jednak również pewne wady. Jeśli uznamy, że istnieją obiekty matematyczne, które nie mają mnogościowej reprezentacji, to tracimy możliwość sformułowania dobrej, jednolitej semantyki, teorii wynikania logicznego i prawdy dla całej matematyki. Trudniejsze jest wówczas również wyjaśnienie związków między działami matematyki (na co pozwala teoriomnogościowa rekonstrukcja). Zarazem prowadzi to do dziwnej sytuacji, w której niewątpliwie mamy (na co pokazuje praktyka) teoriomnogościowe redukcje teorii matematycznych (np. teorii liczb naturalnych, rzeczywistych *etc.* w postaci zbiorów), a jednocześnie twierdzilibyśmy, że to są tylko rekonstrukcje, ale prawdziwe liczby są inne. Kolejna trudność polega na tym, że rozmywa się pojęcie matematyczności: skoro odrzucamy ramy paradygmatu teoriomnogościowego, i reprezentowalność w teorii mnogości przestaje być warunkiem matematyczności, to pojawia się problem granic matematyczności. Jakie pojęcia uznajemy za jeszcze matematyczne? Czy to powinna rozstrzygać tylko i wyłącznie praktyka matematyczna (tzn.: matematyczne są te problemy, którymi zajmują się osoby zatrudnione na Wydziale Matematyki)? Swobodnie mówiąc, co wyróżnia obiekty matematyczne wśród wszystkich obiektów abstrakcyjnych, skoro tym kryterium nie jest posiadanie teoriomnogościowych reprezentacji i możliwość wpisania w pewien jednolity system pojęć?

Rozważania w tym paragrafie można podsumować stwierdzeniem, że żadne z możliwych stanowisk w sprawie redukcji matematyki do teorii mnogości nie daje się w prosty sposób uzgodnić z tezą MBI — w każdym bowiem przypadku powstają poważne trudności.

5. MBI: CZY ISTNIEJE WIEDZA MATEMATYCZNA?

Realista — w szczególności realista matematyczny — jest przekonany, że na temat świata matematycznego posiada pewną (choć oczywiście niekompletną) wiedzę. Jest więc przekonany o swoistej obiektywności matematyki, o tym, że pytania matematyczne (być może nie wszystkie, ale liczne) pytania matematyczne mają dobrze określone odpowiedzi. Zastanówmy się, czy przyjęcie tezy MBI jest do pogodzenia z tą fundamentalną intuicją? Innymi słowy: czy również zwolennik tezy MBI może twierdzić, iż posiada wiedzę matematyczną w takim samym sensie, w jakim (sądzi iż) ją posiada każdy „porządny" matematyczny realista?

Przyjęcie tezy MBI powoduje, że pytania matematyczne (jeśli nie wszystkie, to przynajmniej cały ich szereg) stają się pytaniami bez odpowiedzi.[14] Żadna koncepcja matematyczna nie może zostać wyróżniona: wszystkie są równoprawne, wszystkie mają ontologiczne korelaty, wszystkie odnoszą się do pewnego fragmentu matematycznego świata — ale żadna nie może pretendować do roli teorii opisującej świat matematyczny. Wiedza matematyczna sprowadzałaby się więc do ustaleń o charakterze czysto warunkowym (w duchu deduktywizmu): „w ramach koncepcji K, prawdziwe jest stwierdzenie α". Mówiąc obrazowo: w pewnym kawałku świata matematycznego zachodzi α, w innym zaś — $\neg\alpha$.[15] Nie ma jednak sensu pytanie, czy tak naprawdę każda funkcja ciągła na odcinku $[0,1]$ jest jednostajnie ciągła, albo czy tak naprawdę istnieje niemierzalny podzbiór $\mathbf{R}$. W ostatecznym rozrachunku zwolennik tezy MBI nie będzie wówczas mógł uznać za prawdę żadnego zdania matematycznego, będzie jedynie dopuszczał tautologie oraz pewne metateoretyczne stwierdzenia o charakterze warunkowym.

Takie postawienie sprawy jest zdecydowanie sprzeczne z podstawowymi założeniami stanowiska realistycznego. Realista twierdzi bowiem, że tak naprawdę istnieje pewna prawdziwa teoria świata (nawet jeśli tej teorii nie znamy). Z punktu widzenia stanowiska realistycznego, zdania matematyki mają charakter obiektywny — a nie czysto warunkowy i hipotetyczny (czyli *de facto* konwencjonalny), zaś pytania matematyczne (a nie tylko metamatematyczne) mają **bezwarunkową** odpowiedź. Tymczasem MBI prowadzi do pozbawienia wiedzy matematycznej obiektywności.

Nie widać prostej metody uzgodnienia tezy MBI z zasadniczymi przekonaniami matematycznego realisty w odniesieniu do wiedzy matematycznej.

---

[14] Czy każda funkcja rzeczywista ciągła na odcinku domkniętym $[0,1]$ osiąga swoje kresy? Które szeregi funkcyjne są zbieżne? Czy każdy ograniczony zbiór liczb rzeczywistych ma supremum i infimum? Czy istnieje niemierzalny podzbiór $\mathbf{R}$? Czy każda ośrodkowa przestrzeń Hilberta jest izomorficzna z $L^2[0,1]$? Czy suma przeliczalnej ilości zbiorów przeliczalnych jest zbiorem przeliczalnym? Czy CH jest prawdziwa?

[15] Na przykład CH może być prawdziwa w jednym kawałku mojego świata, a fałszywa w innym (prawdziwa w tym, który odpowiada CH-pojęciu zbioru, fałszywa w tym, który odpowiada $\neg$CH-pojęciu zbioru); w jednej części świata matematycznego każdy ograniczony zbiór liczb rzeczywistych ma *infimum* i *supremum*, w innej — nie ma, *etc*.